ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Alternativt bevis for sætning 2 om forskudt eksponentiel vækst

Sætning 1: Differentialligningen $y' = b - ay$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$y' = b - ay$, hvor a og b er faste tal og $a \neq 0$

er mængden af alle funktioner med forskrift:

$$y = c \cdot e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

hvor c er en konstant. Dvs. at ethvert reelt tal c giver en løsning.

Bevis

Vi anvender sætningen om samtlige stamfunktioner, der bygger på monotonisætningen, samt følgende hjælpeformler:

Produktreglen: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (1)

Reglen for sammensat differentiation: $(e^{a \cdot x})' = a \cdot e^{a \cdot x}$ (2)

Vi ønsker at omskrive differentialligningen, så den føres tilbage til et stamfunktionsproblem, som vi jo kan løse ved hjælp af integralregning. Læser vi produktreglen eller reglen for sammensat differentiation fra højre mod venstre, er de begge eksempler på at føre et lidt kompliceret udtryk tilbage til et stamfunktionsproblem.

Vi omskriver:

$y' = b - ay$

$y' + ay = b$ Saml leddene på venstre side

Dette udtryk kan vi mønstergenkende som en del af højresiden i produktreglen, idet y spiller rollen som f. Men vi mangler g og g'. Dem kunne vi måske få frem ved at gange igennem med en eksponentialfunktion, som vi gjorde i beviset for sætning 1.:

$y' + ay = b$

$y' \cdot e^{a \cdot x} + a \cdot y \cdot e^{a \cdot x} = b \cdot e^{a \cdot x}$ Gang alle led med $e^{a \cdot x}$ (som ikke er 0)

$y' \cdot e^{a \cdot x} + y \cdot \left(e^{a \cdot x}\right)' = b \cdot e^{a \cdot x}$ Mønstergenkend, og udnyt (2)

$(y \cdot e^{a \cdot x})' = b \cdot e^{a \cdot x}$ Mønstergenkend, og udnyt (1)

Men her står jo, at funktionen $y \cdot e^{a \cdot x}$ er en stamfunktion til funktionen $b \cdot e^{a \cdot x}$. Men så siger sætningen om samtlige stamfunktioner, at der findes en konstant c, så:

$y \cdot e^{a \cdot x} = \int b \cdot e^{a \cdot x}\, dx + c$ Det ubestemte integral er den kanoniske stamfunktion

$y \cdot e^{a \cdot x} = b \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} + c$ Indsæt stamfunktionen

$y \cdot e^{a \cdot x} = \frac{b}{a} \cdot e^{a \cdot x} + c$ Reducer

$y \cdot e^{a \cdot x} \cdot e^{-a \cdot x} = \frac{b}{a} \cdot e^{a \cdot x} \cdot e^{-a \cdot x} + c \cdot e^{-a \cdot x}$ Gang med $e^{-a \cdot x}$

$y = c \cdot e^{-a \cdot x} + \frac{b}{a}$

Hermed har vi regnet os frem til den løsning, der er formuleret i sætningen.

© 2019 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT