ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis for sætning 4 – Den generelle lineære 1. ordens differentialligning $y' = f(x) \cdot y + g(x)$

Sætning 1: Differentialligning $y' = f(x) \cdot y + g(x)$
Samtlige løsninger til differentialligningen:

$$y' = f(x) \cdot y + g(x),$$

hvor *f* og *g* er tilfældige kontinuerte funktioner, er funktionerne med forskriften:

$$y = c \cdot e^{F(x)} + e^{F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx,$$

hvor *c* er en konstant, og *F* er en stamfunktion til *f*.

Bevis
Vi anvender monotonisætningen, samt følgende hjælpeformler:

Produktreglen: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (1)

Reglen for sammensat differentiation: $(e^{h(x)})' = h'(x) \cdot e^{h(x)}$ (2)

Vi ønsker at omskrive differentialligningen, så den føres tilbage til et stamfunktionsproblem, som vi jo kan løse ved hjælp af integralregning. Læser vi produktreglen eller reglen for sammensat differentiation fra højre mod venstre, er de begge eksempler på at føre et lidt kompliceret udtryk tilbage til et stamfunktionsproblem.
Vi omskriver:

$$y' = f(x) \cdot y + g(x)$$

$$y' - f(x) \cdot y = g(x) \qquad \text{Saml leddene med } y \text{ på venstre side}$$

$$y' + \left(-f(x)\right) \cdot y = g(x) \qquad \text{Sæt en +-parentes.}$$

Udtrykket på venstre side kan vi mønstergenkende som en del af højresiden i produktreglen, idet *y* spiller rollen som *f*. Men hvad skal repræsentere funktionerne *g* og g' i formel (1)? Dem kunne vi måske få frem ved at gange igennem med samme eksponentialfunktion, som vi gjorde i beviset for sætning 3, nemlig $e^{-F(x)}$, hvor $F(x)$ en stamfunktion til $f(x)$. Funktionen $f(x)$ er kontinuert og *har* derfor en stamfunktion.

$$y' \cdot e^{-F(x)} + \left(-f(x)\right) \cdot y \cdot e^{-F(x)} = g(x) \cdot e^{-F(x)} \qquad \text{Gang alle led med } e^{-F(x)} \text{ (som ikke er 0)}$$

$$y' \cdot e^{-F(x)} + y \cdot \left(e^{-F(x)}\right)' = g(x) \cdot e^{-F(x)} \qquad \text{Mønstergenkend, og udnyt (2) med } -F(x) \text{ som } h(x)$$

$$\left(y \cdot e^{-F(x)}\right)' = g(x) \cdot e^{-F(x)} \qquad \text{Mønstergenkend, og udnyt (1)}$$

Sætningen om samtlige stamfunktioner til en funktion siger nu, at udregnes en vilkårlig stamfunktion til venstre side i den sidste ligning, og en vilkårlig stamfunktion til højre side, så vil disse to stamfunktioner kun adskille sig ved en konstant.

Den kanoniske stamfunktion til $\left(y \cdot e^{-F(x)}\right)'$ er pr definition $y \cdot e^{-F(x)}$. En vilkårlig stamfunktion til højre side kan skrives: $\int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx$. Derfor har vi:

$$y \cdot e^{-F(x)} = \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx + c \qquad \text{Hvor } c \text{ er en konstant}$$

$$y \cdot e^{-F(x)} \cdot e^{F(x)} = \left(\int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx + c\right) \cdot e^{F(x)} \qquad \text{Gange igennem med } e^{F(x)}$$

$$y = c \cdot e^{F(x)} + e^{F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{-F(x)}\, dx \qquad \text{Reducer}$$

Alle løsninger kan skrives således. Og ethvert tal *c* giver en løsning. Dermed er sætning 4 bevist.