ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Diskret vækst og kontinuert vækst

Under emnet *Eksponentielle vækstmodeller* i *Hvad er matematik*? 1 har vi lært:

Hvis en variabel *y* vokser med *r* % pr. tidsenhed, så kan vi opskrive en regneforskrift for *y* på formen

$$y = y_0 \cdot (1+r)^x \qquad (1)$$

hvor y_0 er startværdien og *x* angiver tiden.

Dette er en beskrivelse af *diskret vækst*, hvilket vil sige, at væksten sker skridt for skridt: Når vi går ét skridt frem, så vokser *y* med *r* %. Væksten er grafisk set knyttet til kurvens punkter.

Under emnet *Modellering med* f' (*differentialligninger*) i *Hvad er matematik*? 2 har vi lært:

Hvis en variabel *y* ændrer sig på en sådan måde, at væksthastigheden er proportional med *y*:

$$y' = r \cdot y$$

så har *y* forskriften

$$y = y_0 \cdot e^{r \cdot x} \qquad (2)$$

hvor y_0 er startværdien og *x* angiver tiden.

Dette er en beskrivelse af *kontinuert vækst*, hvilket vil sige, at væksten foregår ”glidende”, med samme vækstrate knyttet til hvert uendeligt lille (infinitesimale) stykke som *x* vokser. Væksten er her grafisk set knyttet til kurvens tangenter.

(1) og (2) er ikke samme regneforskrift. Det kan godt virke forvirrende, fordi tilfælde (2) faktisk ofte beskrives med en sproglig form, der minder om (1), nemlig at den variable ændrer sig med *r* % pr tidsenhed. Hvis tidsenheden er meget lille, så er væksten pr tidsenhed med god tilnærmelse lig med differentialkvotienten, og de to modeller er i store træk sammenfaldende. Men hvordan er sammenhængen generelt?

Lad os antage startværdien er 1, så de to forskrifter vi vil sammenligne er

$$y = (1+r)^x \qquad \text{og} \qquad y = e^{r \cdot x}$$

Dette kan koges ned til at sammenligne

$$y = (1+r) \qquad \text{og} \qquad y = e^r$$

Betragter vi $f(x) = e^r$ som en funktion af *r*, så er ligningen for tangenten i punktet $(0, f(0)) = (0,1)$ netop $y = 1 + r$. Eksponentialfunktionen krummer opad og ligger således helt over sin tangent, så vi har:

$e^r > 1 + r$, for alle tal *r*.

Vi kan få en helt præcis beskrivelse af sammenhængen mellem diskuret og kontinuert vækst på følgende måde: Hvis vi for et øjeblik ser bort fra ”renters rente”, så kunne vi opdele tidsenheden i *n* dele, og tilsvarende dele procentvæksten på *r* op i *n* dele, hver af størrelsen $\frac{r}{n}$. Når vi skal udregne den samlede procent over de n dele, dvs over 1 tidsenhed, så husker vi igen formlen for renters rente: $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$.

Nu gælder der faktisk følgende formel, der udtrykker sammenhængen mellem diskret og kontinuert vækst:

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \to e^r, \text{ når } n \to \infty \qquad (*)$$

ISBN 9788770668781

Dette kan vi indse ved i første omgang at anvende den naturlige logaritme ln. Derved omformes (*) til:

$$n \cdot \ln\left(1+\tfrac{r}{n}\right) \to r, \text{ når } n \to \infty$$

$$\ln\left(1+\tfrac{r}{n}\right) \to \tfrac{r}{n}, \text{ når } n \to \infty \qquad \text{Divider med } n$$

$$\frac{\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)}{\frac{r}{n}} \to 1, \text{ når } n \to \infty \qquad \text{Divider med } \tfrac{r}{n}$$

$$\frac{\ln(1+h)}{h} \to 1, \text{ når } h \to \infty \qquad (**) \qquad \text{Omdøb } \tfrac{r}{n} \text{ til } h$$

Den sidste påstand følger imidlertid af, at ln er differentiabel i $x = 1$ med differentialkvotient $\ln'(1) = 1$. For opskriver vi dette med brug af 2. version af tretrinsreglen får vi:

$$\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} \to \ln'(1) = 1, \text{ når } h \to \infty$$

og dette er det samme som (**), da $\ln(1) = 0$.

Dvs at (**) er sand, men så er også (*) sand. Dvs:

Den kontinuerte vækst udtrykt ved e^r *er grænseværdi for den diskrete vækst udtrykt ved* $\left(1+\tfrac{r}{n}\right)^n$.