ISBN 9788770668781

Bevis for sætning 3: Differentialligningen $y' = f(x) \cdot y$

Sætning 1: Differentialligningen $y' = f(x) \cdot y$
Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion, og $F(x)$ betegne en stamfunktion til $f(x)$.
Den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$$y' = f(x) \cdot y$$

er mængden af alle funktioner med forskrift:

$$y = c \cdot e^{F(x)},$$

hvor c er en konstant. Dvs. at ethvert reelt tal c giver en løsning.

Bevis
Vi anvender monotonisætningen, samt følgende hjælpeformler:

Produktreglen: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (1)

Reglen for sammensat differentiation: $(e^{h(x)})' = h'(x) \cdot e^{h(x)}$ (2)

Vi ønsker at omskrive differentialligningen, så den føres tilbage til et stamfunktionsproblem, som vi jo kan løse ved hjælp af integralregning. Læser vi produktreglen eller reglen for sammensat differentiation fra højre mod venstre, er de begge eksempler på at føre et lidt kompliceret udtryk tilbage til et stamfunktionsproblem.
Vi omskriver:

$$y' = f(x) \cdot y$$

$$y' - f(x) \cdot y = 0 \qquad \text{Saml leddene på venstre side}$$

Dette udtryk kan vi mønstergenkende som en del af højresiden i produktreglen, idet y spiller rollen som f. Men vi mangler g og g'. Dem kunne vi måske få frem ved at gange igennem med en eksponentialfunktion, som vi gjorde i beviset for sætning 1. Men hvilken?
Konstanten k foran y tolkede vi dengang sådan, at den kom fra sammensat differentiation af den indre funktion i $e^{k \cdot x}$.
Hvis $\left(-f(x)\right)$ skal tolkes på samme måde, må den komme fra sammensat differentiation, hvor den indre funktion derfor må være $-F(x)$. Her er $F(x)$ en stamfunktion til $f(x)$, der er kontinuert og derfor *har* en stamfunktion. Eksponentialfunktionen, vi skal gange med , er derfor $e^{-F(x)}$:

$$y' + \left(-f(x)\right) \cdot y = 0$$

$$y' \cdot e^{-F(x)} + \left(-f(x)\right) \cdot y \cdot e^{-F(x)} = 0 \cdot e^{-F(x)} \qquad \text{Gang alle led med } e^{-F(x)} \text{ (som ikke er 0)}$$

$$y' \cdot e^{-F(x)} + y \cdot \left(e^{-F(x)}\right)' = 0 \qquad \text{Mønstergenkend, og udnyt (2) med } -F(x) \text{ som } h(x)$$

$$\left(y \cdot e^{-F(x)}\right)' = 0 \qquad \text{Mønstergenkend, og udnyt (1)}$$

Monotonisætningen giver nu, at funktionen $y \cdot e^{-F(x)}$ må være konstant:

$$y \cdot e^{-F(x)} = c \qquad \text{Hvor } c \text{ er en konstant}$$

$$y \cdot e^{-F(x)} \cdot e^{F(x)} = c \cdot e^{F(x)} \qquad \text{Gange igennem med } e^{F(x)}$$

$$y = c \cdot e^{F(x)} \qquad \text{Reducer}$$

Alle løsninger kan skrives således. Og ethvert tal c giver en løsning. Dermed er sætning 3 bevist.