

Bjørn Grøn

Den falske Vermeer

Indholdsfortegnelse

1.	Forord	3
2.	Landsforræder eller kunstfalskner.....	3
3.	Vermeer og den hollandske guldalder.....	5
	a. Nederlandene.....	6
	b. Vermeers verden.....	8
4.	Falsknerens problemer	11
	a. Stilanalyse.....	12
	b. Tekniske analyser	14
5.	Radioaktivitet	15
6.	Falsknerierne bliver afsløret.....	21
7.	Bilag 1. Løsning af differentiallyigninger.....	25
8.	Bilag 2. Opgaver fra afsnit 3 og 4.....	34
9.	Bilag 3. Bredius' artikel fra 1937.....	36
10.	Bilag 4. Anerkendte og forfalskede Vermeer-malerier.....	36
11.	Van Meegerens forfalskede billeder	38
12.	Bilag 5. Litteratur	38

1. Forord

Historien om de falske Vermeer-billeder er først og fremmest en god historie. Og som alle gode historier har den flere lag.

Udgangspunktet for materialet har været spørgsmålet: Hvordan afgør man, om et bestemt maleri er ægte, eller om det er et falskneri? Et tilfredsstillende svar kan kun gives ved både at inddrage en billedanalyse og en teknisk analyse. Det demonstrerede sagen om de falske Vermeer-billeder til fulde, og det har været et af formålene at vise, at nogle af de mest spændende anvendelser af faglig viden findes i grænseområderne, hvor forskellige fag mødes.

Set ud fra en verden opsplittet i fag betyder dette, at materialet egner sig bedst til et tværfagligt samarbejde mellem humanistiske og naturvidenskabelige fag.

Et sådant tværfagligt samarbejde kan yderligere understøttes af en cd-rom, der blev produceret af Mauritshuismuseet i forbindelse med den seneste store Vermeer-udstilling.

Afsnit 3 om Vermeer og den hollandske guldalder er skrevet for at give materialet en helhed og fortælle den gode historie færdig. Afsnittet kan selvsagt ikke træde i stedet for en introduktion til billedanalyse, men forhåbentlig inspirere eleverne. Måske kan det, sammen med afsnittet om stilanalyse, danne udgangspunkt for elevforedrag som oplæg til en mere grundig indføring i billedanalyse.

I bilag 2 findes nogle opgaver, som kunne støtte arbejdet med dette.

Afsnit 5 og 6 forudsætter hos læseren en viden om differentialregning og eksponentialfunktioner, som først erhverves midt i 2.g på matematisk linje. Dette afsnit, evt. sammen med bilag 1, kan derfor læses i 2.g eller evt. i 3.g som et eksempel på matematikkens anvendelse på et lidt usædvanligt område.

Gengivelser af Vermeers billeder kræver farver. Derfor er der bag på side 36 angivet, hvor malerierne kan findes i acceptable reproduktioner, gengivet i tilgængelig litteratur. Sort-hvide gengivelser er kun medtaget for at understøtte teksten og stimulere ønsket om at se noget, der ligger tættere på originalerne.

2. Landsforræder eller kunstfalskner

Kunsthistorien er fuld af historier om falsknerier. En af de mest mærkværdige udspillede sig i Holland i årene før og efter 2. Verdenskrig. Svindelen var måske aldrig blevet afsløret, hvis ikke ophavsmanden selv havde gjort det. Hans navn var Hans van Meegeren, og historien tager sin begyndelse i 1945.

Efter befrielsen af Holland-Belgien dannes et særligt efterretningskorps, der skal opspore og hjembringe de mange uvurderlige kunstværker, som nazisterne havde stjålet og taget med sig til Tyskland. Under efterforskningen støder de på et firma, der aktivt havde medvirket i tyskernes udplyndring af landet. Firmaet havde således formidlet salget af en række nationale klenodier. I dets arkiver finder man navnet på en bankmand, som bl.a. havde solgt et berømt maleri af Vermeer til nazilederen Hermann Göring.

Jan Vermeer, der omtales nærmere i næste afsnit, levede i 1600-tallet og betragtes i dag sammen med Rembrandt og Frans Hals som en af de tre store i den hollandske guldalder. Hans produktion var tilsyneladende ret beskeden, og kun ganske få af hans værker blev præcist dateret af kunstneren selv.

Siden Vermeer blev genopdaget sidst i 1800-tallet, havde man af og til i kunstkrede funderet over, om der ikke skulle gemme sig malerier af ham, stuvet af vejen på lofter eller hos excentriske samlere.

I august 1937 kontakter en kunsthandler Abraham Bredius, der var den tids største Vermeer-ekspert. Han ønsker en vurdering af et gammelt maleri, han er kommet i besiddelse af. Billedet bærer Vermeers karakteristiske signatur. Motivet er religiøst og kan muligvis være et hidtil ukendt tidligt Vermeer-maleri. Bredius er tilsyneladende ikke i tvivl: efter at have undersøgt billedet i nogle få

dage udsteder han en erklæring om billedets ægthed og publicerer allerede få måneder efter en for kunstverdenen sensationel artikel med titlen: »En ny Vermeer: Kristus og disciplene ved Emmaus«. Bredius var som nævnt en mand med stor tyngde i den hollandske kunstverden – han havde selv en stor og enestående privatsamling af malerier fra den hollandske guldalder, bl.a. adskillige af Rembrandt. Billederne var ophængt i hollandske museer og ved Bredius' død i 1946 overgik de som testamentarisk gave til museernes ejendom. Det var ganske utænkeligt, at nogen ville stå frem og modsige ham.

Med Bredius' stempel er ingen i tvivl om, at der vitterligt er tale om et nyt Vermeer-maleri, og i slutningen af 1937 køber Rembrandt-samfundet det nye fund for 520.000 gylden, svarende til næsten 1 mio. kroner – en kolossal sum på den tid (det er før, priserne på de store kunstværker løber helt løbsk). I 1939 dukker et hidtil ukendt maleri af Pieter de Hoogh op, og i årene 1940-43 kommer yderligere fire ukendte Vermeer-malerier og endnu et ukendt de Hoogh-maleri frem af glemslen. Selv om ikke alle disse nye malerier har samme kvalitet, så bliver de købt af private samlere for skyhøje priser. I 1943 køber Rijksmuseum i Amsterdam et sjette Vermeer-maleri for 1,2 mio. gylden.

Det maleri, som efterretningsvæsenet finder registreret i arkivet, har titlen *Kvinde grebet i hor*, og er et af disse nyligt fundne Vermeer-malerier. Hermann Göring købte det af det omtalte firma i 1942. Da bankmanden konfronteres med arkivets nøgne registrering, forsvarer han sig med, at han blot formidlede salget for en tredjeperson. Og den 29. maj 1945 arresteres denne, en vis Hans van Meegeren. Hvem var han?

Van Meegeren ernærede sig som maler og kunsthandler. I sine unge dage havde han demonstreret betydelige håndværksmæssige færdigheder, og nogle af hans billeder fra den periode omkring 1. Verdenskrig var ganske talentfulde. Men han var ikke en stærk kunstnerisk personlighed, tværtimod blev stræben efter succes og rosende omtale ledetråden for hans virke. Han havde forsøgt sig inden for snart sagt alle stilarter, malede efterhånden mest på bestilling, og afsatte ganske pænt. Men hans billeder blev stadigt mere overfladiske, og hans liv identisk med selskabslivet. Efterhånden begyndte kritikerne at betegne hans malerier som tredjerangs og van Meegeren som en maler uden idé og talent. Såret af denne kritik var han flyttet til Sydfrankrig i 1932, og først omkring krigsudbruddet vendte han tilbage til Holland.

Anklagen lyder på landsforræderi, idet van Meegeren åbenbart uden tvang og for egen vindings skyld har solgt ud af nationale klenodier. Men så slår hele sagen en ordentlig kolbøtte.

Den 12. juli forbløffer van Meegeren ikke blot Holland, men hele den internationale kunstverden ved at udsende en erklæring om, at han ikke har solgt ud af nogen nationale værdier, men at han tværtimod har narret tyskerne og ikke mindst Göring til at købe en forfalsket Vermeer. Og ikke nok med det – van Meegeren erklærer, at både *Kvinde grebet i hor*, *Kristus og disciplene ved Emmaus* og fire andre navngivne Vermeer-malerier samt to malerier af Pieter de Hoogh også er forfalskede.¹

Alt i alt påstår van Meegeren, at otte verdensberømte malerier fra den hollandske guldalder i virkeligheden er lavet af ham i årene 1936-42.

Forbløffelsen afløses hurtigt af vantro: Er det ikke blot et snedigt trick fra van Meegerens side for at undgå sin dom? For hvordan i alverden skulle han, en tredjerangsmaler uden talent, kunne skabe så skønne malerier? Her er jo ikke tale om kopier, men om nye originaler, som van Meegeren påstår, han har skabt helt fra grunden.

Det var ikke til at fatte, hvis det skulle være sandt. Derfor holdt mange sig til, at det nok var løgn – ikke mindst de, der havde investeret enorme summer i de angivelige forfalskninger.

Man kan nok undre sig over, hvorfor kunstverdenen ikke havde fået mistanke – for hvor var billederne kommet fra? I afsnittet om Vermeer redegøres for, hvorfor det netop for denne maler ikke forekom helt usandsynligt, at der i gemmer rundt omkring kunne findes hidtil ukendte malerier. Men malerierne måtte vel alligevel kunne spores tilbage?

Van Meegeren havde konstrueret en meget romantisk historie om sine fund: En rig hollandsk familie havde gennem århundreder samlet store kunstskatte på et slot i Westland i det sydvestlige

¹ I bilag 4 er alle de falske malerier nævnt.

Holland. På et tidspunkt flytter familien til Sydfrankrig, hvor van Meegeren lærer dem at kende. Familien har mere end et halvt hundrede sjældne malerier, deriblandt værker af Rembrandt, Holbein, El Greco, Pieter de Hoogh – og Vermeer. Et af de kvindelige familiemedlemmer, der råder over en del af disse billeder, er forelsket i van Meegeren; men deres forhold må ikke blive offentlig kendt. Hun flytter nu til et sted i Italien, og for at sikre sig standsmæssige levestandarder beder hun van Meegeren om at sælge nogle af sine malerier. Sagerne kompliceres yderligere af, at myndighederne i det fascistisk styrede Italien ikke vil tillade, at værdifulde kunstværker sælges ud af landet. Så alt i alt er hans situation, at han ikke kan afsløre hendes identitet. Den historie købte kunstverdenen. Og forlod den ikke gerne.

Men tvivlen var sået. Og den blev bestyrket, da man i hans atelier i Nice fandt yderligere fire malerier: to malet i Vermeers stil, et i Frans Hals' og et i Terborghs stil. Disse malerier var dog ikke signerede, og så vidt det kunne efterforskes ikke forsøgt solgt.

Hvordan kunne spørgsmålet afgøres? Det var jo ikke så enkelt, at enten var alle ægte eller alle falske – måske havde van Meegeren vitterligt forfalsket enkelte.

De fleste af de »nye« Vermeer-malerier blev dateret til hans tidlige produktion, og nogle af disse var i forvejen anset som knap så værdifulde. Men et maleri som *Kristus og disciplene ved Emmaus* kunne van Meegeren umuligt have lavet. Og hvordan skulle han bære sig ad med at få det til at fremtræde med sådanne ægte ældningstegn?

Dette maleri havde været udstillet i Boymansmuseet i Rotterdam siden 1937, men blev under retssagen i 1945 taget ned. Tvivlen var for stor.

Midt under denne strid begynder van Meegeren at male! I fængslet får han staffeli, lærred og pensler, og han påtager sig at male en »ægte« Vermeer for at bevise, at han kan. *Jesus blandt de skriftekloge* er titlen på det nye værk. Det bliver en langsommelig proces, da han også er temmelig syg ind imellem. Men som tiden går, bliver flere og flere overbevist om, at der er noget om mandens påstand.

Det får også konsekvenser for sagen mod ham. Anklagen for landsforræderi trækkes tilbage; men det går ikke, som van Meegeren havde regnet med. I sit eget forsvar havde han nærmest bygget sig op som en sand modstandsmand, der rigtig tog fusen på tyskerne. Den banale version af historien var imidlertid, at han var en svindler, der havde fremstillet falske Vermeer- og de Hoogh-malerier.

Derfor blev anklagen for landsforræderi nu erstattet med en ny anklage for kunstfalskneri. Van Meegeren blev ikke, som han havde ventet, løsladt fra fængslet, og hans reaktion udeblev ikke: Han stoppede alt samarbejde med myndighederne og ophørte med at male. Men nogle oplysninger havde han dog nået at give, f.eks. om hvorledes han havde skabt en kunstig ældningsproces.

I oktober 1947 idømmes han et års fængselsstraf for de syv kunstfalsknerier.

Tilbage var tvivlen – havde manden fortalt sandheden? Og hvis han havde, var det så den fulde sandhed? Mange kunsthistorikere verden over var ikke hundrede procent overbevist og ventede på at få mere sikkert materiale til en endelig bedømmelse af, hvad der var ægte, og hvad der vitterlig var forfalskninger. Men fra van Meegeren var der ingen hjælp at hente.

Allerede 30. december 1947 dør van Meegeren i fængslet af et hjerteanfald. Han tog sine hemmeligheder med sig i graven.

Der skulle gå yderligere tyve år, før man kunne fælde den endelige dom og afgøre hvilke af Vermeers malerier, der var falske. Det skete i 1967 ved undersøgelser på Carnegie Mellon University i USA. Den historie fortælles i 4. og 5. afsnit.

3. Vermeer og den hollandske guldalder

Jan (eller Johannes) Vermeer levede i slutningen af den periode, som man ofte kalder *den hollandske guldalder*. Han blev født 1632 i Delft og døde samme sted i 1675, så vidt man ved uden at have været andre steder i sit liv.

Det kan være svært at forstå, hvad der gjorde, at netop Holland blev Europas økonomiske og kulturelle kraftcenter i sidste del af 1500-tallet. Et ganske lille land, tilsyneladende uden egne ressourcer af betydning og uden muligheder for at opstille en større hærstyrke.

Den hollandske guldalder udfoldede sig 100 år efter højrenæssancen i Italien og på et tidspunkt, hvor barokken vandt frem i den sydeuropæiske kunst og arkitektur. Derfor rubriceres den i mange kunsthistorier som hørende til barokken. Men hvis sådanne betegnelser skal karakterisere indhold i højere grad end at fastlægge årstal, så er begrebet »den hollandske højrenæssance« mere sigende og anvendes da også af og til. For som dengang i de norditalienske bystater vældede der nu i Holland et kulturelt nybrud frem, der allerede bar meget af den nye oplysningstid i sig.

Landet fostrede store tænkere som Erasmus af Rotterdam og Spinoza (fra Amsterdam). Det var en hollænder Hans Lippershey, der konstruerede den første kikkert, som Galilei snart efter fik nys om og forbedrede.² Leuwenhoek fremstillede i 1673 et mikroskop, hvormed han som den første afslørede bakteriernes verden. Fysikeren og matematikeren Chr. Huygens opfandt i 1656 penduluret og bidrog i øvrigt på mangfoldige områder til den naturvidenskabelige forskning.

Men uanset hvor lang vi gør listen, så var den hollandske højrenæssance dog først og sidst forbundet med den malerkunst, der så at sige fuldkommengjorde, hvad der var begyndt med opdagelsen af centralperspektivet i den italienske renæssance. Som i Italien dukkede der i Holland over et ganske kort åremål forbløffende mange fremragende kunstnere op på scenen.

Årsagerne til denne forskydning af det økonomiske og kulturelle tyngdepunkt var mange. De små italienske bystater, som Milano, Venedig og Firenze havde i 14-1500-tallet formået at gøre sig til knudepunkter for handelen med Østen. Silken og de efterspurgte krydderier nåede Europa via Norditalien eller på skibe ejet af dem. Overskuddet investeredes ganske vist i alskens tekstilproduktion og bankvirksomhed; men bystaterne var uden større egne ressourcer og sårbare over for forskydninger i handelsruterne.

Da Konstantinopel faldt i 1453, og det Osmanniske rige skubbede sine grænser dybt ind i Europa, blev handelsruterne stadigt farligere eller direkte umulige. Og samtidig var andre europæiske magter på jagt efter nye oversøiske territorier. I første del af 1500-tallet skaffede de europæiske søfartsnationer sig fodfæste flere steder i Østen og oprettede de første handelsstationer dér. De kolossale rigdomme, det spanske rige slæbte hjem fra Amerika i 1500-tallet, accelererede overgangen til en egentlig pengeøkonomi i Europa; men i Spanien selv anvendtes midlerne hovedsageligt til at opretholde en gigantisk flådestyrke og landhær og i mindre grad til civile projekter. Hele det økonomiske tyngdepunkt blev således forskudt, først til Spanien/Portugal, men hurtigt videre til det spansk dominerede område i Nederlandene, det nuværende Holland-Belgien.

a. Nederlandene

Antwerpen i Nederlandene blev Europas nye handelsknudepunkt. Driftige købmænd udnyttede ikke alene beliggenheden ved Rhinens udløb og tæt ved Østersø-markederne, men opbyggede snart selv en stor oversøisk flåde, der bl.a. tjente store penge på slavetransporterne til Amerika. Udviklingen blev hjulpet godt på vej af den nedgang, der rammer mange af de italienske og tyske bankhuse, som havde lånt store midler ud til de europæiske fyrster til finansiering af deres krigseventyr. Kongehusene undgik betaling ved simpelthen at erklære sig insolvente, med ruinerende af långiverne til følge.

Som i Norditalien ser vi i Nederlandene, at med velstand fulgte hos de rige familier ønsket om at omgive sig med smukke ting, der kunne genspejle det gode liv, de selv levede. Men penge og materiel fremgang alene skaber ikke stor kunst. Hvad der så gør det, er naturligvis svært at give ét svar på. Talent skal naturligvis være til stede; men talent kan både bruges og misbruges. De største kunstnere reagerer følsomt på den verden, de lever i, og udtrykker både stolthed over, hvad menneskene formår, og rædsel over, hvad de gør.

² Lippershey fra Midleburg indleverede som den første i oktober 1608 patentansøgning på en kikkert; han fik ikke patentet, men derimod en bestilling fra regeringen på yderligere tre kikkerter, hvoraf den ene blev givet som gave til kongen af Siam. Gennem »avis«-meddelelser om denne begivenhed spredtes nyheden om kikkerten øjeblikkeligt over hele Europa.

Vi skal også altid huske, at de kunstværker, vi i dag tænker på som karakteristiske for en bestemt periode, kun har været fløden af, hvad der blev lavet. Der har været en underskov af knap så talentfulde kunstnere – og måske også stor kunst, som er glemt eller forsvundet. I Antwerpen var der i 1560 registreret over 300 »mestre« inden for malerkunst og grafik, mens byen samtidig havde 169 bagere og 78 slagtere. Man kan allerede på dette tidspunkt tale om en vis masseproduktion af kunst.

Fælles for den hollandske og den italienske udvikling var, at nye befolkningslag med rod i handel, købmandskab o.l. optrådte selvbevidst på den politiske scene. I Firenze var det gamle adelsvælde blevet brudt efter langvarige stridigheder; og da adelsslægterne gennem det feudale system var knyttet til det tysk-romerske kejserrige, tog opgøret dér også form af det lille Firences kamp mod den store udenlandske magt.³ Et af midlerne i mobiliseringen af bybefolkningen mod de gamle adelsslægter og disses alliancepartnere var etableringen af visse demokratiske institutioner – måske under direkte inspiration fra oldtidens Grækenland.

Når de så oven i købet (i første omgang) vandt, giver det vist sig selv, at dette i høj grad fremmede selvbevidstheden hos aktørerne. Under den italienske renæssance blev det nye menneskesyn yderligere underbygget af genopdagelsen af de antikke tænkeres skrifter, der havde været gemt og glemt i 1000 år.

Nederlandene var en sammenslutning af mange små grevskaber og fyrstedømmer uden en egentlig fælles national bevidsthed i vore dages forstand. Indbyggerne følte sig næppe heller som ét folk. Det sydlige nuværende Belgien talte hovedsageligt fransk, det nordlige nuværende Holland talte flamsk eller tysk.

Dertil kom, at den skillelinje, reformationen havde trukket tværs gennem Europa, også skar Nederlandene over i en sydlig hovedsagelig katolsk og en nordlig hovedsagelig protestantisk del.

Bevidstheden om at være ét folk, der var underlagt en fremmed magt, voksede først frem parallelt med, at Spanien strammede grebet. Da sølvminerne i Amerika tørrede ud, og Spanien begyndte at lægge ekstra skatter på bl.a. handelen i Nederlandene, reagerede borgerne mod overherredømmet. Først med bønskrivelser til den spanske konge og med ret moderate aktioner. Men da Spanien svarede igen med inkquisition, bål og brand, begyndte den nederlandske frihedskrig.

Det lykkedes aldrig den overmægtige spanske hær at besejre de nordlige provinser. Når de var mest trængt, tog folk deroppe havet til hjælp og åbnede simpelthen for sluserne.

Men de sydlige provinser blev nedkæmpet, og spanske lejetropper raserede bl.a. Antwerpen. Da der samtidig gennemførtes forbud mod protestantisme, flygtede hovedparten af de tilbageværende købmands- og handelsfolk nordpå. Hermed var Antwerpens rolle som Europas førende havn udspillet – og det blev Amsterdam, der overtog den plads. Og inden for kunstens verden gik syd og nord i Nederlandene hver sin vej: Syd på førte det fremmede herredømme til hofkulturens sejr over bykulturen. Men nord på blev det nye borgerskabs bykultur fremherskende.

Det er interessant at se, hvorledes denne nye nationalbevidsthed genspejles i kunsten. I ganske mange af sine interiørbilleder gengiver Vermeer et kort over de nederlandske provinser – endda af og til med en tydelig fold i kortet netop der, hvor grænsen til det nuværende Belgien går. Detaljeringsgraden er så stor hos Vermeer, at vi på maleriet *Soldaten og den smilende pige* kan læse inskriptionen på kortet. I oversættelse lyder den: »Et nyt og præcist kort over hele Holland og Vest-Friesland af Nicolai Piscatores«. Et andet eksempel er fra det måske mest berømte billede *Maler-kunstens Allegori*. Her har Vermeer i fine detaljer lavet en lysekroner, der øverst smykkedes med den habsburgske ørn – det symbol, som det spanske kongehus anvendte. Når dette gøres, og der samtidig ikke er lys i kronen, kan det ikke være tilfældigt: Det spanske overherredømme er brudt.

Mange af de hollandske protestanter var calvinister, og som krigen skred frem, vandt disse flere og flere tilhængere. I opgøret med den katolske gejstligheds ødsle liv fremstod den puritanske calvinisme stadig mere tiltrækkende. De protestantiske købmænd så sig selv som – og var måske også – hellige, hårdtarbejdende og sparsommelige mennesker.

³ Dette skal ikke skjule den kendsgerning, at Firenze selv, hvor det var muligt, optrådte som stormagt over for svagere naboer som Siena og Pisa.

Deres forestillinger om et liv i sober tilbageholdenhed harmonerede ikke med den sydeuropæiske barok, som heller aldrig vandt rigtigt frem i Holland. Når man knytter retninger inden for kunsten skematisk sammen med bestemte tidsaldre, skjuler man ofte mere, end man afdækker. I barokken kommer der en ny følsomhed frem i kunsten; men denne følsomhed fremtræder næsten diametralt modsat hos en række kunstnere, der alle puttes ned i »barokkassen«. Hvor følsomheden i megen sydeuropæisk kunst i denne periode udtrykkes gennem store lidenskaber, da ser vi ikke mindst i Holland, at kunstnerne søger at få følsomheden frem som noget stærkt indre, der lyser ud gennem personerne.

Forskellen på nord og syd i Nederlandene slog således også markant igennem i maleriet. Rubens og Rembrandt var næsten samtidige. Rubens malede i Antwerpen, Rembrandt i Amsterdam. Sammenlign deres malerier – enhver kan se, at det er kunstigt at give de to en fælles betegnelse. Det er to helt forskellige opfattelser af kunstnerens rolle, af kunsten som erkendelse, af motiver, stilart osv.

Nogle steder i Europa førte puritanismen til en reaktion mod maleriet som sådan. I Holland, som landet kom til at hedde efter sin selvstændighed i 1609 (bekræftet efter trediveårskrigen i 1648), skete der det lykkelige i malerkunstens historie, at forandringerne rettede sig mod motiver og stilart.

Hver tid har sin symbolverden, som de levende umiddelbart afkoder, men som for os i en sen eftertid kan være svært at tolke entydigt. Derfor er det en noget tvivlsom påstand, at fortidens billeder er lettere at »forstå« end nutidens. Hvad der i første omgang fremtræder for os som realistiske gengivelser af forskellige situationer og optrin, kan rumme mange betydningsgivende lag, vi først ved en grundig fordybelse kan nærme os. Men gør vi det, så åbner et maleri pludselig døre for os og lader os kigge ind i forsvundne verdener.

Malerierne i renæssancens Italien blev lavet til et publikum, der kunne både den græske mytologi og de bibelske fortællinger ud og ind – også dem om alle de små profeter. At læse billeder er også at genopdage disse gode historier. Men de blev samtidig fortalt i et billedsprog, der for os kan virke som en kode. En okse er evangelisten Lukas, en fisk apostlen Peter, og afbildes en person med en økse i hovedskallen, er det en vis Peter Martyr, der i senmiddelalderen blev slået ihjel for sin kristne nidkærhed. Det samme kodesprog kender vi fra antikken, hvor de forskellige attributter hjælper os til at tolke, hvem det er vi ser på en frise på et græsk tempel.

I Holland ser vi *overgangen* fra den gamle tid, præget af ikoner med deres faste betydning, til det moderne maleri. Motivverdenen ændrer sig fra det religiøse til det verdslige. Men det betyder ikke, at symbolerne forsvinder fra kunsten.

b. Vermeers verden

Det hollandske ord for at male er *schilderen*, som vi også genfinder i det danske ord skildre. Og de *skildrede* virkelig sider af livet i deres samtid. Portrætmaleriet, skildring af landskaber, scener fra byerne, interiører osv. blev dominerende – og alt skildret med ro, uden overdrivelser, men med en teknik, der næsten gennemlyste personer og stemninger, når det var mest vellykket.

Tre kunstnere rager op over alle andre i deres samtid, og de falder egentlig alle tre udenfor ethvert forsøg på at sætte etiketter på: Frans Hals (1580-1666), Rembrandt (1606-1669) og Vermeer (1632-1675). De to første var allerede anerkendt som kunstnere, mens de levede, og begge var meget produktive. Vermeer derimod blev betragtet som eksperimenterende og avanceret.

Vi ved ikke meget om Vermeer som person. Han spillede en aktiv rolle i kunstmalerlavet i Delft og var i flere perioder præsident for dette. Fra lavets arkiver ved vi, at han blev anset for at være ekspert i italiensk malerkunst; han var således overdommer i sager om forfalskninger af italienske malerier. Hans egen uhyre beskedne produktion taget i betragtning kan han næppe have haft forestillinger om, at kunsten kunne blive en levevej for ham. Han prøvede at ernære sig som kunsthandler; men heller ikke det blev en stor succes.

Nu skal man huske, at aftagerne sjældent var villige til at betale særlig meget for kunstværker – også Rembrandt gik det økonomisk ilde. Kunstnerne blev dengang betragtet som *kunsthåndværkere*

– og en håndværkers arbejde prøver man vel at få så billigt som muligt, uanset om det er en tømrer eller en maler.⁴

Vermeer blev gift i 1653, da han var 21, og sammen med sin kone Catharine fik han 11 børn. Så der må have været tummel i huset og mange munde at mætte. Men der er malet en sådan ro ind i hans billeder, at man næppe finder noget mere vederkvægende at se på. Mange af de kvindeskikkelser, Vermeer malede, var givetvis portrætter af Catharine.

Malede Vermeer for at sælge, eller foretrak han at beholde billederne selv? Han fik ikke solgt meget – efter hans død, hvor firmaet gik konkurs, blev der opgjort 29 malerier i boet. Catharine prøvede at sikre sig dem, men uden held. Først var hun nødt til at give nogle af dem til deres bager som betaling for brød. Resten overgik til kreditorerne og blev endeligt afhændet ved en auktion i 1696. Herfra har man bevaret auktionslisten; men da Vermeer ikke selv gav sine billeder titler, og da mange af malerierne har nært beslægtede motiver, har det ikke været muligt med sikkerhed at identificere disse 21. Derimod opregner auktionslisten borde, stole, malerier, gobeliner, gyldenlæder osv., som vi finder gengivet på Vermeers malerier. Efter auktionen blev Vermeers egne malerier spredt for alle vinde.

Hvorfor blev han betragtet som avanceret?

Vender vi tilbage og betragter de andre to store, bemærker vi den ofte meget mørke tone, billederne har. Her udnyttes alle tænkelige nuancer af brunt, sort og gråt. Men netop med nuancerne af mørkt formår Rembrandt at skabe et lys, som er næsten uforklarligt. Se f.eks. malerier som *Dr. Tulps anatomiske forelæsning*, *Nattevagten*, eller portrættet af *Jan Six*. Eller Frans Hals' billede af *Forstanderinderne på plejehjemmet i Harleem*.⁵ De mørke nuancer blev ganske givet opfattet som varme og egnede til at understrege karaktertræk hos personerne.

Men mere end det. Da renæssancemalerne opdagede centralperspektivet, blev de så begejstrede, at teknikken af og til tog magten over billedet. De store hollændere behersker denne teknik med en sådan overlegenhed, at den ikke virker påtrængende. Og de opdager, at dybde ikke alene er et spørgsmål om geometri. Farvenuancerne skaber hos dem en rumlighed, der er så umiddelbar, at vi netop ikke falder på halen i undren over deres perspektivteknik.

Vermeer anvender stort set ikke sorte og grå nuancer. Selv mørke partier lyser op med en egen farve, blå f.eks. Hans foretrukne farver er sådanne som citrongul og koboltblå – farver vi umiddelbart ville betegne som »kolde«. Men han får dem til at lyse varmt gennem sine personer. Og farverne virker så friske, at man næsten skulle tro, de var malet for nylig. I hans billeder fyldes de små stuer med lys fra store vinduer. Her ser vi, at de hollandske huse langt fra var skumle og mørke. Når man betragter nogle af Rembrandts og Frans Hals' billeder, kunne man ellers forledes til at tro det.

Men måske var disse malerier heller ikke *helt* så mørke, da de blev lavet? Deres værker blev tidligt anset for værdifulde og derfor søgt beskyttet og bevaret for eftertiden. Konservatorer fik i opdrag at tage vare på malerierne, og det gjorde de bl.a. ved at give dem lak.

Værre endnu blev det i romantikken. Motiverne og ikke mindst den stemning, der slår en i møde fra de hollandske guldaldermalerier, var lige efter romantikkens smag. Og stemningen kunne man yderligere understrege ved at give malerierne en ekstra gang fernis, ofte iblandet lidt farve. Sammen med den naturlige mørkning i nogle af oliefarverne gjorde det de hollandske malerier stadig mørkere.

Vores »held« i dag er, at Vermeer blev glemt i alt dette. I en oversigt over de hollandske malere fra først i 1700-tallet (Houbrakens) er Vermeer slet ikke nævnt. Og hans klare farver og renhed i udtrykket var ikke efter romantikkens smag. I 1815 blev et af hans mesterværker *Kniplersken* solgt for 9 gylden – det ville i dag koste et to- måske trecifret millionbeløb. Men Vermeer forsvandt ud af kunsthistorien, hans malerier blev tilskrevet andre, og da man glemte ham, blev det svært senere at rekonstruere, hvem han egentlig var.

⁴ Da Rembrandt var på toppen, fik han 1600 gylden for *Nattevagten*. Få år efter kunne han ikke sælge noget. Jan Steen fik 60 gylden for tre portrætter, Isaak van Ostade 27 gylden for 13 billeder osv. Samtidig fik Rubens 14.000 francs for sin *Actæon*.

⁵ I Lademanns kunstsleksikon, Gombrich: *Kunstens historie* og i de relevante bind af Broby-Johansen: *Maleriets mestre* findes gode gengivelser af de omtalte billeder.

I 1866 bliver Vermeer genopdaget af kunsthistorikeren Théophile Thoré.⁶ Thoré anvender udtrykket »Sfinxen fra Delft« om denne mærkelige, glemte maler – et tilnavn, der siden er gået over i kunsthistorien. Han tilskriver Vermeer 76 malerier. Allerede dengang fremhæver han Vermeers klarhed i udtrykket og hans skarpsindige udnyttelse af lyset. Men netop Vermeers enestående placering i kunsthistorien gør det faktisk lettere at afgøre, om givne malerier nu også var af ham, og allerede få år efter begyndte kunsthistorikerne at sortere i Thorés 76 malerier. Hurtigt blev 20 skåret væk, og i en opgørelse fra 1907 bliver kun 34 malerier erklæret som ægte Vermeer-værker.

Siden genopdagelsen af Vermeer har kunsthistorikere været i strid om kronologien i hans værker. Vermeer daterede selv kun to billeder. De traditionelle metoder, kunsthistorikerne anvender til at afgøre, om et maleri er fra en tidlig eller sen periode i kunstnerens liv er kun lidet anvendelig over for Vermeer. Alle er dog enige om at skille en lille gruppe malerier ud som tidlige værker, antagelig fra midten af 1650'erne. Disse værker, der relativt sjældent gengives i kunstbøger, har bibelske eller mytologiske motiver, de har ikke så overvældende detaljerigdomme som hans øvrige produktion, men arbejder dog med farver, komposition og perspektiv på en måde, så kunsthistorikere er enige om, at det må være Vermeers værker.

Men det er karakteristisk, at alle de falske Vermeer-billeder knytter sig til denne tidlige stil.

Kristus og Disciplene ved Emmaus bekræfter mange forskere i den opfattelse, at Vermeer har været på besøg i Italien, og man fremsætter den hypotese, at Vermeer har haft en tidlig religiøs periode. Da så yderligere de øvrige forfalskninger dukker frem, ser disse forskere billederne som en bekræftelse af hypotesen, og lykkelige er de for det. Men det medvirkede naturligvis til, at disse billeder, der var af en uomtvistelig ringere kvalitet, alligevel straks blev anerkendt.

I sin »modne« periode nåede Vermeer et niveau af perfektion, som van Meegeren også prøvede at arbejde sig ind på. Men dette opgav han dog.⁷

Fra denne del af Vermeers liv stammer hovedparten af hans produktion, og bortset fra to malerier med motiver fra Delft er alle billeder interiører. Og ikke nok med det – de er givetvis alle malet i samme hus – en stor del endda i samme værelse. Dette hus, som Vermeer boede og malede i, var for længst revet ned, da man genopdagede ham. Husets grundplan kan dog stort set rekonstrueres.

En hollandsk kunsthistoriker har påvist, at det ene bybillede *Gaden* præcis viser udsigten fra et vindue i det hus, hvor Vermeer boede. Her sad han altså og malede. Og interiørerne rummer ofte samme vinduer, udsmykning – og den samme renæssancestol, som er en velkendt umagelig model, hvis mål kendes. Når perspektivet er så præcist som hos Vermeer, kan man ud fra blot *et mål* beregne resten; hos Vermeer får vi i øvrigt god hjælp af de skakternede gulve. Beregninger fortæller, at interiørerne er malet i et rum med en vinduesfacade på ca. 6,5 meter – og det passer præcis til bredden af Vermeers hus, som vi finder det på et gammelt matrikelkort.

Ingen af Vermeers billeder har *direkte* sollys ind gennem vinduerne. Det er ikke tilfældigt. Et gammelt stik af torvet i Delft viser Vermeers hus, og her kan man se, at sydfacaden har to vinduer. Fra malerierne ved vi, at der er tre i Vermeers »atelier«. Og dette passer også med, at udsigten mod *Gaden* må være malet fra husets nordside.

Her i dette beskedne hus malede Vermeer noget nyt ind i kunsthistorien. Med sine billeders skønhed viste han, at et maleri kan være noget værd i sig selv, uafhængig af om motivet fortæller en dramatisk historie eller ej. Ligesom stor musik ikke behøver at være programmusik, endsige »handle om noget«.

Mange af billederne har en så kraftig perspektivisk forkortning – som *Soldaten og den smilende pige* – at man måske synes, der er noget galt med perspektivet. Pigen er for lille. Men der er ikke noget galt – det beskedne værelse har gjort, at Vermeer så at sige har haft næsen inde ved maleriet.

Eller måske har han stået med næsen og øjet ind i et såkaldt *Camera Obscura*. Dette værktøj var en slags forløber for fotografiet: Gennem et lille hul i en mørk kasse projicerede lyset motivet ind på et stykke pergament eller en mætteret skærm. Her ser kunstneren motivet gengivet omvendt – li-

⁶ Af og til nævnes en W. Bürger, men det er samme person. Bürger er et pseudonym, Thoré tog for at understrege sine radikale synspunkter.

⁷ De to malerier i Vermeer-stil, man fandt i van Meegerens atelier i Nice, var interiører: en luthspiller og en nodelæsende kvinde. Disse havde van Meegeren ikke søgt at afhænde.

gesom det sker inde i øjet – og kan så tegne det præcise perspektiv op. Camera Obscura («mørk kasse») blev opfundet i 1600-tallet, og en af dem, der udviklede dette apparat, var Leeuwenheuk, mikroskopets opfinder. Vermeer og han var bysbørn, og mon ikke man kendte hinanden i Delft?

Det betyder imidlertid ikke, at Vermeer er fotografisk nøjagtig. En interessant side af hans teknik får man frem ved at forstørre billederne: Da vil man se, at konturerne bevidst er sløret en anelse. Hvorfor? – Måske fordi vi skal se billedet på en sådan måde, at vi har fornemmelsen af at fokusere.

Vermeer har ligeledes et formål med sin perspektiviske forkortning: Ligesom han tilsyneladende har stået »midt i motivet«, således vil han også, at vi skal betragte det! Den forhindring, det lille værelse er, har han vendt til et redskab for det, han vil: Stemningen bliver mere intim; ofte står der en tom stol til os. Vi er med ved bordet, ligesom vi i andre billeder er trådt ind i et rum, hvor en pige står og læser sit private brev (fra soldaten?).

Om dette maleri skrev van Gogh i et brev i 1888, få år efter genopdagelsen af Vermeer: »Kender De en maler, som hedder Jan van der Meer? Han har malet en værdig og smuk hollandsk kvinde, der er frugtsommelig. Denne mærkelige malers palet består af blå, citrongult, perlegråt, sort og hvidt. Selvfølgelig kan man i hans få billeder finde alle farver, men kombinationen citrongult, tonet blå og lysegråt er lige så karakteristisk for ham, som den harmoniske sammensmeltning af sort, hvidt og rosa er det for Velasquez. Hollænderne havde ingen fantasi; men de havde en udsøgt smag og usvigelig fornemmelse for komposition.«

I en del billeder lagde Vermeer farverne på som små prikker – en teknik, der først blev »genopdaget« af impressionisterne i slutningen af det 19. århundrede. Hans teknik er blevet beskrevet med udtrykket, at han maler med knuste perler. Og hans krav til præcision finder et slående udtryk i maleriet *Udsigt over Delft*, hvor han har angivet det nøjagtige tidspunkt, billedet er lavet på: kl. 7:10. Man skulle af og til tro, at han malede gennem et mikroskop.

Når man tager i betragtning, at Vermeer ikke hovedsagelig var kunstmaler, men kunsthandler, og når man samtidig iagttager den uhyre detaljeringsgrad, der præger billederne, og den måde, hvorpå farvevirkningerne er frembragt, må man konkludere, at det er sandsynligt, han ikke har produceret ret mange flere billeder end dem, vi kender. Det er usandsynligt, der pludselig dukker mange »nye« Vermeer-malerier op.

Men sammenligner man med eksempelvis Frans Hals, fra hvis hånd der med sikkerhed kendes 240 malerier, så er *tanken* om flere end 30-40 stykker da nærliggende.

Drømmen om at finde flere Vermeer-malerier førte anerkendte kunsthistorikere i fælden. Men hvordan kunne van Meegeren dog fremstille malerier, der af de største specialister blev godkendt som 300 år gamle kostbare værker?

4. Falsknerens problemer

Et »troværdigt« falskneri kan kun udføres af en fremragende håndværker. Der er så mange fælder, en kunstfalskner kan gå i, så mange problemer, der skal løses, at man næppe ville tro, det var muligt at slippe helskindet igennem.

Vanskelighederne kan illustreres ved at sammenligne med falskmønternes gebet. Deres situation er i en vis forstand diametralt modsatte: Den ene skal lave en tro kopi, den anden en ægte original; den ene skal lave noget, hvor kvaliteten måles ved, at det *ikke* stikker af og bemærkes, den anden skal lave noget, der netop skal bemærkes og udfordrer til en kritisk granskning.

Motiverne til falskneriet er heller ikke nødvendigvis ens. Godt nok kan der være tale om enorme gevinster, hvis en kunstsvindel lykkes – hvad kunne et nyopdaget billede af Leonardo eller van Gogh ikke indbringe! Men forskellen ligger i fokus: Kunstfalskneren oplever, at *hans* værk kommer i centrum, at det får den anerkendelse, der aldrig blev ham selv til del. Selv om han ikke selv bliver feteret, oplever han alligevel en vis tilfredsstillelse ved at bedrage dem, der ikke ville anerkende ham selv som kunstner.

For Hans van Meegeren ser det ud, som om motiverne ændrede sig undervejs. De første (og mest vellykkede) forfalskninger var sikkert lavet i frustration og som en slags hævn over for sine kritikere. Da de blev anerkendt indbragte salget jo samtidig enorme summer, og det førte van Mee-

geren ud i et luksuriøst og ret udsvævende liv med store selskaber, ejendomsspekulationer og meget andet. Et liv, der krævede konstant tilførsel af nye store summer.

Vi forestiller os vel altid, at falsknerier bliver afsløret, før eller siden. Men i sagens natur kan vi ikke vide, om det vitterligt er lykkedes at smugle falske »Rembrandt«-billeder ind i rækken af ægte.⁸

For van Meegeren lykkedes det jo. I 8 år var hans »Vermeer«-billede *Kristus og disciplene ved Emmaus* et af Rotterdams Boymans-van-Benningen Museums klenodier. Da han endelig bliver arresteret, var det ikke som svindler, men som landsförræder. Han havde solgt et Vermeer-billede til Göring. Og først på det tidspunkt står han frem og afslører sig selv som kunstfalskner.

Men straks melder spørgsmålet sig: Skal man tro en kunstfalskner på hans ord? Hvis han er svindler, kan han vel lige så godt være løgner! Og ikke mindst i lyset af mandens situation: Han var anklaget for at være nazikolaboratør, det mest æreløse af alt. Ville han ikke gøre hvad som helst for at slippe?

Over for kunstfalskneren stod hele den etablerede kunstverden med sine historikere og kritikere. Blandt disse fandtes oven i købet en del, der var eksperter i den kunstner, det drejede sig om. Skulle en tredjerangskunstner som van Meegeren kunne føre disse eksperter bag lyset?

Der blev publiceret artikler, der pure benægtede van Meegerens påstand.

Men sagen måtte gå sin gang, og ledelsen af kunstmuseet i Rotterdam besluttede at fjerne maleriet fra udstillingen, så længe sagen stod på.

Nu skulle kritikerne og kunsthistorikerne vise deres formåen, og retssagen kom således også til at blive et lærestykke i deres metoder. I det følgende grupperer vi disse i henholdsvis *stilanalyse* og *tekniske analyser*.

a. Stilanalyse

Hver kunstner har sin stil. Den er præget af den eller de retninger inden for kunsten, som er fremherskende på kunstnerens tid. Men den er først og fremmest personlig. En detaljeret kortlægning af den enkelte kunstners særpræg giver en slags »fingeraftryk«, som det vil være (næsten) umuligt at eftergøre.

De fleste kunstnere udvikler sig betydeligt gennem deres aktive liv, så man kan udskille den »unge Picasso«, den »modne Michelangelo«, den »ældre, religiøst prægede Rembrandt« osv. Sådanne detaljerede »profiler« anvendes bl.a. til at afgøre kronologien i den enkelte kunstners værker, hvor der kan være tvivl.

For Vermeer er dette en yderst delikat sag. Som omtalt daterede han selv kun to af sine malerier. Men bortset fra den grove opdeling i to grupper af malerier er der meget strid om kronologien i gruppen af interiører. Det er, som om Vermeer er en fuldt udviklet moden kunstner fra første penselstrøg, hvor han åbner sit hus for os. Det gør livet lidt lettere for en falskner, thi så kan der forholdsvis frit lånes idéer fra kunstnerens forskellige værker.

I forsøgene på at fastlægge kronologien er historikerne dog ikke helt på herrens mark. Motiverne kan hjælpe os en del. Betragt f.eks. de klædninger, som personerne på Vermeers billeder bærer – en kjole, en hat eller andet. Sådanne genstande er ikke tidløse. Også dengang havde moden sine hurtige omskiftelser, og kendskab hertil kan hjælpe med til at give en omtrentlig datering.

I stilanalysen gives der en detaljeret karakteristik af kunstnerens motivvalg. Hans komposition, dvs. hvordan er billedet bygget op, hvilke linjer, trekanten, cirkler osv. har kunstneren anvendt? Hans udnyttelse af perspektivet – hvor perfekt er det, hvor er der evt. fejl? Hans farvevalg og måden, hvorpå farven lægges på. Hans penselstrøg. Hans måde at arbejde med lys og mørke på. I nogle situationer går analytikerne et skridt videre, og begynder at registrere, hvorledes den enkelte kunstner maler øjenbryn, eller hvorledes en billedhugger laver håret osv.

⁸ Det er en interessant filosofisk diskussion, om dette i virkeligheden betyder noget. Er billederne lige gode, også efter de er afsløret som falske? Hvordan påvirker det vores vurdering af et maleri, at vi er blevet bedraget af netop det samme maleri?

Men et så omfattende dokumentarium, der fra kunsthistorikernes side var tænkt som »forsvarsværker« omkring den ægte vare, kan af en behændig kunstfalskner blive vendt til egen fordel. For hvis han er i stand til at eftergøre alle disse detaljer, disse forskellige *elementer*, som analysen har brudt maleriet op i, så skaber han faktisk en slags dokumentation for falskneriets »ægthed«. Det var netop van Meegerens metode. Maleriet *Kristus og disciplene ved Emmaus* var bygget op over en række elementer fra ægte Vermeer-billeder – en hånd var kopieret fra et sted, en vindunk fra et andet, tallerkner fra et tredje osv. Også penselstrøg, farvevalg osv. var det rigtige. At så mange detaljer forekom rigtige var en af forklaringerne på, at den tids største Vermeer-ekspert Abraham Bredius gik i fælden.

Nogle af sine detaljer var van Meegeren så begejstret over, at han gengav dem i adskillige af sine billeder. Således en bestemt vandkande. Men i hans atelier i Nice fandt man en kande, næsten identisk hermed.

Med valget af motiver havde van Meegeren ligeledes forsøgt at gardere sig. Hvordan kan man vide i dag, hvilke motiver en hollandsk maler i 1650'erne føler sig tiltrukket af (hvis der ikke er tale om et direkte bestillingsværk)? Van Meegeren gjorde det enkle, at han gennemså de andre mestres produktioner og brugte samme motiver! Således har Rembrandt eksempelvis lavet et dejligt billede med motivet *Kristus og disciplene ved Emmaus*.⁹ Så hvorfor ikke også Vermeer?

Valget af netop dette motiv var faktisk med til at overbevise om maleriets ægthed. Som omtalt tidligere vidste man, at Vermeer i sin samtid var blevet anset for at være ekspert i italiensk malerkunst. Flere kunsthistorikere havde heraf sluttet, at så måtte Vermeer mindst én gang have besøgt Italien og studeret de store italienske mestre. Og blandt disse naturligvis ikke mindst Caravaggio, fra hvem der udgik en stærk påvirkning til hele Europa. Til Caravaggios hovedværker hører netop maleriet *Bespisningen i Emmaus*. Det forekom ganske logisk for disse kunsthistorikere, at den unge Vermeer havde forsøgt sig med samme motiv.

En stilanalyse har naturligvis en række subjektive elementer indbygget i sig, fordi oplevelsen af et billede i sidste instans er subjektiv. Men det betyder ikke, at det er så privat, at der ikke er noget at tale om. Som det er fremgået, er der meget at tale om. Og en god indgang til en stilanalyse er netop at begynde at sætte ord på det, man ser. Ved at begynde med en ren objektiv beskrivelse af helhed og detaljer, når man ofte til et punkt, hvor noget nyt åbner sig i billedet.

Lad os gøre forsøget med det omstridte værk, som er gengivet i bilag 2, ganske vist kun i sort-hvid. De første skridt kan vi tage sammen, derefter fortsætter du selv.

Motivet er den for kristendommen skelsættende begivenhed, der kaldes bespisningen i Emmaus. Det er efter korsfæstelsen. Jesus er borte. Disciplene er ulykkelige og rådvilde. Hvordan kunne det ende sådan, og skal de nu gå hver til sit? På en vandring til byen Emmaus får to af disciplene følge-skab af en ukendt vandringsmand, og da de når kroen i Emmaus, går de sammen ind for at spise. Ved måltidet velsigner da den fremmede brødet på samme måde, som Jesus havde gjort ved den sidste nadver – hvor rystende et chok må det ikke være for de to? Er det virkelig ham, genopstanden fra de døde, som her giver sig til kende for dem?

Og nu til maleriet. Prøv at finde Rembrandts eller Caravaggios billede med samme motiv¹⁰ og sammenlign.

Hos van Meegeren gengives Jesus som *lidende*, ja nærmest så det er lidt sentimentalt. Hvordan skal vi beskrive disciplenes blik og attituder? Der er kærlighed i blikket; men er der blot antydning af stor bevægelse? Det forekommer, som om billedet især vækker følelser som medlidenhed hos beskueren. Derimod er hele dramaet afbildet hos Caravaggio – åbenbaringen får disciplene til næsten at gå i chok. Og Jesus selv er ikke fremstillet som lidende – han har overvundet lidelserne og døden og udstråler selvsikker ro.

Den udstråling, personerne på et maleri har, genspejler sider hos kunstneren selv, og det menneskesyn, der er fremherskende i hans tid. Hvordan skulle det ellers være? Hvilket menneskesyn træder os så i møde i de forskellige versioner af det samme motiv? Er van Meegerens Kristus mon ikke et portræt af ham selv: den lidende van Meegeren, den ikke-anerkendte?

⁹ Maleriet er gengivet i den Rembrandt-illustrerede udgave af Bibelen.

¹⁰ Caravaggio har malet flere versioner af billedet. Det mest berømte findes i (18).

Således foregik diskussionerne også i kunst kredse i tiden omkring retssagen. Stilanalyser alene overbeviste dog ikke alle skeptikerne.

Men kunsthistorikerne har en række andre metoder til rådighed.

b. Tekniske analyser

Det bevismateriale, der førte til dommen over van Meegeren, blev hovedsageligt leveret fra tekniske analyser af de omstridte malerier. I det følgende er dette samlet i fire grupper.

Første punkt er lærrederne. Her viste det sig, at van Meegeren havde garderet sig fuldt ud. Alle lærreder var gamle, magen til andre, der blev brugt på Vermeers tid. Nogle af lærrederne var imidlertid blevet skåret til i den ene side, så de passede til van Meegerens motiver. Men stifterne, som lærredet er spændt op på rammen med, trækker gennem årene i de yderste af lærredets tråde, og når lærredet skæres til fremviser de helt forskellige træk i de to sider af malerierne. Nærmere undersøgelser bekræftede van Meegerens påstand, at han havde købt gamle, værdiløse malerier, omhyggelig skrabet malingen af, og derefter malet ovenpå igen. Men dels er det vanskeligt at skrabe lærreder helt rene uden at ødelægge dem, og dels ønskede van Meegeren at bevare dele af den underliggende krakelering som hjælp til ældningsprocessen. Derfor vil der normalt være visse rester af tegninger osv. tilbage.

Andet punkt var en røntgenundersøgelse af malerierne. Primitive falsknerier afsløres umiddelbart af denne metode, der kan afdække, om der ligger et maleri nedenunder. For de omstridte malerier var resultaterne ikke entydige og var en del omdiskuteret. Bag billedet *Kvinde taget i hor* sås en kampscene med heste og krigere. Bag maleriet *Den sidste nadver* kunne man tydeligt se en jagtscene, og i van Meegerens arkiv fandt man en kvittering på købet af et maleri af en vis A. Honnius med en jagtscene som motiv. I 1948 dukker så et fotografi af dette maleri frem, og motivet passede perfekt til røntgenbilledet. Men ved andre af billederne gav målingerne ikke noget resultat. Vedrørende det mest omstridte af dem *Kristus og disciplene* forklarede van Meegeren, at han havde malet det ovenpå et gammelt lærred med motivet Lazarus opvækkelse. På røntgenbilledet kan man se antydninger af noget, der ligger bag det, vi kan se.¹¹ Men det kunne også være Vermeer selv, der havde forkastet et første forsøg, så disse undersøgelser gav ikke det afgørende bevis.

Tredje punkt er ældningstegnene. Malingen må forventes at være lige så gammel som lærredet, og dette er en af de vanskeligste hurdler for falskneren. Kunstige ældningstegn skabes normalt ved at blande bestemte kemikalier i malingen. I nogle af sine malerier havde van Meegeren anvendt stoffet phenoformaldehyd, som får malingen til at hærde til bakelit og derved fremtræde lige så hård og uopløselig, som malingen på gamle malerier. En forsigtig opvarmning kan »fuldende« værket ved at frembringe en krakelering, der ligner den, vi ser på gamle udtørrede oliemalerier. Men van Meegeren var ikke omhyggelig nok – phenoformaldehyd blev først opdaget i slutningen af det 19. århundrede, og de malerier, hvor der fandtes spor heraf måtte derfor være falsknerier. Nogle tvivlere hævdede dog, at sporene var så små, at en bestemt dårlig opbevaring kunne have medført, at billederne havde optaget noget af dette stof senere. Mikroskopiske undersøgelser viste også, at krakeleringen var anderledes end på gamle malerier.

Fjerde punkt er selve malingen, der anvendes. Moderne maling er produkter fra den kemiske industri, hvor f.eks. titan har afløst blyhvidt. Den klassiske maling baseredes hovedsagelig på naturfarver. van Meegeren vidste naturligvis dette og tilstræbte at bruge gamle opskrifter. På Vermeers tid havde den blå farve sin oprindelse i mineralet lapis lazuli, grøn i malakit osv. Det er uhyre vanskeligt (og kostbart) at genskabe alle disse farver, og van Meegeren gik derfor af og til på kompromis og anvendte eksempelvis koboltblå i stedet. Spektralanalyser afslører hvilke stoffer, der er i farven, og da koboltblå ikke fandtes på Vermeers tid, var dette et af de fældende beviser. Koboltblå fandtes imidlertid med sikkerhed kun i *Kvinde taget i hor* samt i et af de usolgte billeder fra hans atelier i Nice, *Kvinde der læser noder*. Det fandtes således hverken i *Kristus og disciplene*

¹¹ Røntgengennemlysningen er gengivet som eksempel i artiklen i Brockhaus, se (13). I (6) og (7) er gengivet et omfattende billedmateriale fra retssagen. Men usikkerheden illustreres med al tydelighed af disse to værker, der ud fra samme materiale drager stik modsatte konklusioner. Jean Detour var overbevist om, at *Kristus og disciplene* samt *Den sidste nadver* var ægte Vermeer-billeder.

atelier i Nice, *Kvinde der læser noder*. Det fandtes således hverken i *Kristus og disciplene ved Emmaus* eller i *Den sidste nadver*.

Den tekniske analyse førte til domfældelse, men havde alligevel ikke leveret så klippefaste beviser, at man følte, sagen var endeligt afgjort. Både i offentligheden og blandt kunstkritikere var der folk, der nægtede at tro, det var falsknerier. Dokumentationen var heller ikke lige stærk over for alle de omstridte billeder.

Sammenholdt man den tekniske med stilanalysen, lød kritikken af dommen, at man havde ladet en svindler stille dagsordenen og taget udgangspunkt i, at han talte sandt. Præcis de syv malerier, han havde udpeget, var blevet undersøgt. Men blandt disse var kvalitetsforskellen iøjnefaldende – måske var det rigtigt, at det billede, van Meegeren havde solgt til Göring, og enkelte andre var falsknerier. Men et maleri som *Kristus og disciplene* havde en helt anden udstråling og kunne ikke være lavet af en tredjerangsmaler.

Det panel af eksperter, der i 40'erne trods alt dette fastholdt, at alle syv var falske, forklarede, at nok var der stor kvalitetsforskel, men at van Meegeren med sine første malerier netop ville vise, hvor god han selv var, og derfor havde anstrengt sig til det yderste med at få alle detaljer korrekt gennemarbejdet.¹² Da han så så, at det lykkedes at føre hele kunstverdenen bag lyset, blev han mere skodesløs, hvilket netop demonstrerede, at han var håndværker, ikke kunstner.

Diskussionen døde hen, uden at den rigtig fik en tilfredsstillende afslutning. Så sent som i 1951 udgav en af dem, der aldrig accepterede, at van Meegeren skulle have malet *Kristus og disciplene ved Emmaus* eller *Den sidste nadver*¹³, et omfattende værk, hvor han gik i rette med retssagen (se 7).

Spørgsmålene var stadig åbne, da videnskabsmænd på Carnegie Mellon University i 1967 tog sagen op igen. Og denne gang blev den endeligt afgjort.

Det fældende bevis blev leveret af nogle af de mindste byggestene i verden: radioaktive atomer. I noget af den maling, der anvendtes på Vermeers tid, fandtes blyhvidt og sammen med det nogle yderst beskedne rester af radioaktivt henfald fra uran. Men dog nok til at kunne afgøre sagen.

For at forstå hvordan, må vi først en omvej omkring den radioaktive henfaldsproces.

5. Radioaktivitet

I årene omkring århundredskiftet begyndte fysikere, kemikere og matematikere at dykke ned mod stoffets mindste bestanddele, atomerne, og siden videre endnu til kernepartiklerne. Hvert år bragtes nye fænomener for dagens lys, stadig mere forbløffende og sværere at forstå.

I 1895 havde Wilhelm Röntgen opdaget den stråling, der fik navn efter ham, og en lang række forskere begyndte at eksperimentere med dette. Under sådanne eksperimenter opdagede franskmanden Henri Becquerel året efter i 1896, at uransalte sværte fotografiske plader, også selv om disse var delvist afskærmede. Det gik hurtigt op for ham, at der ikke kunne være tale om røntgenstråler – der måtte være tale om en helt ny type stråling, som han i mangel af bedre simpelthen kaldte »uraniske stråler«.

Gennem de følgende år lykkedes det Becquerel og ægteparret Pierre og Marie Curie at få en større indsigt i det nye fænomen, som Marie Curie gav navnet *radioaktivitet*. Hun opdagede, at uranmalm udsendte en kraftigere stråling end ren uran, og konkluderede, at der måtte findes noget andet inde i malmen, som også udsendte stråling. Efter nogle år lykkedes det at isolere og identificere to nye og hidtil ukendte grundstoffer – først Polonium, opkaldt efter hendes fædreland, og siden Radium.

Hermed var det påvist, at radioaktivitet er et mere alment fænomen.

Nogenlunde samtidig fandt den engelske fysiker Ernest Rutherford ud af, at der måtte være tale om (mindst) to forskellige slags radioaktiv stråling. I årene frem til 1908 lykkedes det ham at identi-

¹² van Meegeren havde under retssagen oplyst, at det havde taget ham 7 måneders koncentreret arbejde at lave dette billede.

¹³ Det er i øvrigt en af historiens ironier, at de forfalskede billeder sælges for høje priser i dag: I 1995 blev *Den sidste nadver* solgt for \$88.000.

ficere den ene type, den, vi i dag betegner *alfa-stråling*, og som består i udsendelse af heliumkerner. Sammen med Geiger, der havde udviklet et fintfølede udstyr, foretog han en række berømte eksperimenter, der i 1910 førte frem til en præcis statistisk beskrivelse af henfaldet, samt til den erkendelse, at *antallet* af radioaktive omdannelser i et givet tidsrum måtte være *proportionalt* med antallet af radioaktive atomer i materialet.

Kaldes antallet af radioaktive atomer (f.eks. af isotopen Uran-238) for $N(t)$, så er ændringen pr. tidsenhed givet ved differentialkvotienten $N'(t)$.

ØVELSE 1

1. Kan man sige noget om monotoniforholdene for $N(t)$?
2. Lav en skitse af en mulig graf for $N(t)$. Vælg et bestemt tidspunkt t_0 . Marker på din graf, hvorledes man kan tegne og aflæse størrelsen $N'(t_0)$.
3. Hvad angiver størrelsen $N(t) - N(t_0)$?
4. Forklar hvorfor $N'(t_0)$ er *ændringen* i antal atomer pr. tidsenhed.

Rutherford fandt altså ud af, at der gælder:

$$N'(t) = -k \cdot N(t), \quad (1)$$

hvor k er en positiv konstant. k kaldes henfaldskonstanten.

Året efter, i 1911, formulerede Rutherford en atommodel, der gav den første nogenlunde tilfredsstillende beskrivelse af stoffets opbygning. Niels Bohr, der i disse år arbejdede hos Rutherford i Cambridge, byggede videre på dennes model, da han i 1913 lancerede sin egen berømte atommodel.

Selv om vi i dag har en betydeligt større indsigt i atomkernens fysik, er der dog stadig mange dunkle spørgsmål. Det *enkelte* radioaktive atom henfalder »spontant«, dvs. på et tilsyneladende tilfældigt tidspunkt. Når vi ser på den enorme samling atomer i ét gram af stoffet – mere end 10^{21} stk. – foregår henfaldet efter præcise statistiske love, som f.eks. udtrykt i ligningen (1) ovenfor. Men de »kræfter«, der styrer henfaldet, og som kaldes »den svage kernekraft« og »den stærke kernekraft«, forstår vi ikke til fulde i dag.

Differentialligningen (1):

$$N'(t) = -k \cdot N(t)$$

er til at løse. Vi viser i bilag 1, at *samtliche løsninger* er alle funktioner med forskriften:

$$N(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}, 0$$

hvor c er en konstant. c fastlægges af *begyndelsesbetingelserne*: Til et givet tidspunkt t_0 er der $N_0 = N(t_0)$ atomer.

ØVELSE 2

Vis ved udnyttelse heraf, at $c = \frac{N_0}{e^{-k \cdot t_0}} 0$,

og udnyt herefter potensregnerreglerne til at indse, at følgende gælder:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k(t-t_0)} \quad (2)$$

Det forenkler udtrykket, hvis vi beslutter at måle tiden ud fra t_0 , som så sættes til 0:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t} 0,$$

hvor tiden måles ud fra t_0 , og N_0 er antal atomer på dette tidspunkt.

Før vi kan begynde at regne, må vi kende henfaldskonstanten k . Det er imidlertid lettere at måle den såkaldte *halveringstid* $T_{1/2}$: $T_{1/2}$ angiver den tid, der går, indtil halvdelen af det givne antal radioaktive atomer er omdannet.

Er halveringstiden for et stof 30 dage, og har vi givet 100 mio. atomer, så er der efter 30 dage ca. 50 mio. af de oprindelige og 50 mio. andre. Efter yderligere 30 dage er der ca. 25 mio. tilbage, mens 75 mio. af atomerne er blevet omdannet til andre atomer.¹⁴

ØVELSE 3

Vis at der efter 10 halveringsperioder – dvs. i vort eksempel: efter 300 dage – er ca. 0,1% tilbage af det oprindelige antal. Resten er omdannet.

Lad os nu »tælle ud fra« begyndelsestidspunktet 0. Ifølge definitionen på $T_{1/2}$ gælder:

$$N_0 \cdot e^{-k \cdot T_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot N_0$$

ØVELSE 4

$$\text{Vis: } k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (3)$$

0

ØVELSE 5

Vis at vi får samme formel for k , hvis vi i stedet for begyndelsestidspunktet ser på situationen til tiden t og tiden $t + T_{1/2}$ og betragter ligningen:

$$N(t + T_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot N(t)$$

ØVELSE 6

Beregn henfaldskonstanterne for nedenstående radioaktive stoffer:

Stof	$T_{1/2}$	k
U-238	4,5 mia. år	
Radium-226	1600 år	
Bly-210	22 år	
Polonium-210	138 dage	

Når et radioaktivt atom henfalder, omdannes det til et andet atom, idet der samtidig udsendes α -, β - eller γ -stråling (evt. en kombination heraf).¹⁵ α -stråling er heliumkerner: 2 protoner og 2 neutroner. Herved mister det oprindelige atom således 4 kernepartikler. Antallet af kernepartikler noteres efter stoffets navn eller bogstavbetegnelse: U-238 er uran med 238 kernepartikler. Ved udsendelse af α -partikler rykker det ned i rækken og bliver til Thorium-234. Det forekommer næsten at være magi, for var det ikke alkymisternes gamle drøm? At ét stof kunne omdannes til et andet (gerne guld!).

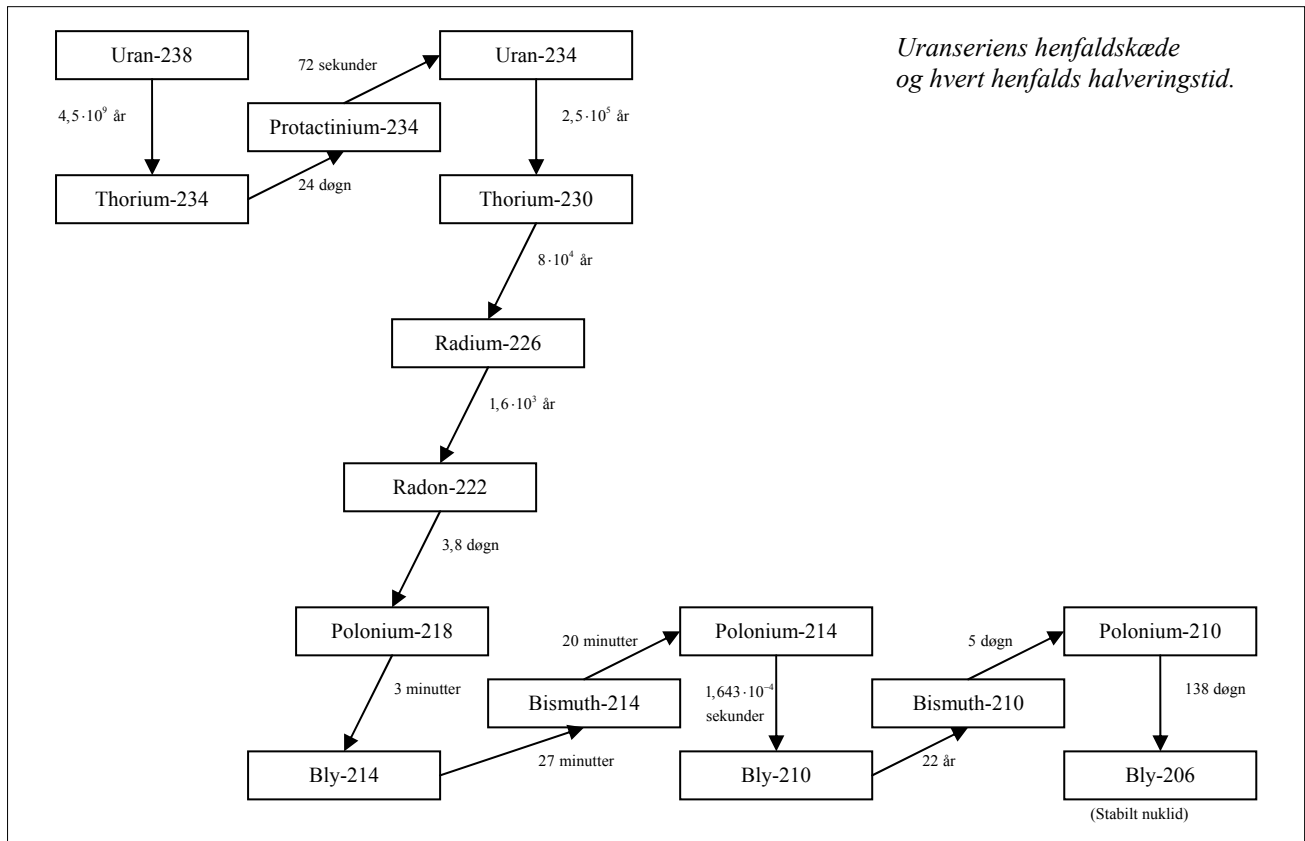
¹⁴ Bemærk: Halveringstider er et statistisk mål. Derfor angives cirkatal.

¹⁵ Der findes også andre varianter, som positiv β -stråling, og omdannelserne er i det hele taget betydeligt mere kompliceret end her beskrevet. Men til vores formål er det tilstrækkeligt.

β -partikler er elektroner. Når disse negativt ladede partikler udsendes, forstyrres den elektriske ligevægt og en (positiv) proton omdannes derfor straks til en (neutral) neutron. Stoffet har samme »antalsbetegnelse«, men er kemisk set blevet et nyt stof.

γ -stråler er fotoner, der udsendes, eksempelvis når en elektron hopper fra én elektronskal til en anden.

Det nye stof der dannes – som f.eks. Thorium-234 – er oftest selv radioaktivt, der med en halveringstid på 24 dage omdannes til Protactinium-234. Også protactinium er radioaktivt, og omdannelsen fortsætter, indtil der langt om længe fremkommer et *stabilt atom*. Alle radioaktive stoffer er således med i en radioaktiv familie, og uranserien er en af disse – se figuren:



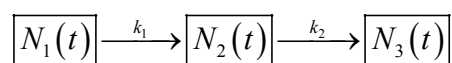
I enhver naturlig omdannelse her på jorden forandres et atom til et andet atom. Det *samlede* antal atomer i den klump, vi betragter, er således konstant; hvad der ændrer sig er *forholdet* mellem mængden af det ene, det andet, det tredje osv. stof i klumpen.

En given klump uranmalm indeholder derfor alle disse forskellige stoffer, der findes i uranserien. Bl.a. de to, som Marie Curie opdagede – prøv at finde dem i skemaet.

Brydes en klump malm fri i en blymine, vil denne ligeledes indeholde uran og de øvrige stoffer i serien, hvilket viste sig at få afgørende betydning i afsløringen af falskneriet.

Den matematiske beskrivelse bliver naturligvis mere kompliceret end ved beskrivelsen af én omdannelsesproces.

Lad os betragte tre stoffer i kæden, hvor N_1 , N_2 , og N_3 angiver antal atomer af de tre stoffer, og k_1 og k_2 er henfaldskonstanterne:



Pilene betyder, at der tilføres eller forsvinder stof. Vi ser et øjeblik bort fra, at der også går pile til N_1 og N_3 .

Diagrammet beskriver *ændringerne* i tilstandene for de tre stofmængder. Regner vi nu pr. en bestemt lille tidsenhed, så beskriver diagrammet altså *ændringen pr. tidsenhed* af antal atomer i det

enkelte stof. Og her kommer matematikken ind på banen: Ændringen pr. tidsenhed er netop differentialkvotienten af funktionen: $N'(t)$.

Sæt nu fokus på stof nr. 2. Pr. tidsenhed *forsvinder* der $k_2 \cdot N_2(t)$. Det følger af definitionen på henfaldskonstanten. Men samtidig *tilføres* det, som forsvinder fra stof nr. 1. Og det er på samme måde $k_1 \cdot N_1(t)$. Dvs. vi har følgende differentiaalligning til at beskrive systemet:

$$N_2'(t) = -k_2 \cdot N_2(t) + k_1 \cdot N_1(t) \quad (4)$$

Denne differentiaalligning er betydeligt vanskeligere at løse. Men så foretager vi et lille indgreb, der er meget anvendt i løsning af vanskelige differentiaalligninger: Hvis halveringstiden for stof 1 er meget større end for stof 2, kan vi for korte tidsrum med god tilnærmelse sætte $N_1(t)$ lig en konstant. Og så er differentiaalligningen straks lettere at klare. I bilag 1 viser vi følgende:

SÆTNING

Samtlige løsninger til differentiaalligningen $y' = ay + b$ kan skrives på formen:

$$y = c \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}, \quad (5)$$

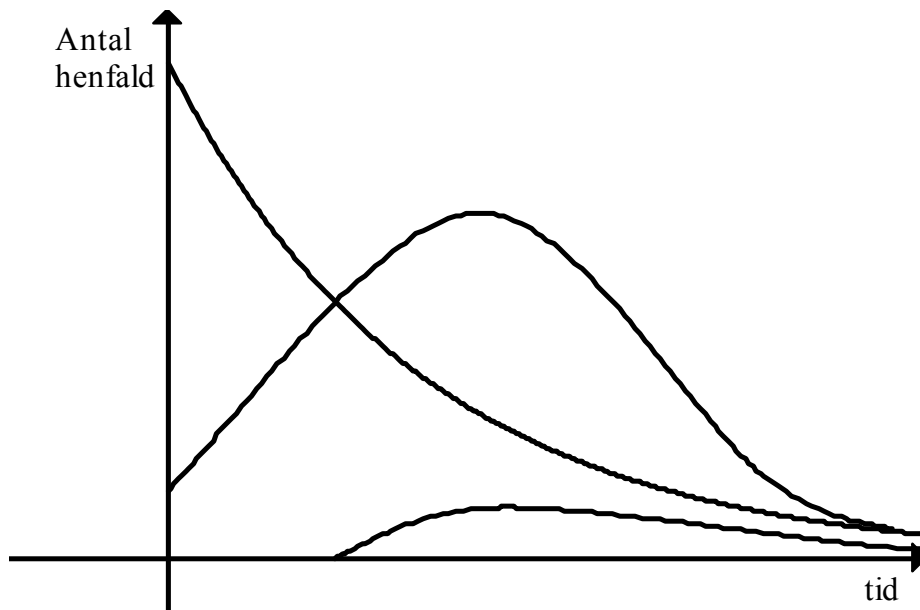
hvor c er en konstant, bestemt af begyndelsesbetingelserne.

ØVELSE 7

1. Sammenlign differentiaalligningerne (4) og (5). Hvad svarer tallene a og b til i (4)?
2. Vis ved udnyttelse heraf, at løsningen til (4) er:

$$N_2(t) = c \cdot e^{-k_2 \cdot t} + \frac{k_1}{k_2} \cdot N_1(t) \quad (6)$$

Ofte lader man computere udregne en løsning til en given differentiaalligning. Dette kaldes en *numerisk* løsning, idet vi ikke får en forskrift for $N_2(t)$, men en graf (eller tabelværdier). For tre stoffer ville forløbet af graferne for $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ være af følgende type:



Det kan være en god hjælp at forestille sig processerne som følger: En væske strømmer ned gennem en tragt med en lille munding; tragten er lavet af noget elastisk materiale, og når væskepresset vokser, udvider munden sig og lader mere slippe ud. Væsken løber ned i en ny tragt med samme egenskaber.

De enkelte tragtes indhold svarer til N_1 , N_2 osv. Halveringstiderne udtrykkes gennem tragtenes elasticitet: Lille halveringstid – hurtigt gennembløb, dvs. stor elasticitet. Lang halveringstid – langsomt gennembløb, dvs. snæver munding, der er sværere at udvide.

Af denne model fremgår nu en helt afgørende erkendelse: Først er alt stof i 1. tragt. Tragt nr. 2 er tom, men begynder at modtage fra 1. Mens væsken begynder at stige i 2, presses samtidig mere og mere ud af 2 og ned i 3. På et vist tidspunkt må der derfor indstille sig en *ligevægt*: Der løber lige meget ind og ud i tragt nr. 2. Det samme vil efterfølgende ske i tragt 3 osv.

For vores væskemodel sker der det, at vandstanden ikke stiger længere. Men derefter er den ikke *helt* stabil: Da tilførslen lige så langsomt falder fra tragt 1, vil den indtrufne ligevægt også langsomt bevæge sig nedad.

Men betragtet over korte tidsrum kan vi tale om en ligevægt.

Ligevægt betyder, at *ændringen* pr. tidsenhed i antal atomer er 0, eller sagt med andre ord, at $N_2'(t) = 0$:

$$\begin{aligned} N_2'(t) &= 0 && \Leftrightarrow \\ -k_2 \cdot N_2(t) + k_1 \cdot N_1(t) &= 0 && \Leftrightarrow \\ k_2 \cdot N_2(t) &= k_1 \cdot N_1(t) && \Leftrightarrow \\ \frac{N_2}{N_1} &= \frac{k_1}{k_2} && (7) \end{aligned}$$

Ligevægten udtrykkes altså i en formel, der siger, at forholdet mellem stofmængderne er det omvendte af forholdet mellem henfaldskonstanterne.

Det bliver mere ligetil ved at indføre halveringstiderne t_1 og t_2 , idet vi husker formel (3):

Indsæt og omskriv:

$$k_2 \cdot N_2 = k_1 \cdot N_1 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{t_2} \cdot N_2 = \frac{\ln 2}{t_1} \cdot N_1 \Leftrightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad (8)$$

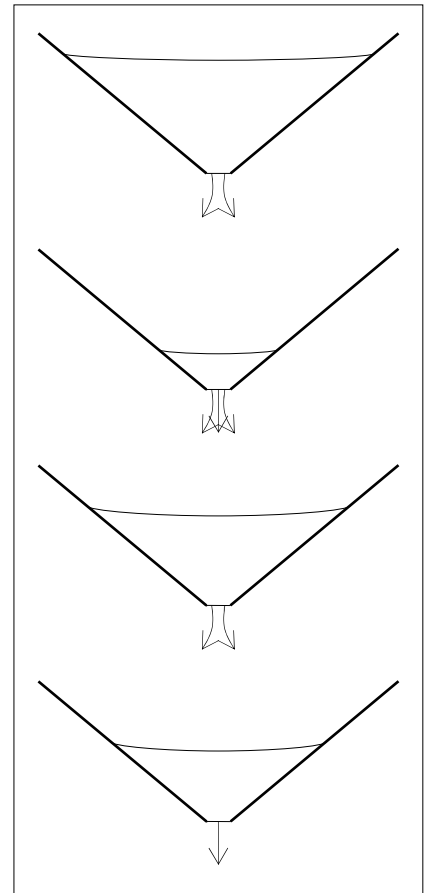
Dvs. forholdet mellem stofmængderne er lig med forholdet mellem halveringstiderne.

ØVELSE 8

Forsøg at give en sproglig forklaring på, hvorfor dette forhold er, hvad vi også ville forvente. Angrib f.eks. problemet ved at overveje, hvad der ville ske, hvis der var dobbelt så meget af N_1 .

Ligevægt betyder, at der strømmer lige meget ind og ud af en tragt.

Betragt skemaet over uranserien på side 18. Mellem Radium-226 og Bly-210 er der en række stoffer med så forsvindende halveringstider, at vi her ser bort fra dem. Ligevægt mellem disse to stoffer betyder, at der foregår lige mange omdannelser i hvert stof.



ØVELSE 9

Radium-226 har en halveringstid på 1600 år. Vis at såfremt der *ikke* tilføres nyt Radium-226, så er antallet af Radium atomer på 300 år reduceret til 87,8%.

Ud fra ovenstående ligevægtsbetragtninger og de lange halveringstider for Radium vil vi betragte mængden af radium som konstant over de 300 år, der er gået siden Vermeer malede sine billeder.

Og nu er vi klar til at anvende vores viden om radioaktivt henfald i et angreb på problemet: Hvem malede de omstridte Vermeer-malerier?

6. Falsknerierne bliver afsløret

Gennem mere end 2000 år har kunstnere anvendt et pigment kaldet *blyhvidt* i deres malning. Blyhvidt er en forbindelse af bly og ilt; det fremstilles ud fra bly, som igen er udsmeltet af blymalm. Som omtalt i forrige afsnit findes hele uranserien sammen med blyet i malmen. Specielt indeholder malmen Bly-210 i ligevægt med Radium-226.

I fremstillingen af blyhvidt renses for fremmede stoffer. Denne rensning fjerner ikke Bly-210, men derimod op mod 95% af mængden af Radium-226 (samt dennes umiddelbare »efterkommere«, Radon osv.).

Derved er ligevægten forstyrret. Lader vi $N_1(t)$ og $N_2(t)$ være antallet af henholdsvis Radium-226 og Bly-210-atomer, så har vi ifølge (8):

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

ØVELSE 10

Ved rensning til tiden t_0 ændres $N_1(t_0)$ til $0,05 \cdot N_1(t_0)$. Hvad sker der med $N_2(t)$? Forklar dels ud fra ligningen ovenfor, dels ud fra en beskrivelse af processen.

Da halveringstiden for Radium-226 er stor i forhold til de 300 år, kan vi med tilnærmelse betragte N_1 som konstant og får så fra (6):

$$N_2(t) = c \cdot e^{-k_2 \cdot t} + \frac{k_1}{k_2} \cdot N_1(t) \Leftrightarrow N_2(t) = c \cdot e^{-k_2 \cdot t} + \frac{k_1 \cdot N_1}{k_2},$$

hvor k er henfaldskonstanterne, og c er et tal der fastlægges ud fra begyndelsesbetingelserne – dvs. ud fra hvor *meget* stof der var fra starten.

Lad os nu fremover regne tiden ud fra det tidspunkt, da Vermeer skulle have malet de omstridte billeder. Ved processen mod van Meegeren er t så omkring 300 år.

$k_1 \cdot N_1$ er ifølge definitionen på henfaldskonstanter lig med antal omdannelser af Radium-226 pr. minut. Kald denne størrelse for R :

$$N_2(t) = c \cdot e^{-k_2 \cdot t} + \frac{R}{k_2}$$

ØVELSE 11

Find c ved at indsætte $t = 0$, og vis dernæst:

$$N_2(t) = \left(N_2(0) - \frac{R}{k_2} \right) \cdot e^{-k_2 \cdot t} + \frac{R}{k_2} \text{ eller } k_2 \cdot N_2(t) = (k_2 \cdot N_2(0) - R) \cdot e^{-k_2 \cdot t} + R \quad (9)$$

Det er t , det drejer sig om:

Hvis vi kan beregne t ud fra nogle aktuelle målinger på maleriet, kan vi fastslå om billedet er ægte. Hvis målinger i 1960'erne giver os en t -værdi omkring 300, er maleriet givetvis ægte, mens en t -værdi omkring 30 fortæller, det er malet i 1930'erne og altså er et falskneri.

Vi arbejder nu videre med ligningen (6) og ser, om vi kan sætte tal på alle størrelserne og dermed beregne t :

Ud fra en lille prøve af malingen kan man måle R : antal omdannelser pr. minut pr. gram af Radium-226, samt $k_2 \cdot N_2(t)$: antal omdannelser af Bly-210 pr. minut pr. gram. k_2 er også kendt, så eneste ukendte led er $k_2 \cdot N_2(0)$: antal omdannelser af Bly-210 på det tidspunkt, billedet blev lavet.

Denne størrelse kender vi ikke – og dog. Bly-210 var i ligevægt med den oprindelige mængde Radium-226, dvs. med den mængde Radium-226, der var i blymalmen. Da Radium-226 henfalder så langsomt, svarer dette groft sagt til den mængde, der i dag er i blymalm. Problemet er så blot, hvilken blymalm, der dannede råstoffet.

Vi kunne være så heldige, at alle blyminer stort set indeholder samme koncentration af Radium-226. Desværre er dette ikke tilfældet, som det fremgår af nedenstående tabel:

Prøver af malm og malmkoncentrat. Alle aktiviteter er målt i antal pr. gram blyhvidt.

Beskrivelse og kilde	Henfald pr. minut af Radon-226
Malmkoncentrat Oklahoma-Kansas	4,5
Knust råmalm Sydøstmissouri	2,4
Malmkoncentrat Sydøstmissouri	0,7
Malmkoncentrat Idaho	2,2
Malmkoncentrat Idaho	0,18
Malmkoncentrat Washington	140,0
Malmkoncentrat British Colombia	1,9
Malmkoncentrat British Colombia	0,4
Malmkoncentrat Bolivia	1,6
Malmkoncentrat Australien	1,1

En sådan usikkerhed – fra 0,18 til 140 omdannelser pr. minut pr. gram – giver ikke grundlag for at afsløre et falskneri. Men vi er alligevel ikke kørt helt fast:

Selv om vi ikke kan beregne t direkte, kan vi *indirekte* påvise, om maleriet er falsk.

De følgende øvelser drejer sig om at finde en sammenhæng mellem det aktuelle antal omdannelser, vi kan måle i dag, og så koncentrationen af uran i den oprindelige malm. Da vi ved, at koncentrationen af uran overalt på Jorden er ret lille, må der derfor også være en øvre grænse for det antal omdannelser, vi kan måle i malingen. Dette teoretisk bestemte tal vil til sidst blive sammenholdt med faktiske målinger.

ØVELSE 12

Først ønskes det ukendte led $k_2 \cdot N_2(0)$ isoleret. Vis ved omskrivninger af ligningen (9):

$$k_2 \cdot N_2(0) = k_2 \cdot N_2(t) \cdot e^{k_2 \cdot t} - R \cdot (e^{k_2 \cdot t} - 1) \quad (10)$$

Vi husker, at det ukendte led $k_2 \cdot N_2(0)$ måler antal omdannelser af Bly-210 på det tidspunkt, maleriet blev lavet.

ØVELSE 13

Beregning af Uran-koncentrationen i en blymalm ud fra en måling af antal omdannelser af Bly-210: Lad $N(t)$ angive antal Uran-238 atomer i et gram blymalm og k angive Uran-238's henfaldskonstant. Så gælder:

$$N'(t) = -k \cdot N(t)$$

Uran-238 er i ligevægt med Bly-210. Lad os nu antage, at der er 100 omdannelser af bly-atomer pr. gram pr. minut. Så er der tilsvarende 100 omdannelser af Uran-238 atomer, dvs.

$$N'(t) = -100$$

Indsæt i ovenstående ligning:

$$-100 = -k \cdot N(t)$$

Find talværdien for k i tabellen på side 17 og vis nu, at der i et gram af den pågældende blymalm er $3,42 \cdot 10^{17}$ Uran-238 atomer. (Pas på tidsenhederne!)

ØVELSE 14

Fra kemiundervisningen ved vi: 1 mol Uran-238 vejer 238 gram og indeholder $6,02 \cdot 10^{23}$ atomer.

1. Hvor mange Uran-238 atomer er der i et gram rent uran?
2. Vis at urankoncentrationen i den blymalm, vi betragtede i forrige øvelse, er ca. 0,014%.
3. Hvilken urankoncentration vil der være, hvis vi i stedet havde målt 10.000 omdannelser pr. gram pr. minut?
4. Hvor mange omdannelser pr. gram pr. minut ville vi få, hvis urankoncentrationen var 3%?

Jordskorpens klipper og malm indeholder ikke ret meget Uran-238. I gennemsnit er koncentrationen 0,00027%. Altså betydeligt lavere end det tal, vi beregnede i forrige øvelse, på 1,4% svarende til 10.000 omdannelser af Bly-210 (pr. gram pr. minut). Derfor virker 10.000 omdannelser som et meget højt tal.

Der findes imidlertid nogle meget sjældne malmårer med en Uran-238 koncentration på 2-3%. For at være på den sikre side vil vi derfor sige, at mere end 30.000 omdannelser af Bly-210 (pr. gram pr. minut) vil blive betragtet som et absurd resultat: Det ville give en koncentration af Uran-238 på mere end 4% (mere end 3 gange 1,4%).

Og nu kan vi få et gennembrud i vores undersøgelser.

Betragt ligningen (10):

$$k_2 \cdot N_2(0) = k_2 \cdot N_2(t) \cdot e^{k_2 \cdot t} - R \cdot (e^{k_2 \cdot t} - 1),$$

hvor $k_2 \cdot N_2(t)$ var antal omdannelser af Bly-210 pr. minut pr. gram, R det næsten konstante antal omdannelser af Radium-226 pr. minut pr. gram og k_2 henfaldskonstanten for Bly-210.

Vi antager, at Vermeer har malet billederne og sætter $t = 300$ år. Halveringstiden for Bly-210 er 22 år, og fra (3) har vi så:

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{22}$$

ØVELSE 15

Nogle af størrelserne regnes i omdannelser pr. minut, mens vi ved beregning af k og t regner i år. Hvorfor giver dette ikke en konflikt?

Vi skal nu til at måle på antal omdannelser af det radioaktive materiale; i praksis er det lettere at måle på omdannelser af Polonium-210 end på Bly-210, og da disse to må være i ligevægt (små halveringstider i forhold til de 300 år) er der samme antal omdannelser i polonium og i bly. Vi måler antal omdannelser i polonium pr. minut pr. gram og kalder dette tal P : $P = k_2 \cdot N_2(t)$

Alt dette indsættes nu i ligningen

$$k_2 \cdot N_2(0) = k_2 \cdot N_2(t) \cdot e^{k_2 \cdot t} - R \cdot (e^{k_2 \cdot t} - 1), \text{ og vi får}$$

$$k_2 \cdot N_2(0) = P \cdot e^{\frac{\ln 2}{22} \cdot 300} - R \cdot (e^{\frac{\ln 2}{22} \cdot 300} - 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$k_2 \cdot N_2(0) = P \cdot (e^{\ln 2})^{\frac{300}{22}} - R \cdot ((e^{\ln 2})^{\frac{300}{22}} - 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$k_2 \cdot N_2(0) = P \cdot 2^{\frac{300}{22}} - R \cdot (2^{\frac{300}{22}} - 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$k_2 \cdot N_2(0) \approx P \cdot 12734 - R \cdot (12734 - 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$k_2 \cdot N_2(0) \approx 12734 \cdot (P - R)$$

Kender vi P og R , henholdsvis antal omdannelser af polonium og radium, kan vi således beregne en talværdi for $k_2 \cdot N_2(0)$ og sluttelig vurdere, om dette er en realistisk talværdi.

Målinger på nogle af de omstridte malerier, samt kontrolmålinger på anerkendte Vermeer-malerier gav følgende resultater (alt i henfald pr. minut pr. gram blyhvidt):

Maleriets titel	P : Polonium-henfald	R : Radium-henfald
Kristus og disciplene ved Emmaus	8,5	0,8
Fødderne vaskes	12,6	0,26
En kvinde læser noder	10,3	0,3
En kvinde spiller luth	8,2	0,17
Kniplersken	1,5	1,4
Soldaten og den smilende pige	5,2	6,0

(Bemærk, at *Kvinde taget i hor* indeholdt koboltblå, og således allerede blev afsløret ved første retssag). For *Kristus og disciplene ved Emmaus* får vi nu ved indsættelse af tallene:

$$k_2 \cdot N_2(0) \approx 12734 \cdot (8,5 - 0,8) \approx 98,051,$$

hvilket er et helt uacceptabelt stort tal. Det ville svare til urankoncentrationer på omkring 15%. *Dette maleri er derfor et falskneri.*

ØVELSE 16

Hvilke af malerierne i skemaet kan afsløres som falsknerier?

Således afgjorde de små atomer spørgsmålet om det store falskneri. Naturligvis kunne man forestille sig, at malerierne allerede var fremstillet som falske efterligninger på kunstnerens egen tid. Det ville ikke kunne afsløres med sådanne metoder, men måtte hovedsageligt støtte sig til en stilanalyse.

7. Bilag 1. Løsning af differentialligninger

En ligning kaldes en *differentialligning*, hvis den ubekendte, vi leder efter, er en *funktion* f , og hvis denne funktion optræder i ligningen med sin afledede f' . Normalt indgår funktionen f også selv i ligningen. Der kan også være tale om, at højere afledede som f'' optræder. I så fald taler vi om 2. ordens differentialligninger (eller 3. ordens osv.). Dem vil vi ikke beskæftige os med her.

En førsteordens differentialligning kan se således ud:

$$2y' + 3y = \sin x,$$

hvor der er tradition for at anvende betegnelsen y for den ubekendte funktion. Når vi tager fat på at *løse* differentialligningen, er opgaven at finde en funktion f , der indsat på y 's plads gør ligningen sand. Ofte er der flere løsninger til ligningen. Mængden af *alle* løsninger til en differentialligning kaldes den *fuldstændige* løsning.

Differentialligninger er normalt meget vanskelige at løse, ja ofte »umulige«, forstået på den måde, at vi ikke kan finde en regneforskrift for den søgte løsning, der kan beskrives ved hjælp af de klassiske funktioner.

I sådanne tilfælde må man lave det, vi kalder en *numerisk løsning*. Det betyder, at man regner sig frem til støttepunkter for den søgte funktion, stykke for stykke, nu om dage ved brug af en computer.

Vi vil i første omgang se på så simple differentialligninger, at vi kan løse dem eksakt. At løse en differentialligning er i en vis forstand at regne baglæns i forhold til differentialregningen. I differentialregning lærer man at finde afledede funktioner af de mest komplicerede udtryk. Dette er ikke specielt vanskeligt, man skal blot have to værktøjer ved hånden: Dels skal man kende de afledede funktioner til alle de klassiske som $\cos x$, e^x osv. (og dem skal man kunne udenad), og dels skal man kunne sine regneregler såsom differentiation af sammensat funktion, af et produkt osv. At regne baglæns betyder bl.a. at lære at gennemskue et udtryk, så man kan se »hvor det stammer fra«; derfor indeholder løsning af differentialligninger ofte elementer af »gætterier«, men ikke tilfældige gæt ud i luften: Kendskabet til differentialregningen giver netop mulighed for at give kvalificerede gæt.

Et af de mest værdifulde redskaber er følgende sætning fra differentialregningen:

MONOTONISÆTNINGEN

Hvis f er differentiabel i et interval I , så gælder:

$$f'(x) > 0 \text{ for alle } x \in I \Rightarrow f \text{ er voksende i } I$$

$$f'(x) < 0 \text{ for alle } x \in I \Rightarrow f \text{ er aftagende i } I$$

$$f'(x) = 0 \text{ for alle } x \in I \Rightarrow f \text{ er konstant i } I$$

Sætningen anvendes ustandselig i differentialregning, bl.a. til bestemmelse af monotoniforhold. Læg mærke til, at det er de to første dele af sætningen, vi anvender i sådanne opgaver.

Den tredje del udtaler sig om $f'(x) = 0$. I differentialregningen er vi vant til at knytte dette til undersøgelser af lokale ekstrema. Men det er i situationer, hvor $f'(x) = 0$ i *et enkelt punkt*. Sætningen udtaler sig om den situation, hvor $f'(x) = 0$ i et helt interval. Er dette tilfældet, er f en konstant funktion.

Sætningen er svær at bevise, men intuitivt indlysende: $f'(x) = 0$ betyder, at grafen har vandret tangent, og hvis grafen har vandret tangent i *alle* punkter, så *må* den være konstant.

Vi udnytter nu sætningen til at vise:

SÆTNING 1

Den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$$y' = k \cdot y,$$

hvor k er et givet tal, er mængden af alle funktioner med forskrift:

$$y = c \cdot e^{kx},$$

hvor c er en konstant, dvs. ethvert reelt tal c giver en løsning.

EKSEMPEL 1

Den fuldstændige løsning til:

$$y' = -1,5 \cdot y$$

er alle funktionerne:

$$y = c \cdot e^{-1,5x},$$

hvor c er en konstant.

Tegn selv på en grafisk lommeregner graferne for fire af disse: For $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$ og $c = -0,5$

Bevis for sætning 1

Vi kender produktreglen: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, og vi kan differentiere e^{-kx} , hvor k er en konstant:

$$(e^{-kx})' = -k \cdot e^{-kx}$$

Da $e^{-kx} \neq 0$ for alle x , kan vi gange ligningen igennem med det:

$$y' = k \cdot y \Leftrightarrow$$

$$y' - k \cdot y = 0 \Leftrightarrow$$

$$y' \cdot e^{-kx} - k \cdot y \cdot e^{-kx} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y' \cdot e^{-kx} + y \cdot (-k) \cdot e^{-kx} = 0 \Leftrightarrow (\text{differentiation af } e^{-kx})$$

$$y' \cdot e^{-kx} + y \cdot (e^{-kx})' = 0 \Leftrightarrow (\text{produktreglen})$$

$$(y \cdot e^{-kx})' = 0$$

Monotonisætningen giver nu, at der findes en konstant c , så:

$$y \cdot e^{-kx} = c \Leftrightarrow$$

$$y \cdot e^{-kx} \cdot e^{kx} = c \cdot e^{kx} \Leftrightarrow$$

$$y = c \cdot e^{kx}$$

hvilket var, hvad vi ønskede at vise.

EKSEMPEL 2

Find den løsning f til differentialligningen:

$$y' = 1,7 \cdot y,$$

hvorom der gælder, at $f(0) = 3$

Først finder vi den fuldstændige løsning:

$$y = c \cdot e^{1,7x}$$

Dernæst indsættes $f(0) = 3$:

$$3 = c \cdot e^{1,7 \cdot 0} \Leftrightarrow c = 3$$

Konklusion: Den søgte løsning er $f(x) = 3 \cdot e^{1,7x}$.

ØVELSE 1

Find den løsning til differentialligningen:

$$y' = -y,$$

hvis graf går gennem punktet (1,1)

ØVELSE 2

Find den løsning f til differentialligningen

$$y' = 0,5 \cdot y,$$

hvorom der gælder, at $f'(0) = 2$

Ved hjælp af sætning 1 kan vi nu vise den sætning, vi i materialet trækker på hele tiden:

SÆTNING 2

Den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$$y' = ay + b,$$

hvor a og b er konstante tal, er mængden af alle funktioner med forskrift:

$$y = c \cdot e^{ax} - \frac{b}{a},$$

hvor c er en konstant, dvs. ethvert reelt tal c giver en løsning.

EKSEMPEL 3

Den fuldstændige løsning til:

$$y' = -0,2y + 50$$

er alle funktioner med forskrift:

$$y = c \cdot e^{-0,2x} - \frac{50}{-0,2} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{-0,2x} + 250$$

Tegn grafen for $c = 1$, $c = 2$ og $c = -0,5$ på din grafiske lommeregner. Start med at overveje indretningen af grafvinduet.

Bevis for sætning 2

Omskriv differentialligningen:

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a \left(y + \frac{b}{a} \right)$$

og lav en substitution:

$$z = y + \frac{b}{a}$$

Så er $z' = y'$, idet $\frac{b}{a}$ er en konstant. Indsæt:

$$z' = a \cdot z$$

Denne giver sætning 1 os en løsning til:

$$z = c \cdot e^{ax}$$

Substituer tilbage:

$$y + \frac{b}{a} = c \cdot e^{ax} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{ax} - \frac{b}{a},$$

hvilket netop var, hvad sætningen siger.

Hvis $a < 0$, vil $e^{ax} \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$, og $e^{ax} \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow -\infty$.

Derfor: Hvis $a < 0$, vil $y = c \cdot e^{ax} - \frac{b}{a} \rightarrow -\frac{b}{a}$ for $x \rightarrow \infty$,

dvs. $y = -\frac{b}{a}$ er vandret asymptote for grafen.

ØVELSE 3

1. Find den løsning f til differentialligningen:

$$y' = -y + 1,$$

hvorom der gælder, at $f(0) = 4$

2. Find den løsning f til differentialligningen:

$$y' = 2y - 3,$$

hvorom der gælder, at $f(0,5) = 5,5$

Differentialligninger af typen $y' = ay + g(x)$, hvor $g(x)$ er en funktion, der ikke behøver at være konstant, er en smule vanskeligere at klare. Differentialligninger, som er svære eller direkte umulige at løse eksakt, vil vi ofte vælge at løse »numerisk«, ved simpelthen at indtaste differentialligningen i et passende matematikprogram på en computer og så lade denne udarbejde støttepunkter til den ønskede funktion.

Det giver os ikke et funktionsudtryk, men kan dog give en graf, der viser forløbet; og vi kan med god nøjagtighed regne os frem til ønskede værdier. Gennemgang af numerisk løsning ligger uden for disse rammer.

Vi valgte en anden teknik, der er meget anvendt indenfor teorien for løsning af differentialligninger: Det viser sig nemlig ofte, at nogle af de funktioner der optræder, her $g(x)$, kan tilnærmes med en konstant, uden vi begår fejl af betydning. Og derefter kan vi løse ligningen.

Den omtalte type differentialligning kunne vi imidlertid godt have løst eksakt. Metoden er blot en videreudvikling af den teknik, vi anvendte til løsning af sætning 1 og sætning 2. I de følgende øvelser føres du frem til en løsningsmetode, der ikke alene klarer den omtalte type, men også endnu mere komplicerede differentialligninger.

ØVELSE 4

Repetér beviset for sætning 1.

Funktionen e^{-kx} blev ganget på for at sikre, at vi kunne bruge produktreglen. Og i valget af netop denne funktion lod vi os lede af vort kendskab til differentiation af sammensat funktion.

1. Betragt differentialligningen:

$$y' = 2x \cdot y$$

Udnyt samme teknik som i sætning 1; men denne gang ganger vi med e^{-x^2} .

Omskriv ved hjælp af reglerne for differentiation af sammensat funktion og produktreglen, og udnyt dernæst igen monotonisætningen til at vise, at samtlige løsninger kan skrives på formen:

$$y = c \cdot e^{x^2}$$

2. Løs med samme teknik differentialligningen $y' = \cos(x) \cdot y$.

3. Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion, og $F(x)$ betegne en stamfunktion til $f(x)$. Vis at samtlige løsninger til differentiaalligningen

$$y' = f(x) \cdot y$$

kan skrives på formen:

$$y = c \cdot e^{F(x)}$$

ØVELSE 5

Løs differentiaalligningen

$$y' = (3x^2 - 4) \cdot y,$$

og find dernæst de løsninger, hvis grafer går henholdsvis gennem punkterne (0,3), (2,0) og (-1,1).

ØVELSE 6

Løs differentiaalligningen

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot y$$

Skitsér skaren af løsningskurver til differentiaalligningen. Anvend gerne computer hertil.

ØVELSE 7

Betragt den *inhomogene* differentiaalligning

$$y' = -2y + e^x$$

(Inhomogen betyder, at ligningen indeholder et led, hvori y -funktionen ikke optræder, heller ikke med sin afledede).

1. Gennemgå løsningsmetoden til den *homogene* ligning

$$y' = -2y,$$

og gør dig klart, hvor det er, vi anvender monotonisætningen.

2. Anvend nu samme teknik til at løse den *inhomogene* ligning, ved først at omskrive til:

$$(y \cdot e^{2x})' = e^{3x}$$

Vis herved at samtlige løsninger udgøres af funktionerne

$$y = c \cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x,$$

hvor c er en konstant.

ØVELSE 8

Vis at samtlige løsninger til

$$y' = -k_2 \cdot y + k_1 \cdot e^{-k_1 \cdot t}$$

udgøres af funktionerne med forskrift

$$y = c \cdot e^{-k_2 \cdot t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot e^{-k_1 \cdot t}$$

ØVELSE 9

Løs differentiaalligningen

$$y' = \cos(x) \cdot y + e^{\sin(x)}$$

ØVELSE 10

1. Vis at:

$$\int e^{-x} \cos(x) dx = \frac{1}{2}(e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x)) + k$$

(Benyt partiel integration to gange, og betragt det søgte integral som den ubekendte i den fremkomne ligning. Find så integralet ved at løse ligningen).

2. Løs differentiallygningen

$$y' = y + \cos(x)$$

ved hjælp af omskrivningen

$$(y \cdot e^{-x})' = e^{-x} \cdot \cos(x)$$

ØVELSE 11

Anvend samme teknik som i de tidligere øvelser til at løse differentiallygningen

$$y' = 2xy + \sin(x),$$

og vis herved, at samtlige løsninger kan skrives på formen

$$y = c \cdot e^{-x^2} + e^{x^2} \cdot \int e^{-x^2} \cdot \sin(x) dx$$

Bemærk: det sidste integral kan ikke udtrykkes ved hjælp af de klassiske funktioner. Dette er et langt mere almindeligt forekommende problem, end man umiddelbart ville tro. I differentialregningen lærer man at differentiere alle funktioner, uanset hvor komplicerede de synes at være. Da integralregning i en vis forstand »blot« er det omvendte af differentialregning, skulle man tro, det var muligt at finde stamfunktioner til, om ikke alle, så dog de fleste funktioner. Men det er som sagt ikke tilfældet. På den anden side ved vi, at alle kontinuerte funktioner har stamfunktioner, så det har god mening at opskrive det ubestemte integral af en vilkårlig kontinuert funktion – uanset vi ikke »kan løse integralet«, dvs. uanset vi ikke kan udtrykke integralet ved hjælp af de klassiske funktioner: polynomier og polynomiumsbrøker, potensfunktioner, eksponential- og logaritmefunktioner, de trigonometriske og deres omvendte funktioner.

Gennem historien har matematikere anvendt sådanne integraler til at definere nye funktioner med. Vi kender således fra sandsynlighedsregningen fordelingsfunktionen for normalfordelingen, den såkaldte Φ -funktion. Bortset fra nogle konstanter er Φ -funktionen et integral af e^{-x^2} . Φ -funktionens værdier kan normalt ikke bestemmes eksakt, hvorfor den er tabellagt og i dag indlagt på de fleste større lommeregnerne (grafregnerne).

Men i virkeligheden adskiller den sig ikke i denne henseende fra logaritmefunktioner og de trigonometriske funktioner. Også disse har deres oprindelse i integralregningen.¹⁶ Vi er bare så vant til at finde funktionsværdierne på lommeregneren, at vi af og til glemmer, at dette kun giver en numerisk tilnærmelse. Før lommeregnerens tid optrådte logaritmefunktionerne og de trigonometriske funktioner, helt parallelt med f.eks. Φ -funktionen, med tabellagte værdier. Når vi synes, at udtrykket e^{-x^2} virker mere eksakt og brugervenligt end f.eks. $\int e^{-x^2} dx$, skyldes det altså alene vanetænkning og adgangen til regnetekniske hjælpemidler.

ØVELSE 12

Vis at samtlige løsninger til differentiallygningen

¹⁶ Den naturlige logaritme er et integral af x^{-1} . De trigonometriske funktioner defineres helt præcist ud fra deres omvendte funktioner. Og disse er kurveintegraler, idet de måler længden af bestemte cirkelbuer.

$$y' = f(x) \cdot y + g(x)$$

er funktioner med forskriften

$$y = c \cdot e^{F(x)} + e^{F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{-F(x)} dx,$$

hvor c er en konstant, og F er en stamfunktion til f .

ØVELSE 13

Betragt en radioaktiv henfaldskæde

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3,$$

hvor $y(t)$ angiver mængden af det givne radioaktive stof, målt i en eller anden enhed.

1. Begrund differentialligningerne

$$y_1' = -k_1 \cdot y_1 \quad y_2' = -k_2 \cdot y_2 + k_1 \cdot y_1 \quad y_3' = -k_3 \cdot y_3 + k_2 \cdot y_2,$$

hvor k_1 , k_2 og k_3 er de respektive henfaldskonstanter.

2. Løs den første differentialligning og indsæt udtrykket i differentialligningen for y_2 , så vi får

$$y_2' = -k_2 \cdot y_2 + c_1 \cdot k_1 \cdot e^{-k_1 \cdot t}$$

Anvend resultatet af øvelse 8 eller vis igen, at denne har løsningen:

$$y_2 = c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot t} + c_1 \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot e^{-k_1 \cdot t}$$

3. Indsæt udtrykket for c_2 i y_3 og vis:

$$c_3 = c_1 \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3 - k_2} - c_1 \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot \frac{k_2}{k_3 - k_1}$$

I det følgende vil vi sætte tal på konstanterne og prøve at regne på de faktiske henfaldssituationer. Som en regneteknisk hjælp hertil er det en god idé at indtaste formlerne for y_1 , y_2 og y_3 i din grafiske lommeregner. Gør det på en sådan måde, at du lader t være den variable x , og giver konstanterne bogstavnavne, f.eks. kalder k_1 , k_2 og k_3 for k , l og m , samt anvender bogstavet c for konstanten c_1 . Indtastningen er lidt besværlig; men den vil være en god hjælp senere.

ØVELSE 15

I den samlede kæde for uranfamilien er der stoffer med meget lang halveringstid sammen med stoffer, der har ekstremt kort halveringstid. Således har Protactinium-234 en halveringstid på 1,2 minut og Radon-222 en halveringstid på 3,8 dage.

Vi har påstået, at vi kunne se bort fra disse stoffer ved simpelthen at springe dem over.

Betragt nu starten af kæden, og lad y_1 , y_2 og y_3 angive mængderne af henholdsvis Uran-238, Thorium-234 og Uran-234, idet vi ser bort fra Protactinium. (Vi vil vise, at vi kan se bort fra ét stof, og kan vi det, kan vi naturligvis også se bort fra flere med meget kortere halveringstider.)

1. Vis: $k_1 = 1,54 \cdot 10^{-10}$ $k_2 = 10,5416$ $k_3 = 2,77 \cdot 10^{-6}$

2. Sæt $c_1 = 10^{20}$ (antal U-238 atomer til tiden 0 i det undersøgte stof).
Vis ud fra formlerne i øvelse 14:

$$c_2 = -1,46 \cdot 10^9 \quad c_3 = -5,56 \cdot 10^{12}$$

3. Vis at forskrifterne bliver:

$$y_1 = 10^{20} \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-10} \cdot t}$$

$$y_2 = -1,46 \cdot 10^9 \cdot e^{-10,5416 \cdot t} + 1,46 \cdot 10^9 \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-10} \cdot t}$$

$$y_3 = -5,56 \cdot 10^{15} \cdot e^{-2,77 \cdot 10^{-6} \cdot t} + 1,46 \cdot 10^9 \cdot e^{-10,54 \cdot t} + 5,56 \cdot 10^{15} \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-10} \cdot t}$$

4. Drag nu nogle foreløbige konklusioner vedrørende mængden af thorium (y_2 -stof) ud af den samlede stofmængde.
5. Hvis vi derefter ser helt bort fra thorium og forestiller os processen forløber uden mellemlid fra U-238 til T-234, ville vi få:

$$k_1 = 1,54 \cdot 10^{-10} \quad k_2 = 2,77 \cdot 10^{-6}$$

Vis at i dette tilfælde bliver:

$$c_1 = 10^{20} \quad c_2 = -5,56 \cdot 10^{15} \quad \text{sampt}$$

$$y_1 = 10^{20} \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-10} \cdot t} \quad y_2 = -5,56 \cdot 10^{15} \cdot e^{-2,77 \cdot 10^{-6} \cdot t} + 5,56 \cdot 10^{15} \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-10} \cdot t}$$

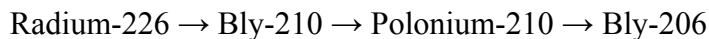
6. Sammenlign nu de to udtryk for mængden af Uran-234 fra henholdsvis punkt 3 og 5. Drag en konklusion om betydningen af at tage hensyn til »det indskudte stof« thorium i det samlede regnskab.¹⁷

ØVELSE 16

Betragt dernæst den sidste del af henfaldskæden, idet vi herefter helt ser bort fra stoffer med meget kort halveringstid:

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4,$$

hvor de 4 stoffer er



Vi vil nu bl.a. vise, at der er ligevægt mellem bly og polonium. Dette betyder som omtalt i teksten, at vi kan måle på det stof, hvor det teknisk er lettest.

1. Vis: $k_1 = 4,33 \cdot 10^{-4} \quad k_2 = 0,0315 \quad k_3 = 1,833$
2. Sæt $c_1 = 10^{13}$ (denne størrelsesorden for antal radiumatomer svarer til størrelsesordenen på 10^{20} Uran-238 atomer, som vi tog udgangspunkt i i øvelse 15 – dette kan indses ud fra overvejelserne i fodnoten til øvelse 15. Vis ud fra formlerne i øvelse 14:

¹⁷ Bemærk i øvrigt som en slags kontrol, at 1) forholdet mellem halveringstiderne er 18.000, og 2) forholdet mellem antal atomer til tiden 5 mia. år efter er 17.985. Sammenlign med øvelsen på side 20, hvor vi indså: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_1}{t_2}$.

$$c_2 = -1,39 \cdot 10^{11} \quad c_3 = 4,13 \cdot 10^7$$

og vis at forskrifterne bliver:

$$y_1 = 10^{13} \cdot e^{-4,33 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

$$y_2 = -1,39 \cdot 10^{11} \cdot e^{-0,0315 \cdot t} + 1,39 \cdot 10^{11} \cdot e^{-4,33 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

$$y_3 = 4,13 \cdot 10^7 \cdot e^{-1,833 \cdot t} - 2,43 \cdot 10^9 \cdot e^{-0,0315 \cdot t} + 2,396 \cdot 10^9 \cdot e^{-4,33 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

3. Læg de fundne konstanter ind i lommeregneren, så du nu kan udnytte de indtastede forskrifter til at finde tabelværdier. Udfyld nedenstående skema:

Tiden	y_1 (Radium)	y_2 (Bly)	y_3 (Polonium)
0	10^{13}	0	0
50	$9,8 \cdot 10^{12}$	$1,1 \cdot 10^{11}$	$1,84 \cdot 10^9$
100			
150			
200			
250			
300			
350			

4. Vi måler antal henfald pr. tid. Dette er matematisk lig med $y'(t)$ – på nær et fortegn, idet y er eksponentielt aftagende – og vi ved:

$$y'(t) = -k \cdot y(t)$$

Sammenlign nu $k \cdot y$ for de tre stoffer ved at udfylde nedenstående. Det gøre regneteknisk lettest ved at redigere de tre funktionsudtryk i lommeregneren, så der står $k_1 \cdot y_1$ osv. og dernæst bede lommeregneren udregne værdierne:

Tiden	$k_1 \cdot y_1$ (Radiumhenfald) ¹⁸	$k_2 \cdot y_2$ (Blyhenfald)	$k_3 \cdot y_3$ (Poloniumhenfald)
0	4,33	0	0
50	4,24	3,39	3,3
100			
150			
200			
250			
300			
350			

Husk billedet med væsken, der løber ned fra tragt til tragt: Ligevægten mellem bly og polonium indstiller sig allerede efter 150 år. Efter 300 år får vi med 5 cifre $y_2(300) = 3,8552$ og $y_3(300) = 3,8561$.

¹⁸ Bemærk at t hos os måles i antal år. Derfor det store antal henfald. Enheden er milliarder henfald.

Vores beregninger har givet os en smuk bekræftelse på det intuitive billede, vi havde af ligevægt, og dokumenteret, at vi havde lov til at foretage målingerne på polonium.

KONKLUSION PÅ VORE ØVELSER

De sidste beregninger, vi foretog, demonstrerede ligevægten mellem polonium og bly. Men abellen viser også, at polonium og radium tilnærmelsesvis er i ligevægt efter 300 år. Slår vi tilbage og betragter de faktiske målinger på malerierne, ser vi netop denne overensstemmelse ved de ægte Vermeer-malerier.

Et nyt maleri ville under ingen omstændigheder give en sådan ligevægt. Dels får vi følgende tabelværdi efter 30 år (målt i milliarder henfald):

$$\text{Radium: } y_1(30) = 4,27$$

$$\text{Polonium: } y_3(30) = 2,6$$

Og dels er der sket en oprensning, hvorved 95% eller mere af radiumindholdet er fjernet, mens mængden af bly og polonium stort set er uændret.

På grund af den lange halveringstid for radium vil vi regne med en fast mængde bly og polonium, som stort set vil være uforandret gennem perioden, så tallet for poloniums henfald efter 30 år stadig er ca. 2,6.

Derimod er antallet af radiumatomer nu reduceret til under $\frac{1}{20}$ af ovenstående (under 5%) eller under 0,2.

Størrelsesordenen for antal henfald i nye malerier ville derfor forventes at være

$$\text{Radium: } \text{Mindre end } 0,2$$

$$\text{Polonium: } \text{Omkring } 2,6$$

eller mere end 10 gange så mange poloniumhenfald som radiumhenfald.

Se igen i tabellen over de faktiske målinger: Der er en smuk overensstemmelse mellem det, vi har målt, og det, vi ville forvente ved nye malerier. van Meegerens Vermeer-billeder var derfor falske.

Men hvad med størrelsesordenen for antal henfald? Er de faktiske absolutte tal fra tabellen også i overensstemmelse med det, vi ville forvente? Vi har regnet med antal henfald pr. år. 4 mia. henfald pr. år svarer til 7610 pr. minut.

Vi tog endvidere udgangspunkt i et samlet tal på 10^{20} Uran-238 atomer. Lad os betragte 1 gram med en urankoncentration på 0,014%. Vi har tidligere i teksten, i øvelse 14, beregnet antallet af Uran-238 atomer i et sådant gram til $3,5 \cdot 10^{17}$. Ved at sammenholde forholdet mellem halveringstiderne giver dette et *samlet antal radiumatomer* på $1,7 \cdot 10^9$, sammenlignet med vores udgangspunkt i beregningerne på i alt 10^{13} radiumatomer.

Omregnes nu antal henfald pr. minut pr. gram ved at reducere de 10^{13} til $1,7 \cdot 10^9$, får vi ca. 1,3 henfald pr. minut, dvs. i den størrelsesorden, som vi ser i tabellen over de faktiske målinger. Vi kender ikke urankoncentrationen – der kan være lidt mere eller 10-20 gange mindre. Og det vil naturligvis veksle fra billede til billede.

Men samlet set har vi opnået en tilfredsstillende overensstemmelse mellem teoriens forudsigelser og de praktiske målinger.

8. Bilag 2. Opgaver fra afsnit 3 og 4

1. Nævn nogle årsager til, at det økonomiske og kulturelle tyngdepunkt i Europa i 1550-1650 blev forskudt fra Norditalien til Nederlandene. Slå gerne op i din historiebog.
2. Beskriv nogle af de temaer, der blev afgørende i den nederlandske frihedskrig.
3. Hvilke motiver dominerede i maleriet *før* den hollandske guldalder? Hvilke nye motiver blev dominerende i det hollandske maleri under og efter frihedskrigen?

4. På hvilke måder påvirkede calvinismen malerkunsten? Kender du eksempler fra Danmark på, at billedkunsten blev påvirket af reformationen efter 1536?
5. Lav en årstalsliste over Leonardo, Michelangelo, Rubens, Rembrandt, Frans Hals og Vermeer.
6. Lav en årstalsliste over nogle vigtige begivenheder fra Konstantinopels fald 1453 til Trediveårskrigen afslutning i 1648.
7. Placer på din årstalsliste:
 - a) Udgivelsen af Kopernikus' bog, hvori hans verdensbillede med Solen i centrum beskrives.
 - b) Tycho Brahes opdagelse af den nye stjerne, der omstødte forestillingen om verdensrummets uforanderlighed.
 - c) Keplers opdagelse af de elliptiske planetbaner, der omstøder forestillingen om cirkelbevægelsen som den eneste mulige for planeterne.
 - d) Processen mod Galilei, hvor den moderne videnskab skiller sig ud som en selvstændig del af åndelig virksomhed.
8. Hvor boede Vermeer? Hvor boede Rembrandt? Find det på et kort. Hvad levede Vermeer af?
9. Nævn nogle ligheder og nogle forskelle mellem Vermeers og Rembrandts maleteknik.
10. Hvad kan årsagen være til, at Vermeer blev »glemt«. Hvornår blev han genopdaget?
11. Selv om der ikke kan gives en fast definition på, hvad et mesterværk indenfor malerkunsten er, så må der dog være nogle fælles holdepunkter. Prøv at sætte ord på, hvad du mener, der må kræves, for at vi kan tale om et »mesterværk«. Tag f.eks. udgangspunkt i begrebet »nyskabende« og inddrag emnerne: Kunstnerens tekniske formåen; farvevalget; kompositionen; motivvalg; kunstnerens idé med billedet.
12. Hvad forstår man ved *centralperspektivet*? Hvilken sammenhæng er der, om nogen, mellem den nye teknik, hvor centralperspektivet bliver dominerende, og det nye menneskesyn, der vokser frem under renæssancen?
13. Hvad forstås ved teknikken »pointilisme«?
14. Vermeers teknik siges at have foregrebet impressionisterne; hvad er karakteristisk for impressionisternes maleteknik? Er der også en sammenhæng mellem motivverdenen hos impressionisterne og hos Vermeer?
15. Hvad er et »Camera Obscura«?
16. Hvilken teknik kan en maler anvende, når han ønsker at »lede« vore øjne rundt i billedet for derefter at fremhæve det, han ønsker, skal stå centralt?
17. Giv en kort fremstilling af, hvad *barok* er, ledsaget af nogle eksempler. Koncentrér din fremstilling om billedkunst og skulptur.

9. Bilag 3. Bredius' artikel fra 1937

A NEW VERMEER BY ABRAHAM BREDIUS

IT is a wonderful moment in the life of a lover of art when he finds himself suddenly confronted with a hitherto unknown painting by a great master, untouched, on the original canvas, and without any restoration, just as it left the painter's studio! And what a picture! Neither the beautiful signature "I. V. Meer" (I.V.M. in monogram) nor the *pointillé* on the bread which Christ is blessing, is necessary to convince us that we have here a—I am inclined to say—the masterpiece of Johannes Vermeer of Delft, and, moreover, one of his largest works (1.29 m. by 1.17 m.), quite different from all his other paintings and yet every inch a Vermeer. The subject is *Christ and the Disciples at Emmaus* and the colours are magnificent—and characteristic: Christ in a splendid blue; the disciple on the left, whose face is barely visible, in a fine grey; the other disciple on the left in yellow—the yellow of the famous Vermeer at Dresden, but subdued so that it remains in perfect harmony with the other colours. The servant is clad in dark brown and dark grey; her expression is wonderful. Expression, indeed, is the most marvellous quality of this unique picture. Outstanding is the head of Christ, serene and sad, as He thinks of all the suffering which He, the Son of God, had to pass through in His life on earth, yet full of goodness. There is something in this head which reminds me

of the well-known study in the Brera Gallery at Milan, formerly held to be a sketch by Leonardo for the Christ of the *Last Supper*. Jesus is just about to break the bread at that moment when, as related in the New Testament, the eyes of the Disciples were opened and they recognized Christ risen from the dead and seated before them. The Disciple on the left seen in profile shows his silent adoration, mingled with astonishment, as he stares at Christ.

In no other picture by the great Master of Delft do we find such sentiment, such a profound understanding of the Bible story—a sentiment so nobly human expressed through the medium of the highest art.

As to the period in which Vermeer painted this masterpiece, I believe it belongs to his earlier phase—about the same time (perhaps a little later) as the well-known *Christ in the House of Martha and Mary* at Edinburgh (formerly in the Coats collection). He had given up painting large compositions because they were difficult to sell, and painters like Dou and Mieris were already getting big prices for their smaller works.

The reproduction [PLATE] can only give a very inadequate idea of the splendid luminous effect of the rare combination of colours of this magnificent painting by one of the greatest artists of the Dutch school.

10. Bilag 4. Anerkendte og forfalskede Vermeer-malerier

De fleste malerier findes på (19) i en fin gengivelse (cd-rom). I skemaet er kun anført de fire, som man kan arbejde med. Alle Vermeers malerier er gengivet i (1) og (8), dog kun få af dem i farver. Disse værker findes imidlertid ikke på danske biblioteker. I det nye engelske værk (21) er samtlige malerier gengivet i farver. Nedenfor angives de tilgængelige bøger, hvori malerierne kan ses.

Titel	Anslået årstal	Museum	Gengivet i: (bilag 5)
Dianas hvil (af og til: Diana med nymfer)	1654	Mauritshuis, Haag	5, 14
Kristus hos Martha og Maria	1655	National Gallery of Scotland, Edinburgh	5, 15
Ruffersken*	1656	Gemäldegallerie, Dresden	5
Sovende pige	1656	Metropolitan Museum of Art, New York	
Soldaten og den smilende pige	1657	Frick Collection, New York	5, 14
Pige der læser et brev ved et vindue	1657-58	Gemäldegallerie, Dresden	5
Pige der drikker vin med en herre	1658-60	Staatliche Museum, Berlin	
Pige der drikker vin med to kavalere	1659	Herzog-Anton-Ulrich- Museum, Braunschweig	14
Den lille gade	1658	Rijksmuseum, Amsterdam	5, 14, 17
Musiklektionen	1659	Frick Collection, New York	

Udsigt over Delft	1660	Mauritshuis, Haag	5, 15, 19
En herre og dame ved et spinet	1660	Buckingham Palace, London	5, 14
Ung kvinde med en vandkande	1660	Metropolitan Museum of Art, New York	5
Koncerten	1660	Isab. Stewart Gardner Museum, Boston	
Køkkenpige (af og til: Mælkepigen)	1660	Rijksmuseum, Amsterdam	5, 9, 15, 16
Perlekæden	1665	Staatliche Museum, Berlin	5
Perlevejersken	1665		5, 19
Pigeansigt	1662		
Lutspilleren	1665	Metropolitan Museum of Art, New York	
Pigeansigt (af og til: Pigen med turban, eller: Ung pige med perle)	1665	Mauritshuis, Haag	5, 14, 15, 19
Pigen med den røde hat**	1665	National Gallery of Art, Washington	4, 19
En ung pige med fløjte**	1665	National Gallery of Art, Washington	
Allegori over malerkunsten	1665-66	Kunsthistorisches Museum, Wien	4, 5, 15, 16
En kvinde skriver brev	1665	Lady Oaks Collection	
Brevet (af og til: Frugtsommelig kvinde læser et brev, eller: Kvinde i blå)	1665	Rijksmuseum, Amsterdam	5, 14
Brevskrivende kvinde sammen med sin pige	1667	Sir Alfr. Beit Collection, Wicklow, Irland	
Guitarspilleren	1667	Kenwood House	
Fruen og pigen i huset	1667	Frick Collection, New York	
Astronomen*	1668	Baron Rotscilds samling, Paris	
Geografen	1669	Städelsches Kunstinstitut, Frankfurt am Main	
Kniplersken	1668	Louvre, Paris	5
Ung pige med lut læser et brev (af og til: Kærestebrevet)	1670	Rijksmuseum, Amsterdam	4
Allegori over den kristne tro	1669-70	Metropolitan Museum of Art, New York	14
En kvinde, der sidder ved et klaviatur	1670	National Gallery, London	5
En kvinde, der står ved et klaviatur	1670	National Gallery, London	

* Disse to malerier er de eneste, der er dateret af Vermeer selv. Geografen er også dateret, men ikke af Vermeer selv. Det er en senere påført datering.

** Disse to malerier har en anderledes baggrund, end man ser i Vermeers øvrige produktion. Også ansigterne fremtræder lidt anderledes. Nogle kunsthistorikere sætter spørgsmål ved, om de er ægte. Andre mener, de er ufærdige malerier af Vermeer.

11. Van Meegerens forfalskede billeder

Maleriets titel	Årstal	Maleriet solgt til
Kristus og disciplene ved Emmaus	1936-37	Rembrandt-Vereeniging, ophængt på Boymans Museet
Portræt af Jesus	1940	Privat samler
Den sidste nadver	1940-41	Privat samler
Isak velsigner Jakob	1941-42	Privat samler
Kvinde grebet i hor	1941-42	Herman Göring
Fødderne vaskes	1942-43	Hollands regering, ophængt på Rijksmuseum
En kvinde læser noder	1935-36	ikke solgt
En kvinde spiller lut	1935-36	ikke solgt
Jesus blandt de skriftkloge	juli-september 1945	malet i fængslet

12. Bilag 5. Litteratur

1. Vitale Bloch: *All the Paintings of Jan Vermeer*, 1963
2. Martin Braun: *Differential Equations and Their Applications*, Springer Verlag 1991
3. Abraham Bredius: *New Vermeer: Christ and the Disciples at Emmaus*, Burlington Magazine, vol 71, p. 210f.
4. R. Broby-Johansen: *Hjemmets Pinakotek*, Gyldendal 1960
5. R. Broby-Johansen: *Maleriets Mestre bd. 12: Vermeer*, Vintens Forlag, 1965
6. Paul B. Coreman: *Van Meegeren's Faked Vermeers and de Hooghs*, Amsterdam 1949
7. Jean Decoen: *Retour à la Verité*, 1951
8. Ludwig Goldscheider: *Vermeer Paintings, Complete Edition*, 1967
9. E. H. Gombrich: *Kunstens Historie*, Gyldendal 1990
10. Arnold Hauser: *Kunstens og Litteraturens Socialhistorie bd. 1*, Rhodos 1979
11. Øystein Hjort: *Hellere forfalsker end forræder*, Politiken 24. marts 1996
12. Artikler i Encyclopædia Britannica om *Jan Vermeer* (bd. 19) og om *Arts, Fraudulence* (bd. 2)
13. Artikel i Brockhaus Enzyklopädie om *Fälschung von Kunstwerken* (bd. 6)
14. Artikler i Kindlers Malerie Lexicon om *Vermeer* (bd. 12), 1982
15. Lademanns Kunstleksikon, specielt bd. 13, 1988-92
16. Politikens 3-dimensionale guide, Kunst 1995
17. Politikens Verdenshistorie (bd. 12)
18. Robert Cumming: *Verdenskunst. Tæt på 45 hovedværker*, Gyldendal 1996
19. Cd-rom udgivet i samarbejde mellem National Gallery of Art og Mauritshuis-museet, *Vermeer. An Exploration of the Artist and his Techniques*, Haag, 1996
20. Knud Voss: *Skagensmalerne*, Hamlet 1975
21. Bog udgivet i forbindelse med udstillingen af National Gallery of Art og Mauritshuis-museet, *Johannes Vermeer*, Haag 1996.