RECHERCHES MATHÉMATIQUES

SUR LA

LOI D'ACCROISSEMENT DE LA POPULATION,

PAR

P.-F. VERHULST,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE, PROFESSEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE.

(Lu à la séance du 30 novembre 1844).

RECHERCHES MATHÉMATIQUES

SUR

LA LOI D'ACCROISSEMENT DE LA POPULATION.

THÉORIE GÉNÉRALE.

§ 1. De tous les problèmes que l'économie politique offre aux méditations des philosophes, l'un des plus intéressants est, sans contredit, la connaissance de la loi qui règle les progrès de la population. Pour le résoudre avec exactitude, il faudrait pouvoir apprécier l'influence des causes nombreuses qui empêchent ou favorisent la multiplication de l'espèce humaine. Et comme plusieurs de ces causes sont variables par leur nature et par leur mode d'action, le problème considéré dans toute sa généralité, est visiblement insoluble.

Il faut observer cependant, qu'à mesure que la civilisation se perfectionne, l'influence des causes purement perturbatrices s'affaiblit de plus en plus, pour laisser dominer les causes constantes; de manière qu'à une certaine époque, il devient permis de faire abstraction des premières, sauf à considérer les données du problème comme soumises à de légères variations.

En conséquence, pour appliquer le calcul au principe de la population, nous commencerons par ne pas tenir compte des causes accidentelles, dont nous sommes loin toutefois de nier l'importance dans l'état actuel de la société. Si les données de la statistique comportaient la même précision que celles des sciences expérimentales, telles que la physique et la chimie, on pourrait juger de l'influence des causes négligées par la comparaison des résultats du calcul avec ceux de l'observation. Mais, malheureusement, la statistique est une science encore trop nouvelle, pour qu'on puisse avoir une entière confiance dans les chiffres qu'elle fournit.

§ 2. Au nombre des causes qui exercent une action constante sur l'accroissement de la population, nous placerons la fécondité propre à l'espèce humaine, la salubrité du pays, les mœurs de la nation que l'on considère, ses lois civiles et religieuses. Quant aux causes variables que l'on ne peut pas regarder comme accidentelles, elles se résument généralement dans la difficulté de plus en plus grande que la population éprouve à se procurer des subsistances, lorsqu'elle est devenue assez nombreuse pour que toutes les bonnes terres se trouvent occupées.

Quand on ne tient pas compte de la difficulté dont nous venons de parler, il faut admettre qu'en vertu des causes constantes, la population doit croître en progression géométrique. En effet, si 1000 âmes sont devenues 2000 au bout de 25 ans, par exemple, il n'y a pas de raison pour que ces 2000 ne deviennent pas 4000 au bout des 25 années suivantes.

Les États-Unis nous offrent un exemple de cette grande vitesse d'accroissement de la population. On y comptait, d'après les recensements officiels,

En 1790.	3,929,827 âmes,
1800.	5,305,925
1810.	7,239,814
1820.	9,638,131
1830.	12,866,020
1840.	17,062,566.

Si l'on prend pour la population de 1795 le chiffre 4,617,876, moyen entre celui de 1790 et celui de 1800, et qu'on fasse de même pour les années 1805, 1815, 1825 et 1835, on pourra évaluer approximativement les progrès de la population de 5 en 5 ans. C'est ainsi que nous avons formé le tableau suivant, dans lequel nous avons arrondi les chiffres et désigné par r le rapport de chaque population à celle qui la précède de 25 ans :

ANNÉES.	POPULATION.	VALEURS DE r.
1790.	3,930,000	
1795.	4,618,000	
1800.	5,306,000	
1805.	6,275,000	
1810.	7,240,000	
1815.	8,439,000	2.147
1820.	9,638,000	2.087
1825.	11,252,000	2.120
1830.	12,866,000	2.052
1835.	14,964,000	2.076
1840.	17,063,000	2.021

Nous n'avons pas tenu compte des immigrations, parce que nous les regardons comme largement compensées par les obstacles que l'esclavage apporte à la multiplication des noirs, dans les États du Sud.

§ 3. Désignons par p la population, par t le temps, et par k et l des constantes indéterminées : si la population croît en progression géométrique pendant que le temps croît en progression arithmétique, on aura entre ces deux quantités la relation,

$$p = k10^{lt}.$$

Soit p' une population correspondante à un temps t' : il viendra

$$p = p'10^{l(t-t')},$$

et si l'on appelle Π la population existante au moment d'où l'on commence à compter le temps, l'équation précédente devient

$$p = \Pi 10^{lt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dans l'hypothèse de la progression géométrique, la courbe de la population est donc une *logarithmique,* dans laquelle les ordonnées et les abscisses représentent respectivement les populations et les temps écoulés, l'ordonnée étant Π à l'origine.

En différentiant deux fois l'équation (1), et en désignant par M le module par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour les convertir en logarithmes vulgaires, il vient

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{\Pi l^2 10^{lt}}{M^2} = \frac{l^2 p}{M^2};$$

ce qui fait voir que la courbe tourne constamment sa convexité vers l'axe des abscisses.

La période malthusienne de 25 ans suppose que p devient $2p$ quand t devient $t+25$, l'année étant prise pour unité de temps : on a donc les équations

$$\begin{aligned} 2p &= \Pi 10^{lt+25l}, \\ 2p &= 2\Pi 10^{lt}; \end{aligned}$$

d'où $2 = 10^{25l}$, et

$$l = \tfrac{1}{25} \log. 2 = 0.012041200.$$

Nous n'insisterons pas davantage sur l'hypothèse de la progression géométrique, attendu qu'elle ne se réalise que dans des circonstances tout à fait exceptionnelles; par exemple, quand un territoire fertile et d'une étendue en quelque sorte illimitée, se trouve habité par un peuple d'une civilisation très-avancée, comme celle des premiers colons des États-Unis.

§ 4. La différentiation de l'équation (1) donne

$$\frac{M dp}{p dt} = l:$$

Cette quantité étant constante, on peut la prendre pour mesure de l'énergie avec laquelle la population tend à se développer, lorsqu'elle n'est point retenue par la crainte de manquer de subsistances. On a aussi, avec une exactitude d'autant plus grande que Δp et Δt sont plus petits,

$$M\Delta p = lp\Delta t;$$

et, si l'on prend pour Δt l'intervalle d'une année,

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{l}{M},$$

c'est-à-dire que, dans le cas de la progression géométrique, l'excès annuel des naissances sur les décès, divisé par la population qui l'a fourni, donne un quotient constant. Sous le rapport des résultats purement numériques, il est indifférent que le nombre des naissances augmente on diminue, pourvu que celui des décès augmente ou diminue de la même quantité : si l'on remarque donc que le coefficient $\frac{l}{M}$ s'affaiblit, il reviendra au même d'en attribuer la cause à une diminution dans la fécondité de la population ou à une augmentation dans sa mortalité, c'est-à-dire à des obstacles préventifs ou à des obstacles destructifs.

C'est un fait d'observation que, dans toute l'Europe, le rapport de l'excès annuel des naissances sur les décès, à la population qui l'a fourni, et par conséquent le coefficient $\frac{l}{M}$, va sans cesse en s'affaiblissant : de manière que l'accroissement annuel, dont la valeur absolue augmente continuellement lorsqu'il y a progression géométrique, paraît suivre une progression tout au plus arithmétique. Cette remarque confirme le célèbre aphorisme de Malthus, que *la population tend à croître en progression géométrique, tandis que la production des subsistances suit une progression tout au plus arithmétique*, puisque la population est obligée de se régler sur les subsistances [1].

[1] La seconde partie de cet aphorisme s'applique exclusivement aux pays anciennement civilisés, les seuls que Malthus ait eus en vue. On a reproché à cet illustre économiste, de n'avoir pas

On peut faire une infinité d'hypothèses sur la loi d'affaiblissement du coefficient $\frac{l}{M}$. La plus simple consiste à regarder cet affaiblissement comme proportionnel à l'accroissement de la population, depuis le moment où la difficulté de trouver de bonnes terres a commencé à se faire sentir. Nous appellerons *population normale*, et nous désignerons par b, celle qui correspond à cette époque remarquable, à partir de laquelle nous compterons le temps : puis, ayant dénoté par n un coefficient indéterminé, nous remplacerons l'équation différentielle $\frac{Mdp}{pdt} = l$, relative à la progression géométrique, par

$$\frac{Mdp}{pdt} = l - n(p - b); \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

d'où, en posant, pour abréger, $m = l + nb$,

$$\frac{Mdp}{pdt} = m - np,$$

et

$$dt = \frac{Mdp}{mp - np^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Cette équation étant intégrée donne, en observant que $t = 0$ répond à $p = b$,

$$t = \frac{1}{m} \log. \left[\frac{p(m - nb)}{b(m - np)}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Nous donnerons le nom de *logistique* à la courbe (*voyez la figure*)

tenu compte de la propriété dont jouissent les denrées alimentaires, de se multiplier dans une progression plus rapide que l'espèce humaine, lorsque le sol est nouvellement cultivé. Mais cet âge d'or de la société n'existe plus depuis longtemps pour les nations européennes. Quant aux ressources qu'un grand peuple peut tirer du commerce étranger pour se procurer des subsistances, il nous suffira de rappeler que, d'après les calculs de M. Moreau de Jonnès, la récolte de la France, en blé seulement, est de 70 millions d'hectolitres, et que pour transporter une pareille masse, il faudrait 88,000 navires de cent tonneaux! Qu'on juge alors de la quantité des autres denrées alimentaires. Lors même qu'une partie considérable de la population française pourrait être nourrie de blés étrangers, jamais un gouvernement sage ne consentira à faire dépendre l'existence de millions de citoyens du bon vouloir des souverains étrangers.

caractérisée par l'équation précédente. On voit qu'elle a une asymptote parallèle à l'axe des abscisses, à une distance $\frac{m}{n}$ de l'origine, car $p = \frac{m}{n}$ répond à $t = \infty$. Cette valeur de p est celle de l'ordonnée OZ, qui représente l'extrême limite de la population.

La différentiation de l'équation (2) donne

$$M^2 \frac{d^2p}{dt^2} = (m - 2np) \quad (mp - np^2);$$

ce qui montre que la courbe a un point d'inflexion I, correspondant à $p = \frac{1}{2}\frac{m}{n}$. C'est là que de convexe elle devient concave vers l'axe des abscisses.

§ 5. L'équation (4) prend une forme plus simple quand on transporte l'origine des coordonnées au point O_i, pied de l'ordonnée p_i du point d'inflexion ; ce qui se fait en changeant t en $t + t_i$, t_i dénotant l'abscisse OO_i. Si l'on observe qu'on a

$$t_i = \frac{1}{m} \log. \left[\frac{p_i(m - nb)}{b\,(m - np_i)}\right],$$

et que $p_i = \frac{m}{2n}$, il vient

$$t = \frac{1}{m} \log. \left\{\frac{p}{\frac{m}{n} - p}\right\} \quad \text{. . . . . (5)}$$

Cette équation est telle, que si l'on y change p en $\frac{m}{n} - p$, t change simplement de signe. De là résulte cette propriété, que *la somme des ordonnées placées à la même distance du point d'inflexion est constante et égale à l'ordonnée limite* $\frac{m}{n}$.

Prenons $O_iO' = OO_i = \frac{1}{m} \log. \left\{\frac{b}{\frac{m}{n} - b}\right\}$: nous aurons, en vertu de la propriété précédente,

$$O'P' = \frac{m}{n} - b;$$

c'est-à-dire que *la population arrivée à l'époque correspondante au point* O', *ne pourra plus s'accroître que d'une quantité égale à la population normale.*

La considération des trois points remarquables O, O_i et O', nous conduit à partager la durée infinie du temps en quatre *âges*, à chacun desquels il serait aisé d'attacher un caractère distinctif, emprunté soit à l'agriculture, soit à l'économie politique. Dans le premier âge, la courbe de la population est une logarithmique qui se change en logistique au point P : alors les bonnes terres seules sont cultivées. Dans le second âge OO_i, on pourrait dire qu'on cultive les terrains médiocres. Dans le troisième âge, de même durée que le précédent, on défricherait les plus mauvaises terres. Enfin, dans le quatrième âge, la population ne s'accroîtrait plus qu'à la faveur des améliorations du sol déjà cultivé, ou des importations du commerce étranger. Du reste, nous croyons superflu de faire observer que ces rapprochements entre les progrès de la population et l'extension de l'agriculture, ne sont pas susceptibles d'une grande exactitude.

§ 6. Puisqu'au point d'inflexion on a $d^2p=o$, dans le voisinage de ce point les différences Δp sont sensiblement égales, c'est-à-dire que les ordonnées croissent en progression arithmétique. L'ordonnée IO_i étant la moitié de l'ordonnée limite, il s'ensuit que *la population tend de plus en plus à devenir double de celle qui existait à l'époque où l'accroissement annuel était constant.*

En supposant

$$\frac{Mdp}{dt} = mp - np^{\mu},$$

on trouverait que l'ordonnée du point d'inflexion est la $\frac{1^{me}}{\sqrt[\mu-1]{\mu}}$ partie de l'ordonnée limite. En général, *plus la fonction qui représente la gêne éprouvée par la population, sera rapidement croissante, plus l'ordonnée du point d'inflexion sera grande par rapport à l'ordonnée limite.* Pour le démontrer, nous prendrons

$$\frac{\mathrm{M}dp}{pdt} = m - f(p)$$

pour l'équation différentielle de la courbe de la population. L'ordonnée limite p_∞ sera déduite de l'équation

$$m - f(p_\infty) = 0,$$

tandis que l'ordonnée p_i du point d'inflexion sera donnée par l'équation

$$f(p_\infty) = f(p_i) + p_i\, f'(p_i),$$

f' désignant la dérivée de la fonction f. On tire de là

$$\frac{f(p_\infty)}{f(p_i)} = 1 + p_i \frac{f'(p_i)}{f(p_i)}.$$

Or, plus la fonction $f(p)$ sera rapidement croissante, plus $f'(p_i)$ sera grande par rapport à $f(p_i)$, plus $\frac{f'(p_i)}{f(p_i)}$ le sera par rapport à p_i; et, à cause de l'équation précédente, plus $f(p_\infty)$ sera grande par rapport à $f(p_i)$ ou à p_i. Donc, plus p_∞, qui est la fonction inverse de $f(p_\infty)$, sera petite par rapport à p_i.

§ 7. En conservant le même axe des abscisses, transportons maintenant l'origine des coordonnées en un point C, dont la distance au point O_i sera dénotée par i. Changeons, en conséquence, t en $t+i$, et il viendra, pour l'équation générale de la logistique rapportée au pied d'une ordonnée quelconque,

$$t + i = \frac{1}{m} \log. \left\{ \frac{p}{\frac{m}{n} - p} \right\}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (6)$$

formule dans laquelle l'abscisse du point d'inflexion est $-i$. Si l'on veut obtenir la valeur de p en t, on peut poser, pour abréger,

$$10^{(t+i)m} = z,$$

et l'on trouvera

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{z}{1+z}.$$

§ 8. La formule (6) renfermant trois indéterminées, il suffira de connaître le chiffre de la population à trois époques différentes, pour avoir la loi de son accroissement. Soient donc p_0, p_1, p_2 les ordonnées qui répondent aux abscisses 0, t_1 et t_2, et supposons de plus que $t_2 = 2t_1$: l'équation (6) donne

$$i = \frac{1}{m} \log. \left\{ \frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0} \right\},$$

$$t_1 + i = \frac{1}{m} \log. \left\{ \frac{p_1}{\frac{m}{n} - p_1} \right\},$$

$$t_2 + i = \frac{1}{m} \log. \left\{ \frac{p_2}{\frac{m}{n} - p_2} \right\};$$

d'où l'on conclut, en retranchant la première équation de la seconde et la seconde de la troisième,

$$\frac{p_1\left(\frac{m}{n} - p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n} - p_1\right)} = \frac{p_2\left(\frac{m}{n} - p_1\right)}{p_1\left(\frac{m}{n} - p_2\right)},$$

$$(p_1^2 - p_0 p_2)\frac{m^2}{n^2} - (p_0 p_1^2 + p_2 p_1^2 - 2p_0 p_1 p_2)\frac{m}{n} = 0,$$

et finalement

$$\frac{m}{n} = \frac{p_1(p_0 p_1 + p_1 p_2 - 2p_0 p_2)}{p_1^2 - p_0 p_2}.$$

Cette valeur de $\frac{m}{n}$ sera finie et positive, si l'on a

$$p_1^2 > p_0 p_2, \quad p_0 p_1 + p_1 p_2 > 2p_0 p_2:$$

Or, la première inégalité découle de l'hypothèse dont nous sommes parti, que la population croît dans une progression moins que géométrique, et la seconde pouvant s'écrire sous la forme

$$p_1 \frac{\frac{1}{2}(p_0 + p_2)}{\sqrt{p_0 p_2}} > \sqrt{p_0 p_2},$$

on voit qu'elle n'est qu'une conséquence de la première et du théorème connu : que *la moyenne arithmétique surpasse toujours la moyenne géométrique*.

Connaissant $\frac{m}{n}$, on déterminera le coefficient m par l'équation

$$m = \frac{1}{t_1} \log. \left\{ \frac{p_1 \left(\frac{m}{n} - p_0 \right)}{p_0 \left(\frac{m}{n} - p_1 \right)} \right\},$$

et i par l'équation

$$i = \frac{1}{m} \log. \left\{ \frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0} \right\}.$$

On peut donner à la valeur de $\frac{m}{n}$ une forme plus favorable au calcul logarithmique, en posant

$$p_1 - p_0 = u, \quad p_2 - p_1 = v, \quad \frac{uv}{p_1} = w, \quad \frac{u + w - v}{w} = q :$$

elle devient alors

$$\frac{m}{n} = p_1 + \frac{p_1}{q}.$$

Si l'on fait maintenant

$$\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0} = r,$$

on aura pour m et pour i ces expressions très-simples

$$m = \frac{1}{t_1} (\log. q - \log. r),$$

$$i = \frac{1}{m} \log. r.$$

§ 9. Nous avons posé précédemment

$$m = l + nb,$$

l étant la mesure de la rapidité avec laquelle la population que l'on considère, tend à croître en progression géométrique; et b désignant la population normale : par conséquent, si l'on connaissait la première de ces quantités, il serait facile d'assigner l'autre, et la valeur correspondante de t serait donnée par la formule (6), dans laquelle on ferait $p=b$. Mais, jusqu'aujourd'hui la valeur numérique de l n'est connue pour aucun peuple, si ce n'est pour les Anglo-Américains. Encore, d'après la manière dont on y est parvenu (§ 3), on ne peut la regarder que comme une approximation très-grossière.

Pour le calcul ou la construction des formules relatives à la population, il convient de prendre la période décennale pour unité de temps, et le million d'âmes pour unité de population : on évite par là d'opérer sur des nombres trop disproportionnés entre eux. Il faut d'ailleurs un intervalle de dix ans, au moins, pour que les effets des causes accidentelles puissent se compenser.

§ 10. Considérons sur la logistique et au delà du point d'inflexion, une suite de points, dont les ordonnées, séparées par des intervalles égaux, soient dénotées par

$$p', \quad p'', \quad p''', \quad p^{\text{IV}}, \text{ etc. :}$$

il résulte de ce que la courbe présente sa concavité à l'axe des abscisses, que l'on doit avoir

$$p'' > \frac{p' + p'''}{2}, \quad p''' > \frac{p'' + p^{\text{IV}}}{2}, \text{ etc.}$$

Le contraire aura lieu en deçà du point d'inflexion.

La remarque précédente offre un critère fort utile pour reconnaître si les points donnés sont susceptibles de se trouver sur une logistique, et même pour assigner à peu près la place du point d'inflexion, quand il se trouve compris dans la période observée. Mais pour qu'on puisse affirmer qu'ils appartiennent effectivement à une courbe de cette espèce, il faut employer un autre critère tiré de l'équation différentielle de la logistique. Si l'on prend $\Delta t = 1$, et qu'on remplace les différentielles par les différences finies, on aura, à peu près,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\Delta p &= mp - np^2, \\ \mathrm{M}\Delta^2 p &= m\Delta p - 2np\Delta p, \end{aligned}$$

et, par suite

$$\frac{n}{\mathrm{M}} = \frac{\Delta p^2 - p\Delta^2 p}{p^2 \Delta p} = \frac{\Delta p}{p^2} - \frac{\Delta^2 p}{p\Delta p};$$

différence qui devra se trouver sensiblement constante.

Prenons pour exemple la logistique donnée par l'équation

$$t + i = \frac{1}{m} \log. \left\{ \frac{p}{\frac{m}{n} - p} \right\},$$

en supposant

$$\frac{m}{n} = 90.888, \quad m = 0.0502125, \quad n = 0.000552464, \quad i = -6.47846:$$

Ayant formé le tableau ci-dessous

$t.$	$p.$	$\Delta p.$	$\Delta^2 p.$	$\frac{\Delta p}{p^2} - \frac{\Delta^2 p}{p\Delta p}.$
0	29.178	2.337	0.084	0.0015131
1	31.515	2.421	0.070	0.0015201
2	33.936	2.491	0.059	0.0014651
3	36.427	2.550	0.043	0.0014588
4	38.977	2.593	0.024	0.0014694
5	41.570	2.617		
6	44.187			

on reconnaît que les nombres de la dernière colonne, diffèrent assez peu entre eux pour qu'on les regarde comme constants. Mais ils s'écartent davantage de la vraie valeur de $\frac{n}{\mathrm{M}}$, qui est 0.0012721, le module M ayant pour valeur 0.4342944819.

§ 11. On a observé qu'à la suite d'une grande révolution sociale, d'une guerre d'invasion ou d'une épidémie, la population, dont les progrès ont été un instant ralentis par le fléau, croît avec une nouvelle rapidité, et même suivant une progression plus que géométrique: par là, le niveau des subsistances ne tarde pas à se trouver atteint, et la gêne à se faire sentir comme auparavant. Il peut être utile, dans les applications, d'avoir une formule pour représenter cette marche anomale de la population, qui offre d'ailleurs un caractère analytique aisé à saisir : c'est que *le carré de la population médiane est moindre que le produit des populations extrêmes* [1]. Si l'on compte le temps à partir de la cessation du fléau, et que l'on désigne par Π_0 la population à cette époque, l'équation (2) du § 4 devra être remplacée par la suivante

$$\mathrm{M}\frac{dp}{pdt} = l + n(p - \Pi_0):$$

faisant $l - n\Pi_0 = m$, il viendra l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{M}dp}{pdt} = m + np,$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{1}{m}\log.\left[\frac{p\ (m + n\Pi_0)}{\Pi_0(m + np\ )}\right]. \qquad (7)$$

Désignant par Π_1 et Π_2 les populations correspondantes aux temps t_1 et $t_2 = 2t_1$, on aura

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{m}\log.\left\{\frac{\Pi_1\left(\frac{m}{n}+\Pi_0\right)}{\Pi_0\left(\frac{m}{n}+\Pi_1\right)}\right\} \\ t_2 &= \frac{1}{m}\log.\left\{\frac{\Pi_2\left(\frac{m}{n}+\Pi_0\right)}{\Pi_0\left(\frac{m}{n}+\Pi_2\right)}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

[1] Il lui est égal dans le cas de la progression géométrique, et inférieur quand la progression est moins rapide. Les populations que nous appelons ici *médiane* et *extrêmes*, sont celles que nous avons dénotées par p_1, et p_0, p_2, au § 8.

et, à cause de $t_2 = 2t_1$,

$$\frac{\Pi_1^2\left(\frac{m}{n}+\Pi_0\right)^2}{\Pi_0^2\left(\frac{m}{n}+\Pi_1\right)^2}=\frac{\Pi_2\left(\frac{m}{n}+\Pi_0\right)}{\Pi_0\left(\frac{m}{n}+\Pi_2\right)};$$

d'où

$$\frac{m}{n}=\frac{\Pi_1\left(\Pi_0\,\Pi_1+\Pi_1\,\Pi_2-2\,\Pi_0\,\Pi_2\right)}{\Pi_1\,\Pi_2-\Pi_1^2}.$$

Cette valeur serait négative, si l'on avait

$$\frac{\Pi_0+\Pi_2}{2}<\frac{\Pi_0\Pi_2}{\Pi_1},$$

et, comme n est positif par hypothèse, il s'ensuit que m serait négatif, c'est-à-dire que l'on aurait

$$n\Pi_0 > l;$$

conséquence qui, du reste, n'a rien d'inadmissible.

Connaissant m au moyen d'une des deux équations (8), l'équation (7) donnera la valeur de p, qui sera

$$p=\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{z-1},$$

en dénotant par z une variable auxiliaire, déterminée par l'équation

$$\frac{m}{n}+\Pi_0=z\,\Pi_0\,10^{mt}.$$

§ 12. Jusqu'à présent nous avons supposé que la fonction retardatrice désignée par $f(p)$ au § 6, était simplement la fonction linéaire $n(p-b)$; mais le nombre des années d'observation est trop petit, pour qu'on puisse juger de l'accord de cette hypothèse avec la loi de la nature. La fonction dont il s'agit étant soumise à deux conditions seulement, de croître indéfiniment avec la population, et de s'évanouir pour $p=b$, on pourrait essayer d'autres fonctions, en commençant par les plus simples, si l'insuffisance de la fonction linéaire venait à être reconnue. Mais nous verrons bientôt que le problème offre alors de grandes difficultés analytiques, même quand l'intégration de l'équation différentielle, qui sert de point de départ, peut s'effectuer sous forme finie.

Supposons, par exemple, que les obstacles aux progrès de la population, soient proportionnels au carré de la population surabondante $p-b$ [1]. L'équation (2) du § 4 devra être remplacée par la suivante

$$\mathrm{M}\frac{dp}{dt}=l-n(p-b)^2,$$

qu'il convient de transformer avant l'intégration, afin d'obtenir une formule plus régulière.

Si l'on pose $\frac{dp}{dt}=0$, et que l'on désigne par P la valeur de p correspondante à cette hypothèse, valeur qui sera celle de la population *maximum*, on aura

$$\mathrm{P}=b+\sqrt{\frac{n}{l}};$$

d'où

$$l=n\,(\mathrm{P}-b)^2,$$

et

$$\frac{\mathrm{M}}{n}\cdot\frac{dp}{pdt}=(\mathrm{P}-b)^2-(p-b)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

L'intégrale de cette équation différentielle est

$$n\,(t+a)=\frac{1}{2\mathrm{P}\,(\mathrm{P}-b)}\log.\left(\frac{\mathrm{P}-b}{\mathrm{P}-p}\right)+\frac{1}{2\,(\mathrm{P}-b)\,(\mathrm{P}-2b)}\log.\left(\frac{\mathrm{P}-b}{\mathrm{P}+p-2b}\right)-\frac{1}{\mathrm{P}\,(\mathrm{P}-2b)}\log.\left(\frac{b}{p}\right),$$

a dénotant une constante, déterminée par la condition que pour $p=b$, on a $t=0$. Ainsi, la nouvelle courbe de la population, conte-

[1] L'expression de *population surabondante*, est prise ici dans une acception plus étendue que dans le langage ordinaire de l'économie politique.

nant quatre constantes indéterminées, dans son équation, on pourra la faire passer par quatre points m_0, m_1, m_2, m_3. Désignons par 0, t_1, t_2, t_3, les abscisses de ces points ; par p_0, p_1, p_2, p_3, les ordonnées correspondantes, et posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} A &= 2P(P-b), \\ B &= 2(P-b)(P-2b), \\ C &= P(P-2b), \end{aligned}$$

on aura les équations

$$\begin{aligned} na &= \frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-b}{P-p_0}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P-b}{P+p_0-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{b}{p}\right), \\ n(t_1+a) &= \frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-b}{P-p_1}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P-b}{P+p_1-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{b}{p_1}\right), \\ n(t_2+a) &= \frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-b}{P-p_2}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P-b}{P+p_2-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{b}{p_2}\right), \\ n(t_3+a) &= \frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-b}{P-p_3}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P-b}{P+p_3-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{b}{p_3}\right), \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément, par l'élimination de na et de n,

$$\frac{t_2-t_1}{t_1} = \frac{\frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-p_1}{P-p_2}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P+p_1-2b}{P+p_2-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-p_0}{P-p_1}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P+p_0-2b}{P+p_1-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{p_0}{p_1}\right)},$$

$$\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1} = \frac{\frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-p_2}{P-p_3}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P+p_2-2b}{P+p_3-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{p_2}{p_3}\right)}{\frac{1}{A}\log.\left(\frac{P-p_1}{P-p_2}\right) + \frac{1}{B}\log.\left(\frac{P+p_1-2b}{P+p_2-2b}\right) - \frac{1}{C}\log.\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}.$$

Ces deux équations, transcendantes en P et en b, ne peuvent être résolues que par des tâtonnements multipliés, pour lesquels il n'existe aucune théorie. A défaut d'une meilleure, nous proposerons la méthode suivante :

§ 13. Soient, en général,

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0,$$

deux équations, à deux inconnues. Si l'on substitue à x un nombre arbitraire α, elles deviennent

$$\varphi(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10), \quad \psi(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Désignons par $\beta = \Phi(\alpha), \gamma = \Psi(\alpha)$, les valeurs de y déduites respectivement des équations (10) et (11) : si $\beta = \gamma$, les proposées auront une solution représentée par $x = \alpha$, $y = \beta$.

Supposons que l'on trouve $\gamma < \beta$: on substituera au lieu de x un autre nombre $\alpha' > \alpha$, qui fournira les équations

$$\beta' = \Phi(\alpha'), \gamma' = \Psi(\alpha'),$$

et nous supposerons $\gamma' < \beta'$. Si la différence $\beta' - \gamma'$ est moindre que $\beta - \gamma$, nous ferons $x = \alpha''$, α'' étant plus grand que α', et nous obtiendrons

$$\beta'' = \Phi(\alpha''), \gamma'' = \Psi(\alpha'');$$

si nous trouvons encore $\gamma'' < \beta''$ et $\beta'' - \gamma'' < \beta' - \gamma'$, nous ferons une nouvelle substitution $x = \alpha'''$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, pour une certaine valeur $x = \alpha^{(n)}$, nous trouvions $\beta^{(n)} = \Phi(\alpha^{(n)})$, $\gamma^{(n)} = \Psi(\alpha^{(n)})$, $\gamma^{(n)} > \beta^{(n)}$: il est évident qu'alors la valeur de x sera comprise entre $\alpha^{(n-1)}$ et $\alpha^{(n)}$, et celle de y entre $\beta^{(n-1)}$ et $\beta^{(n)}$. Nous n'avons pas besoin de dire que si, au lieu de $\beta' - \gamma' < \beta - \gamma$, on avait trouvé le contraire, les nombres substitués à la place de x, auraient dû suivre une progression décroissante.

Nous n'entrerons dans aucune discussion sur la grandeur des intervalles entre les nombres substitués, sur la multiplicité des valeurs de y fournies par les équations (10) et (11), etc.; car il serait impossible d'embrasser tous les cas qui peuvent se présenter, puisque les fonctions φ et ψ sont quelconques.

Ce qui précède semble exiger que l'on résolve rigoureusement les équations (10) et (11); mais cette résolution n'est pas indispensable, et il suffit d'assigner deux limites entre lesquelles l'inconnue se trouve comprise dans chaque équation : or, ces limites peuvent être déterminées de la même manière que la partie entière des racines incommensurables, dans la théorie des équations numériques. Supposons, par exemple, qu'en faisant $\alpha = 2$, on ait trouvé

$$\beta \begin{cases} > 5 \\ < 6 \end{cases}, \quad \gamma \begin{cases} > 10 \\ < 11, \end{cases}$$

et pour $\alpha = 3$

$$\beta \begin{cases} > 15 \\ < 16 \end{cases}, \quad \gamma \begin{cases} > 12 \\ < 13, \end{cases}$$

on en conclura que x est compris entre 2 et 3, et y entre 10 et 13. En partageant ensuite l'intervalle entre 2 et 3, en un nombre suffisant de parties, il sera facile de déterminer les valeurs des inconnues à moins d'un dixième près.

Soient maintenant a et b les valeurs approchées de x et de y, h et k les corrections qu'il faut leur faire subir : si l'on pose

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dx} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \varphi_2(x, y),$$
$$\frac{d\psi(x, y)}{dx} = \psi_1(x, y), \quad \frac{d\psi(x, y)}{dy} = \psi_2(x, y),$$

on aura, aux termes près en h^2 et en k^2,

$$\varphi_1(a, b)\,h + \varphi_2(a, b)\,k = -\varphi(a, b),$$
$$\psi_1(a, b)\,h + \psi_2(a, b)\,k = -\psi(a, b);$$

d'où l'on déduira

$$h = \frac{\psi(a, b)\,\varphi_2(a, b) - \varphi(a, b)\,\psi_2(a, b)}{\varphi_1(a, b)\,\psi_2(a, b) - \psi_1(a, b)\,\varphi_2(a, b)},$$
$$k = \frac{\psi(a, b)\,\varphi_1(a, b) - \varphi(a, b)\,\psi_1(a, b)}{\varphi_2(a, b)\,\psi_1(a, b) - \psi_2(a, b)\,\varphi_1(a, b)}.$$

Arrivé à ce point, le calcul se continuera comme dans la méthode de Newton pour la résolution des équations à une inconnue, méthode dont celle-ci n'est qu'une extension.

§ 14. Après les fonctions $n\,(p-b)$, $n\,(p-b)^2$, on pourrait essayer la fonction $n\sqrt{p-b}$; ce qui donnerait

$$\mathrm{M}\frac{dp}{dt} = l - n\sqrt{p-b},$$

et

$$P = b + \frac{l^2}{n^2},$$

en désignant par P la population *maximum*. On aurait donc à intégrer l'équation

$$\frac{M}{n} \cdot \frac{dp}{pdt} = \sqrt{P - b} - \sqrt{p - b},$$

ou, en posant $P - b = a^2$, $p - b = x^2$,

$$\frac{n}{M}\, dt = \frac{2xdx}{(a - x)(b + x^2)};$$

mais le résultat serait encore plus compliqué que dans l'hypothèse précédente, car l'intégrale cherchée se composerait de deux logarithmes et d'un arc de cercle.

APPLICATIONS.

§ 15. Loi de la population en Belgique. Les éléments des tableaux, qui nous fourniront les données nécessaires à la recherche de la loi de la population en Belgique, ont été puisés dans les ouvrages suivants :

Recherches sur la reproduction et la mortalité de l'homme aux différents âges, et sur la population de la Belgique, par MM. A. Quetelet et Ed. Smits, 1832.

Bulletin de la commission centrale de statistique, tome 1er, 1843.

Annuaire de l'observatoire de Bruxelles, pour 1844.

On peut donc les considérer comme officiels. Mais, pour les approprier à notre objet, nous avons dû leur faire subir diverses préparations et corrections, que nous allons faire connaître.

D'abord, les ouvrages précités nous ont fourni, sans aucune hypothèse, et au moyen de simples additions et soustractions, le tableau ci-après :

ÉTAT GÉNÉRAL

Des naissances et décès en Belgique, depuis le 1er janvier 1803, jusqu'au 31 décembre 1842.

ANNÉES.	Pour le LIMB. ET LE LUXEMB. ENTIERS.		Pour le RESTE DE LA BELGIQUE.		Observations.
	NAISSANCES.	DÉCÈS.	NAISSANCES.	DÉCÈS.	
1803. . . . à 1812. . . .	185206	142085	938015	735720	Les mort-nés se trouvent compris dans les décès, sans l'être dans les naissances, même pour 1841 et 1842.
1813. . . .	»	»	»	»	
1814. . . .	»	»	»	»	
1815. . . . à 1824. . . .	194027	129249	1038182	728627	
1825. . . .	20636	13408	114544	74992	
1826. . . .	21089	14017	115393	78004	
1827. . . .	20995	13596	107633	75709	
1828. . . .	20841	13937	114481	74011	
1829. . . .	21482	15864	114084	86489	
1830. . . .	»	»	»	»	
1831. . . .	19894	14678	115156	83411	
1832. . . .	20269	15347	108801	99563	
1833. . . .	21731	14685	116061	96617	
1834. . . .	21726	16096	118036	100477	
1835. . . .	22314	14675	120613	86468	
1836. . . .	22300	15019	121914	86214	
1837. . . .	21035	18585	121679	99557	
1838. . . .	22371	15151	129799	94779	
	Pour le Limb. et le Luxemb. belges seulement.				
1839. . . .	10796	8512	125226	97136	
1840. . . .	11153	8041	126989	95861	
1841. . . .	11283	8023	126852	94617	
1842. . . .	11288	9138	123739	99404	

Nous ferons observer, à l'égard de ce tableau :

1° Qu'avant 1815, le territoire de la Belgique ne comprenait ni le Duché de Bouillon, ni l'arrondissement de Philippeville; ce qui fait que la période décennale 1803—1812, n'est pas exactement comparable à celles qui la suivent. D'ailleurs, cette période, très-malheureuse pour la Belgique, comme l'atteste le grand nombre des décès, doit être considérée comme tout exceptionnelle, à cause des guerres de l'Empire.

2° De 1830 à 1838, les villes de Maestricht et de Luxembourg sont demeurées au pouvoir des Hollandais; de manière que les naissances et les décès qui y ont eu lieu, ne sont pas compris dans le tableau. Mais on peut regarder cette omission comme insensible, attendu la faible population de ces deux villes, qui, avant 1830, ne s'élevait qu'à 22000 âmes pour Maestricht (avec la commune de St-Pierre) et à 11000 pour Luxembourg. Au reste, nous n'avons besoin que de l'excédant des naissances sur les décès : négliger cet excédant, c'est regarder la population comme stationnaire dans ces deux villes; ce qui a dû être bien près de la vérité, pendant la période de transition qui a précédé le traité de paix.

3° Les naissances et décès pendant la période décennale 1815-1824, n'étant donnés que d'une manière collective, ils nous inspirent moins de confiance que ceux des périodes suivantes, qui sont rapportés d'année en année, et qui, pour la plupart, ont servi de base aux recherches statistiques de M. Quetelet.

§ 16. Par le traité des 24 articles, la Belgique a perdu la moitié du territoire des deux provinces de Limbourg et de Luxembourg. Or, le tableau précédent mentionne les naissances et décès pour le Limbourg et le Luxembourg entiers, jusqu'en 1838. Quelle est donc la partie de ces chiffres, qui appartient au Limbourg et au Luxembourg belges? Pour répondre à cette question, nous avons dû recourir à des hypothèses, dont le lecteur appréciera la probabilité. Nous avons commencé par poser la proportion :

Le total des naissances dans la Belgique, réduite à sept provinces, *pendant les quatre années* 1835-1838, *est au total des naissances dans les mêmes provinces, pendant les quatre années* 1839-1842, *comme le total des naissances pour le Limbourg et le Luxembourg, pendant la première période, est à* x; x *désignant le total des naissances dans ces deux provinces pendant la seconde période.* Cette proportion, traduite en chiffres, nous a donné

$$494005 : 502806 : : 88020 : x;$$

d'où

$$x = 89588.$$

Or, le total des naissances observées dans le Limbourg et le Luxembourg belges, pendant les années 1839-1842, s'élève à 44,520. Comparant ce nombre à celui que nous venons de trouver pour le Limbourg et le Luxembourg entiers, pendant la même période, nous avons considéré leur rapport $\frac{44520}{89588}$, comme celui des naissances, dans la partie belge, aux naissances dans la totalité des deux provinces, pour chacune des années précédentes. Ainsi, par exemple, nous avons adopté pour le total des naissances dans le Limbourg et le Luxembourg belges, pendant la période décennale 1803-1812, le nombre

$$183206 \times \frac{44520}{89588} = 91040.$$

Un calcul analogue, opéré sur les décès, nous a donné pour multiplicateur commun, la fraction $\frac{33314}{66886}$: nous en avons fait usage pour former le tableau suivant :

ÉTAT

Des naissances et décès dans le Limbourg et le Luxembourg belges, depuis le 1er janvier 1803, jusqu'au 31 décembre 1842.

ANNÉES.	NAISSANCES.	DÉCÈS.	ANNÉES.	NAISSANCES.	DÉCÈS.
1803 .... à 1812	91040	71193	1830	»	»
			1831	9886	7354
			1832	10072	7690
1813	»	»	1833	10799	7358
1814	»	»	1834	10796	8065
1815 .... à 1824	96420	64762	1835	11089	7353
			1836	11082	7525
			1837	10453	9312
1825	10255	6718	1838	11117	7591
1826	10480	7023	1839	10796	8312
1827	10453	6812	1840	11153	8041
1828	10357	6988	1841	11283	8023
1829	10675	8000	1842	11288	9138

En réunissant les deux tableaux qui précèdent, rien ne paraît plus facile que de trouver l'accroissement de la population, pour la Belgique réduite à son territoire actuel. Mais c'est ici le lieu de faire observer, qu'avant 1841, les mort-nés étaient compris dans les décès sans l'être dans les naissances. Pour évaluer l'importance de cette source d'erreurs, nous remarquerons qu'on a déclaré

En 1841.	5,532	mort-nés.
En 1842.	5,474	
Somme.	11,006	

Une seconde cause d'exagération dans le nombre des décès, a été découverte par M. X. Heuschling, secrétaire de la commission centrale de statistique. Elle provient de ce qu'aux termes de l'article 80 du Code civil, une expédition de l'acte de décès de tout individu étranger à la commune où il est mort, est adressée au bourgmestre du domicile du défunt, pour être transcrite sur les registres de l'état civil. Ainsi, un même décès se trouve inscrit dans deux communes différentes. D'après les documents officiels les plus exacts, le chiffre de ces doubles emplois s'est élevé à 2,006 en 1843. Si l'on admet qu'il ait été le même pendant les années 1841 et 1842, on aura pour ces deux années,

Erreur provenant	des mort-nés	11,006
	des doubles emplois.	4,012
	Somme.	15,018
Nombre total des décès		211,182
	Différence	196,164

C'est donc par la fraction $\frac{196164}{211182}$ qu'il faudra multiplier les décès, pour opérer la double correction qui vient d'être indiquée. Ce calcul fait, après l'addition des décès du Limbourg et du Luxembourg, nous a permis enfin de dresser le tableau suivant :

ÉTAT GÉNÉRAL

Des naissances et décès dans le royaume de Belgique, réduit à ses limites actuelles, depuis le 1er janvier 1803, jusqu'au 31 décembre 1842.

ANNÉES.	NAISSANCES.	DÉCÈS.	ACCROISSEMENT de la POPULATION.
1803 à 1812	1029055	749560	279495
1813	»	»	»
1814	»	»	»
1815 à 1824	1134602	737000	397602
1825	124799	75903	48896
1826	124073	78984	45089
1827	118178	76639	41439
1828	125091	75242	49849
1829	124759	87774	36985
1830	»	»	»
1831	125042	84314	40728
1832	118873	99630	19243
1833	126860	96586	30274
1834	128832	100826	28006
1835	131702	87153	44549
1836	132996	87077	45919
1837	132132	101133	30999
1838	140916	95095	45821
1839	136022	97954	38068
1840	138142	96518	41624
1841	138133	95343	42790
1842	135027	100826	34201

§ 17. L'année 1830 présente une lacune, que nous comblerons en supposant que les nombres qui correspondent à cette année, ont tenu le milieu entre ceux des années 1829 et 1831 ; ce qui donne pour résultat :

ANNÉE.	NAISSANCES.	DÉCÈS.	ACCROISS. de la population.
1830.	124900	86044	38856

Le tableau du mouvement de l'état civil en 1843, nous apprend que le nombre des naissances s'est élevé cette année à 132,910 et celui des décès à 97,055 : la population s'est donc accrue de 35,855 âmes. Il n'y a point de correction à faire, parce qu'on a tenu compte des mort-nés et des doubles emplois.

Si l'on admet maintenant comme probable, l'hypothèse que l'accroissement de la population en 1844, ne se soit guère écarté de la moyenne des trois années précédentes, c'est-à-dire du nombre 37,615, il suffira d'avoir le chiffre de la population, fourni par un bon recensement, pour en conclure les données que nous avons dénotées par p_0, p_1 et p_2 au § 8, les années qui répondent à ces populations, étant respectivement 1815, 1830 et 1845 [1].

On est généralement d'accord, que les recensements donnent toujours un chiffre fort au-dessous du chiffre réel de la population. Cette différence provient surtout de l'intérêt qu'ont les communes, à contribuer pour le moindre contingent possible, dans la levée de la milice. D'après le nombre des miliciens que fournit la Belgique, la population

[1] Nous laissons de côté la période 1805-1814, pour les raisons données plus haut. Nous admettons aussi implicitement :

1° Que les émigrations ont été compensées par des immigrations sensiblement équivalentes.

2° Que la perturbation produite par le choléra en 1832, a été compensée les années suivantes, soit par une diminution dans les décès, soit par une augmentation dans les naissances, soit par les deux causes réunies.

de ce royaume, au 1er janvier 1841, devait s'élever à 4,650,400 [1], nombre qui surpasse de *plus d'un dixième* celui de 4,165,114, conclu du dernier recensement. En prenant donc le premier chiffre pour base de nos calculs, nous aurons une évaluation que l'on ne pourra pas regarder comme exagérée, car si le nombre des miliciens déclarés manquait d'exactitude, c'est plutôt par défaut qu'il pécherait que par excès.

RÉSUMÉ.

Population au 1er janvier 1815	3,627,253
Accroissement pendant la période 1815-1829.	619,860
Population au 1er janvier 1830	4,247,113
Accroissement pendant la période 1830-1844.	553,748
Population au 1er janvier 1845	4,800,861

§ 18. Quelque peu exacts que puissent paraître les chiffres précédents, par suite de toutes les causes d'erreur que nous avons mentionnées, ils s'éloignent vraisemblablement beaucoup moins de la vérité, qu'aucun de ceux que l'on a recueillis ailleurs. Et, pour ne parler que des pays dont les lois et les institutions nous sont le mieux connues, nous dirons qu'en Angleterre, on compte les naissances par les baptêmes administrés par l'église anglicane; de manière que les enfants des dissidents ne sont point portés sur les registres officiels. Beaucoup d'enfants meurent avant le baptême; d'autres ne sont point baptisés, par suite de l'insouciance ou de la négligence de leurs parents, etc. En France même, où l'état civil a tellement fixé l'attention du législateur qu'il lui a donné une sanction dans la loi pénale, le bureau des longitudes a publié des tableaux statistiques, pour lesquels il a été fait usage de documents, qui ont été reconnus entièrement fictifs. Cet abus a fait l'objet des réclamations de M. De Montferrand à l'académie des sciences, et il nous a été confirmé par MM. Quetelet et Bouvard.

[1] *Mémoire sur la répartition du contingent des communes dans la levée de la milice*, par A. Quetelet (BULLETIN DE LA COMMISSION CENTRALE DE STATISTIQUE, tome Ier).

§ 19. Pour appliquer à la Belgique les formules du § 8, nous avons posé

$$p_0 = 3.627253,$$
$$p_1 = 4.247113,$$
$$p_2 = 4.800861,$$
$$u = p_1 - p_0 = 0.619860,$$
$$v = p_2 - p_1 = 0.553748,$$
$$w = \frac{uv}{p_1} = 0.080876;$$

ce qui nous a donné

$$\frac{m}{n} = 6.5837,$$

et, en observant que $t_1 = 1.5$,

$$m = 0.113785,$$
$$i = 0.78060.$$

Ainsi, les formules de la population pour la Belgique, sont

$$\log.z = 0.113785\,(t + 0.78060)$$
$$p = 6.5837\,\frac{z}{1+z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ces résultats numériques nous apprennent que, si les lois et les mœurs de la Belgique n'éprouvaient aucun changement notable, *la population de ce royaume, bien que toujours croissante, ne s'élèverait jamais à six millions six cent mille âmes.* Dans la même hypothèse appliquée au passé, *c'est à partir des premiers mois de l'année* 1807, *que cette population aurait commencé à croître dans une progression moins rapide que la progression arithmétique.* Quant à l'époque où elle a cessé de croître en progression géométrique, il est impossible de l'assigner, puisqu'on ne connaît pas la population normale, et que le coefficient de la fécondité propre aux peuples de la Belgique, nous est également inconnu.

Si l'on fait $t = 3.6$, la formule (12) donne pour chiffre de la population au 1er janvier 1851,

$$p = 4.9976;$$

et comme, d'après l'évaluation de M. Quetelet, ce chiffre était 4.6504 au 1er janvier 1841, *la population devrait s'accroître de* 347,200 *âmes pendant la période* 1841-1850. Or, l'état général des naissances et décès rapporté plus haut, donne pour l'accroissement de la population durant la période précédente (1831-1840), le nombre 365,231 : maintenant, si l'on compare ce dernier au nombre 397,602, qui correspond à la période 1815-1824, la diminution progressive des accroissements décennaux devient évidente.

Enfin, si l'on voulait savoir quel est le chiffre assigné par notre formule, pour la population de la Belgique à la fin du XIXe siècle, il suffira de faire $t = 8.6$, et l'on trouvera pour réponse 6.0643, c'est-à-dire *un peu plus de six millions d'âmes*.

§ 20. Loi de la population en France. L'*Annuaire du bureau des longitudes pour* 1844, offre le résumé du mouvement de la population en France, pendant la période 1817-1841. Nous en avons déduit le tableau ci-dessous :

ANNÉES.	ACCROISS. de la population.	ANNÉES.	ACCROISS. de la population.	ANNÉES.	ACCROISS. de la population.
1817	195902	1822	198634	1827	189071
1818	161948	1823	221286	1828	139402
1819	199863	1824	220546	1829	161074
1820	188227	1825	175974	1830	157994
1821	212144	1826	157533	1831	183948
Total. . . .	958084	Total	973973	Total. . . .	931489

ANNÉES.	ACCROISS. de la population.	ANNÉES.	ACCROISS. de la population.
1832	4453	1837	64648
1833	157435	1838	115277
1834	68662	1839	177140
1835	177420	1840	135832
1836	208120	1841	172167
Total. . . .	616090	Total. . . .	665064

Avant de faire servir ces nombres à la recherche de la loi de la population, il conviendra de tenir compte des effets du choléra, la perturbation produite par ce fléau, ayant été beaucoup plus forte en France qu'en Belgique. Pour qu'elle influe le moins possible sur les éléments de la courbe que nous allons calculer, nous substituerons au nombre 4,453, excédant des naissances sur les décès en 1832, le nombre 170,691, moyen entre celui des années 1831 et 1833. Par là, le total 616,090 de la période 1832-1836, se trouve remplacé par 782,328.

De même qu'en Belgique, les mort-nés étaient compris dans les décès, sans l'être dans les naissances, avant 1839. Or, les annuaires du bureau des longitudes nous apprennent qu'il y a eu :

En 1839.	27,490	mort-nés,
1840.	29,278	
1841.	28,274.	

Comme ce dernier nombre tient à peu près le milieu entre les deux autres, nous ajouterons son double à l'accroissement de la population pendant la dernière période quinquennale, et son quintuple à l'accroissement pendant chacune des quatre autres périodes. Cette correction nous paraît suffisante, attendu que le nombre annuel des décès n'a guère varié de 1817 à 1841 [1]. Nous pensons d'ailleurs qu'une plus grande précision serait illusoire, dans l'ignorance où l'on se trouve du véritable chiffre de la population française, chiffre pour lequel nous sommes obligé de prendre celui du dernier recensement.

En conséquence de ces remarques, nous adopterons les chiffres suivants, pour les accroissements quinquennaux de la population :

1817-1821.	1822-1826.	1827-1831.	1832-1836.	1837-1841.
1,099,454	1,115,343	1,072,859	923,698	721,612

[1] Les doubles emplois dans les déclarations de décès, mentionnés au § 16, n'auraient-ils pas lieu en France, comme autrefois en Belgique?

et, pour plus de simplicité, nous arrondirons ces nombres, en les remplaçant par ceux-ci :

1,099,000, 1,115,000, 1,073,000, 924,000, 722,000.

Le recensement de 1841 ayant donné pour chiffre de la population 34,230,000 âmes, nous y ajouterons 172,000, pour l'accroissement de la population en 1841; ce qui portera la population de la France à 34,402,000 âmes, au 1er janvier 1842. D'après cette base, nous avons formé le tableau suivant :

ANNÉES.	POPULATION.
1817	29,469,000
	1,099,000
1822	30,568,000
	1,115,000
1827	31,683,000
	1,073,000
1832	32,756,000
	924,000
1837	33,680,000
	722,000
1842	34,402,000

§ 21. Remarquons, d'abord, que l'accroissement de la population de 1817 à 1822, est plus faible qu'il ne devrait l'être, d'après ceux des périodes suivantes; mais nous verrons bientôt que cette anomalie ne se serait pas présentée, si nous avions groupé nos chiffres d'une autre manière.

Si nous faisons passer une logistique par les points 1822, 1827, 1832 [1]; une seconde par 1827, 1832, 1837; une troisième par 1832,

[1] Nous avons cru pouvoir employer cette manière abrégée de désigner les points de la courbe par les années qui leur correspondent.

1837, 1842; la première donnera, pour valeur de la population-limite,

$$\frac{m}{n} = 46.711;$$

la seconde

$$\frac{m}{n} = 38.271;$$

la troisième

$$\frac{m}{n} = 36,746.$$

Or, ces nombres diffèrent trop entre eux, pour qu'on puisse les considérer comme appartenants à une même logistique. Il faut donc chercher si une autre manière de grouper les chiffres, ne donnerait pas des résultats plus concordants.

En opérant la même correction que précédemment, pour le choléra et les mort-nés, on pourra diviser la période 1818-1841, en quatre groupes de six années, comme ci-dessous :

ANNÉES.	ACCROISS. de la population.	ANNÉES.	ACCROISS. de la population.	ANNÉES.	ACCROISS. de la population.	ANNÉES.	ACCROISS. de la population.
1818 . .	161948	1824 . .	220546	1830 . .	157944	1836 . .	208120
1819 . .	199863	1825 . .	175974	1831 . .	183948	1837 . .	64648
1820 . .	188227	1826 . .	157533	1832 . .	170691	1838 . .	115277
1821 . .	212144	1827 . .	189071	1833 . .	157453	1839 . .	177140
1822 . .	198634	1828 . .	139402	1834 . .	68662	1840 . .	135832
1823 . .	221286	1829 . .	161074	1835 . .	177420	1841 . .	172167
Mort-nés	169644	Mort-nés	169644	Mort-nés	169644	Mort-nés	84822
TOTAL . .	1331746	TOTAL . .	1213244	TOTAL . .	1085744	TOTAL . .	958006

d'où l'on conclura

ANNÉES.	POPULATION.
1818	29,793,000
	1,352,000
1824	31,145,000
	1,213,000
1830	32,358,000
	1,086,000
1836	33,444,000
	958,000
1842	34,402,000

En faisant servir ces données à la détermination de trois nouvelles logistiques, qui passent respectivement par les points 1818, 1824, 1830; 1824, 1830, 1836; 1830, 1836, 1842, on trouve pour éléments de la première

$$\frac{m}{n} = 39{,}311, \; m = 0.143, \; i = 3.465;$$

pour éléments de la seconde

$$\frac{m}{n} = 39.763, \; m = 0.136, \; i = 3.509;$$

et pour éléments de la troisième

$$\frac{m}{n} = 39.982, \; m = 0.138, \; i = 3.338.$$

L'accord de ces éléments permet de prendre leurs valeurs moyennes, qui sont

$$\frac{m}{n} = 39.685, \; m = 0.139, \; i = 3.437.$$

Ainsi, la loi de la population en France, sera exprimée par la formule

$$0.159\ (t + 5.437) = \log.\left(\frac{p}{39.685 - p}\right).$$

On arrive à peu près au même résultat, à l'aide d'une seule logistique menée par les points 1818, 1830 et 1842, les éléments de cette courbe étant

$$\frac{m}{n} = 40.035,\ m = 0.134,\ i = 3.455.$$

Si l'on en fait usage pour calculer la population de 1824 et celle de 1836, on trouve pour la première 31.142, au lieu du chiffre 31.145 donné par l'observation, tandis que le chiffre de la seconde est parfaitement exact. On peut donc substituer, si l'on veut, la dernière courbe à la logistique moyenne, leurs différences étant d'un ordre moindre que les erreurs que comportent les données : on trouvera, pour lors, que la population de la France doit être de 35,242,000 âmes en 1848, de 35,970,000 en 1854, et de 36,684,000 en 1860. Quant à la population *maximum*, nous venons de voir qu'elle est d'environ *quarante millions* d'âmes.

§ 22. Quand on songe aux calamités que doit nécessairement amener l'exubérance toujours croissante de la population, et à l'insuffisance, bien avérée aujourd'hui, des moyens essayés par les modernes pour y remédier, on ne peut s'empêcher d'être frappé de cette réflexion d'Aristote, à propos de la *République* de Platon : « Peut-être serait-il » d'une bonne politique, de fixer le nombre des enfants plutôt que » celui des propriétés, et de permettre ou de restreindre les naissan- » ces, d'après des calculs basés sur la stérilité ou le nombre des morts. » C'est l'imprévoyance des gouvernements sur un point aussi essen- » tiel, qui peuple aujourd'hui nos cités de tant de misérables; de là, » tant de séditions et de crimes, dont la pauvreté est la mère [1]. » Il

[1] *Politique*, liv. II, ch. 4.

faut que les maux dont il s'agit aient été bien vivement éprouvés par les anciens, pour qu'un de leurs plus illustres moralistes [1], ait osé louer les pauvres d'exposer ou de détruire leurs enfants, dans la crainte de les élever pour l'indigence et la servilité : « car, dit-il, ils ne peu-
» vent supporter l'idée de leur laisser pour héritage la pauvreté,
» qu'ils regardent comme le plus grand des maux, comme une grave
» et cruelle maladie. »

CONCLUSIONS.

§ 23. La loi de la population nous est inconnue, parce qu'on ignore la nature de la fonction qui sert de mesure aux obstacles, tant préventifs que destructifs, qui s'opposent à la multiplication indéfinie de l'espèce humaine.

Cependant, si l'on suppose que ces obstacles croissent *exactement dans la même proportion* que la population surabondante, on obtient la solution complète du problème, sous le point de vue mathématique.

On trouve alors, en faisant usage des documents statistiques publiés par les gouvernements belge et français, que la limite extrême de la population, est de *quarante millions* pour la France, et de *six millions six cent mille* âmes, pour la Belgique.

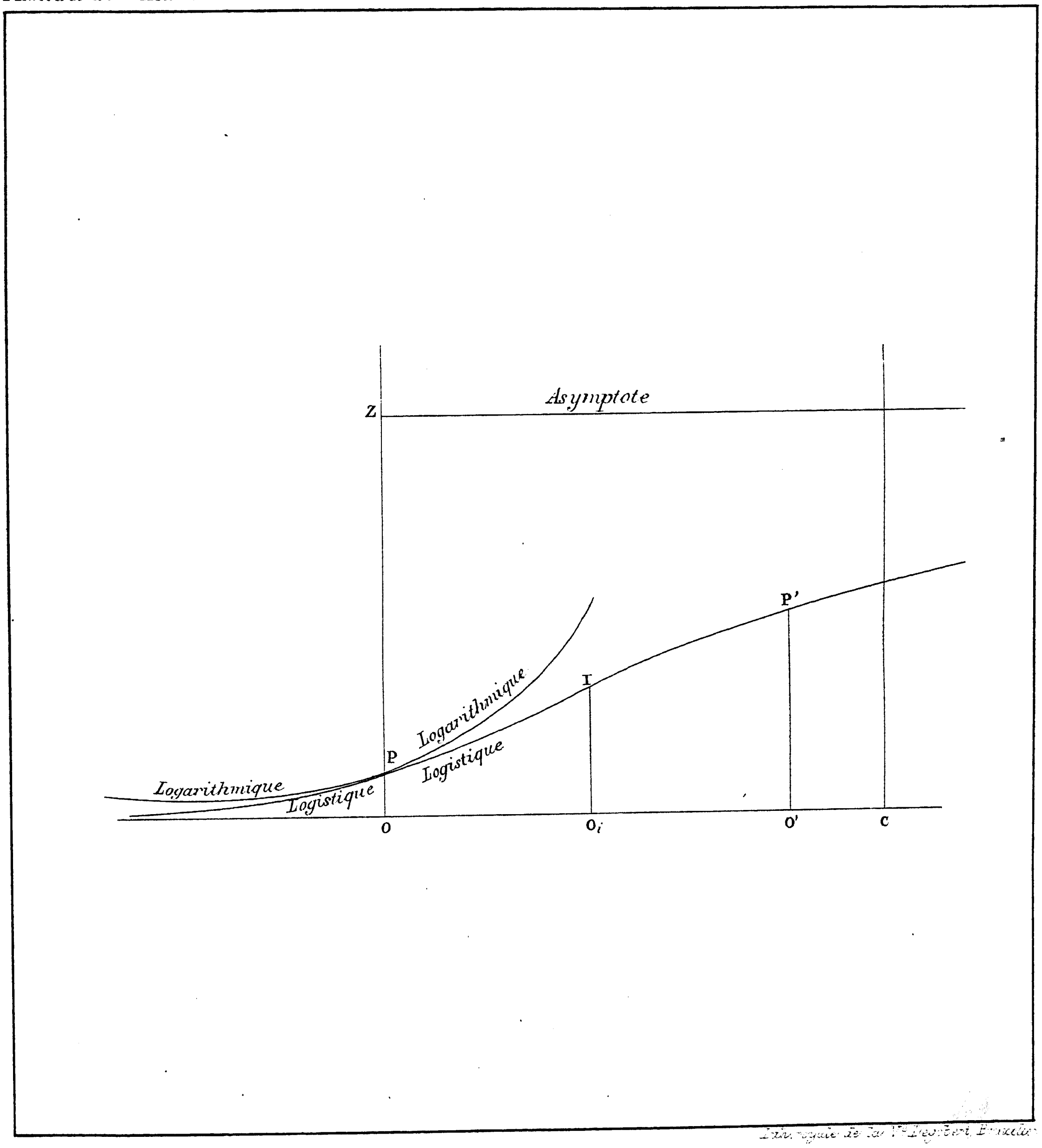
Une longue série d'observations, non interrompues par de grandes catastrophes sociales ou des révolutions du globe, fera probablement découvrir la fonction retardatrice dont il vient d'être fait mention.

[1] PLUTARQUE, *De amore prolis*, V.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.



Lith. royale de la Ve Degobert, Bruxelles

Mémoire sur la population par M. P. Verhulst.