ISBN 9788770668781

Projekt 3.5 Når en population kollapser

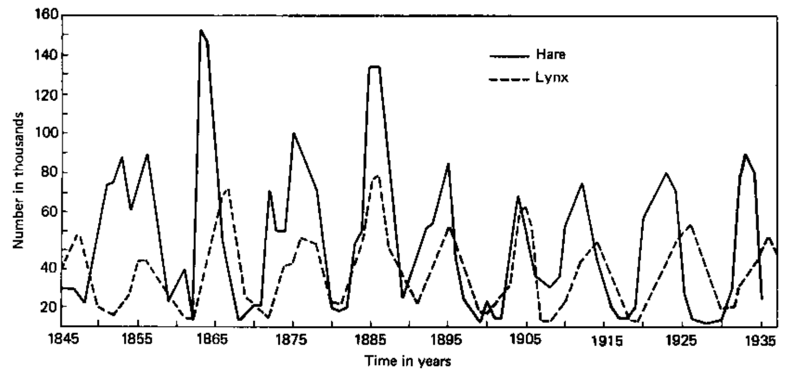
Logistisk vækst beskrives af en langstrakt S-formet graf, der ”blødt” bevæger sig op mod en øvre grænse, som vi kalder for bæreevnen. Virkeligheden er ofte betydeligt anderledes. Her vil vi se på tilfælde, hvor **bæreevnen** ændres betydeligt over et kort tidsrum. Den falder dramatisk som vi kender fra situationer som:
- det amerikanske boligmarkeds kollaps efter finanskrisen brød ud i 2008.
- faldet i aktiekurserne for de store medicinalfirmaer som Novo, efter at Trump annoncerede betydelige indgreb i det marked.
- faldet i den indianske population i Mexico og Sydamerika efter europæernes invasion i 1500-tallet – et fald på estimeret 90-95% fra 40-50 millioner til 2 millioner på knap 100 år, forårsaget af både sygdomsepidemier og direkte udryddelse
- faldet i det europæiske befolkningstal under den sorte død 1348-50 – estimeret til at mellem en tredjedel og halvdelen af befolkningen døde.
- faldet i dyrepopulationer, når der opstår tørke eller andre dramatiske ændringer.

1. En undersøgelse af autentiske data

Men også i mindre dramatiske situationer ser vi perioder af vækst blive afløst af perioder med store fald. Det kan vi illustrere med et kendt ”rovdyr-byttedyr”-eksempel. Vi vender tilbage til dette i et projekt i kapitel 6 om anden ordens differentialligninger. Disse er nemlig i slægt med de såkaldte ”koblede differentialligninger”, hvor man studerer samspillet mellem to variable, der begge er tidsafhængige. I dette klassiske eksempel er det samspillet mellem los og snehare i det nordlige Canada. Der behøver naturligvis ikke at være en 1-1 sammenhæng mellem antallet af skind og antallet af dyr, så der har i litteraturen været stor diskussion om, i hvilken grad optællingerne af skind fra auktionen afspejlede det sande antal. Blandt andet blev de skind som Native Americans solgte ikke medtaget her.

Søger man i litteraturen vil man derfor finde forsøg på korrektioner der giver lidt forskellige tal. Men det grafiske billede, der fremkommer er i alle fremstillinger tæt beslægtet med det oprindelige, som første gang blev bragt i et værk fra 1937 ("*Fluctuations in the numbers of varying hare*", af MacLulich), og som er det man oftest møder.

Det er den graf der gengives her:

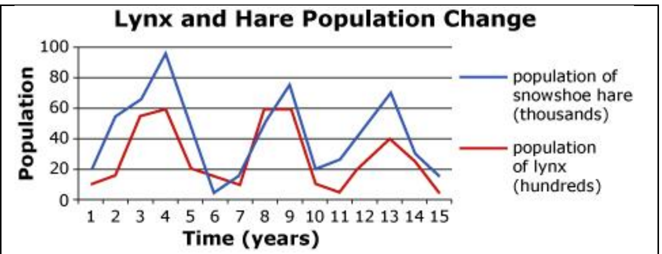


Changes in the abundance of the lynx and the snowshoe hare, as indicated by the number of pelts received by the Hudson's Bay Company.

Vi arbejder i projektet i kapitel 6 videre med de detaljerede data hørende til denne graf

Øvelse 1.
Når man ser sådan en graf er det første der slår en, at der må være et mønster. Disse svingninger op og ned bliver jo ved. Så det kan ikke være tilfældigt. Prøv med dine egne ord at give et bud på at forklare disse svingninger i bestanden af los og snehare, som vi ser illustreret på grafen.

Men hvad er det for et mønster? Det ligner slet ikke noget logistisk. Og dog - hvis vi nu zoomer ind, kan vi få et billede som dette:
Prøv at følge starten af den røde kurve – den følger en S-form, indtil den topper og bestanden kollapser. Kurvedelen, hvor den kollapser kunne også godt ligne en logistisk graf, der ligger over den værdi vi kalder bæreevnen.



ISBN 9788770668781

Vi vil nu starte med at undersøge dette lidt nærmere. Nedenfor er en tabel over årene 1845-1903, hvor der er foretaget optællinger med to års mellemrum.

Year	Snowshoe Hare Pelts (thousands)	Canada Lynx Pelts (thousands)
1845	20	32
1847	20	50
1849	52	12
1851	83	10
1853	64	13
1855	68	36
1857	83	15
1859	12	12
1861	36	6
1863	150	6
1865	110	65
1867	60	70
1869	7	40
1871	10	9
1873	70	20

Year	Snowshoe Hare Pelts (thousands)	Canada Lynx Pelts (thousands)
1875	100	34
1877	92	45
1879	70	40
1881	10	15
1883	11	15
1885	137	60
1887	137	80
1889	18	26
1891	22	18
1893	52	37
1895	83	50
1897	18	35
1899	10	12
1901	9	12
1903	65	25

Øvelse 2

Lad os se på antallet af skind af snehare i årene 1889 – 1901.

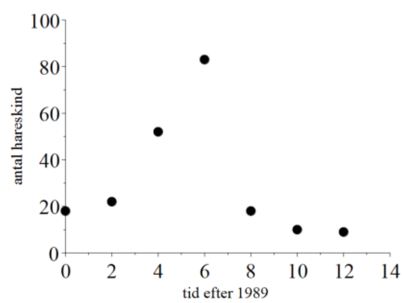
1. Sæt år 1889 til 0 og tegn grafen af datapunkterne

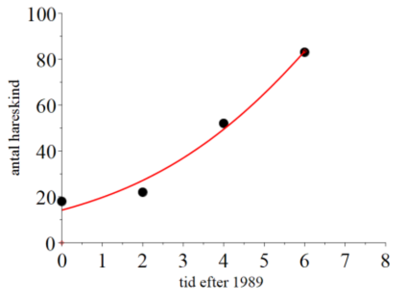
Du skal fået billede der ligner dette:

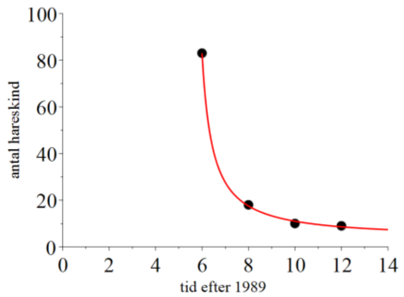
2. Kommenter forløbet ud fra din viden om logistiske funktioner

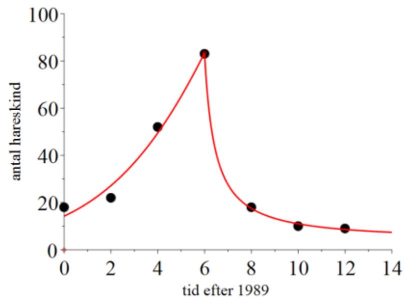
Vi vil nu prøve at udføre logistisk regression på de to dele af grafen hver for sig.

3. Først ser vi på datasættene [0, 2, 4, 6] for tid, og [18, 22, 52, 83] for antal skind. Udfør logistisk regression på dette, og tegn grafen sammen med punkterne. Du skal få et billede som det venstre nedenfor.
4. Dernæst ser vi på datasættene [6, 8, 10, 12] for tid, og [83, 18, 10, 9] for antal skind. Udfør logistisk regression på dette, og tegn grafen sammen med punkterne. Du skal få et billede som det midterste nedenfor.
5. Kombiner de to billeder. Du skal få et billede som det højre nedenfor









Den kombinerede graf giver et rimeligt billede af en enkelt "cyklus" fra den autentiske graf. Det vi ser her er altså, at når en population, der under normale omstændigheder vil udvikle sig efter en jævnt voksende logistisk kurve, rammes af en voldsom hændelse, så vil den hurtigt kollapse og det dramatiske fald kan modelleres med en aftagende logistisk funktion.

Dramaet er her den hurtigt voksende bestands af, som i jagten på føde til deres unger næsten udrydder bestanden af sneharer – hvorved de næsten udrydder fødegrundlaget for dem selv, med et efterfølgende kollaps af los-bestanden.

2. Den matematiske model for populationer hvor "fede år" periodisk afløses af "magre år"

Lad os nu forsøget at opstille modellere en situation, hvor "fede år" periodisk afløses af "magre år" for en population, der formerer sig hurtigt. Vi tænker på en musepopulation, der får flere kuld om året og hver gang mange unger. Mus er udsat for naturlig død og er et jagtobjekt for mange rovdyr. Vi antager der et konstant tryk fra jagten, så det er ikke noget her, der ændrer sig betydeligt.

På et tidspunkt hvor der ikke er så mange mus, og hvor biotopen har rigeligt med fødeemner vokser populationen eksponentielt op. Der er dog ikke uendeligt med ressourcer, og på efterhånden bliver det vanskeligere at finde føde til de nye unger de får, hvorfor en del af disse dør. Men der bliver dog ved med at komme nye kuld, og samtidig er der perioder af tørke, der voldsomt indskrænker levevilkårene.

Lad os antage, at musepopulationen følger en logistisk udvikling:
- Der er en tilvækst på 12,5% pr tidsenhed. Dette er en sum af faktorerne fødsel, naturlig død og jagt.
- Det hæmmende led i den logistiske differentialligning er $0.0004 \cdot y^2$ - dette repræsenterer øget naturlig dødelighed og nedsat fødselsrate efterhånden som populationen vokser.

(*I Hvad er matematik? 2 kapitel 6 er der i den indledende historie givet en grundig indføring i opstillingen af den logistiske differentialligning*)

Det samlede billede af tilvæksten er derfor:

$$y' = 0.125 \cdot y - 0.0004 \cdot y^2$$

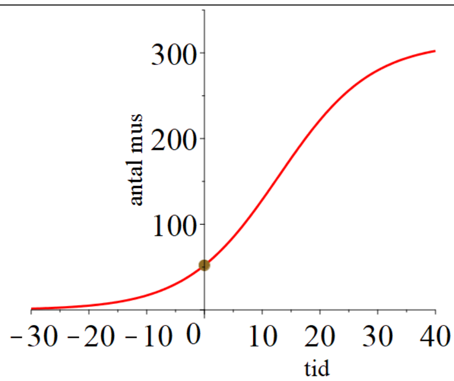
eller skrevet på formen: $y' = y \cdot (b - a \cdot y)$:

$$y' = y \cdot (0.125 - 0.0004 \cdot y) \qquad (*)$$

Vi antager, at vi til tidspunktet 0 har en population på 52, målt i en passende enhed.

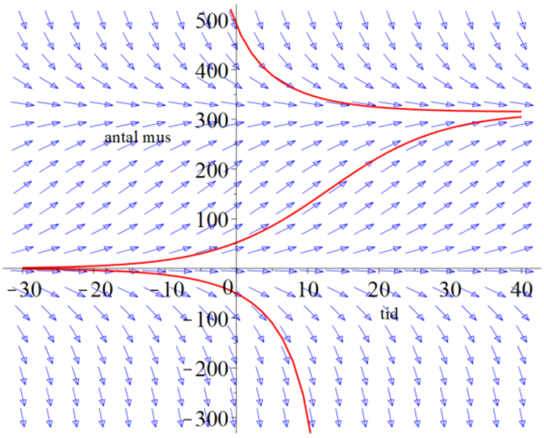
Øvelse 3.

1. Løs differentialligningen (*) med den angivne begyndelsesbetingelse.
Du skal få et funktionsudtryk for y der svarer til:
$$y(x) = \frac{312.5}{1 + 5 \cdot e^{-0.125 \cdot x}}$$, hvor x måler tiden fra 0.
2. Tegn grafen for denne funktion.
Du skal en graf der ser ud som denne
3. Hvad er bæreevnen for denne population



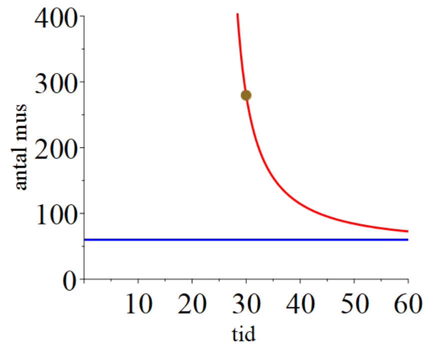
ISBN 9788770668781

Før vi går videre, lad os så få et samlet billede af løsningskurverne til denne differentialligning:



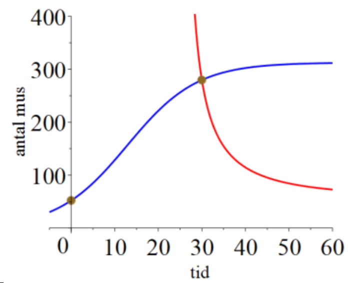
Der er indtegnet tre eksempler på løsningskurver. Vi genkender den midterste, som den vi lige har tegnet. Men hvordan kommer de øvrige i spil?

Øvelse 4.
Vi antager nu der til tiden $x = 30$ indtræffer en dramatisk forværring i levevilkårene, så bæreevnen falder fra over 300 til omkring 60.
1. Hvor stor er musepopulationen til tiden 30?
Da populationens størrelse befinder sig langt over den nye bæreevne, vil udviklingen nu følge en kurve svarende til den øverste på illustrationen ovenfor.
2. Antag der sker et fald i vækstraten fra 12,5% til 5%, og et øget tryk nedad fra det hæmmende led, så parameteren 0.0004 erstattes af omtrent det dobbelte, 0,00083. Opstil den tilsvarende differentialligning.
3. Løs denne differentialligning med begyndelsesbetingelsen $y(30) = 279,5$.
4. Tegn grafen for denne løsning, sammen med dens vandrette asymptote.



Øvelse 5
Tegn de to grafer i samme koordinatsystem.
Det giver et billede som dette:

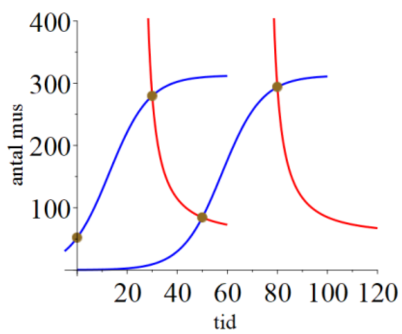
Der er naturligvis ingen graf over punktet $(30, 279.5)$. Det klarer vi nedenfor med brug af stykkevis definerede funktioner.



Til tiden $x = 50$ er populationen decimeret så meget, og tørkenen er overstået, så musepopulationen igen kan vokse i antal. For nemheds skyld antager vi, at vi har samme parameterværdier som før, dvs. differentialligningen:

$$y' = y \cdot (0.125 - 0.0004 \cdot y)$$

Øvelse 6.
1. Hvad er begyndelsesbetingelsen her?
2. Løs differentialligningen og tegn grafen med punktet afsat
3. Antag det går godt for populationen til tiden $x = 80$, hvor den samme overbefolkning kombineret med tørke udløser et nyt kollaps. Opstil og løs differentialligningen for tiden efter $x = 80$
4. Tegn de to nye stumper af grafen med punkterne afsat, sammen med tegningen fra øvelse 5.



ISBN 9788770668781

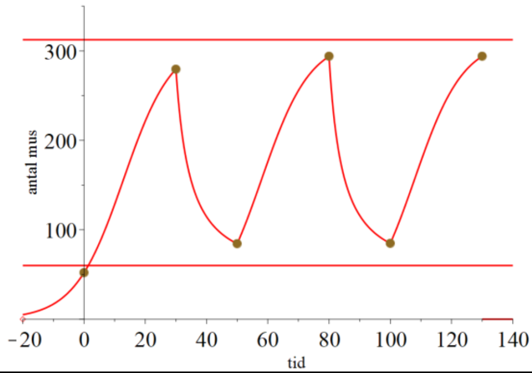
Vi ønsker nu at "klippe" de dele af grafen væk, hvor populationen ikke befinder sig. Det gør vi med anvendelse af *stykkevis definerede funktioner*. Slå evt. op i *Hvad er matematik*? 2, kapitel 8, afsnit 3, hvis du er i tvivl om, hvordan dit værktøjsprogram håndterer dette.

Lad os kalde de første 4 stykker af den samlede graf for $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ og $f_4(x)$. Vi definerer nu en ny funktion:

$$p(x) := \begin{cases} f_1(x) & -20 < x \le 30 \\ f_2(x) & 30 < x \le 50 \\ f_3(x) & 50 < x \le 80 \\ f_4(x) & 80 < x \le 100 \\ f_5(x) & 100 < x \le 130 \end{cases}$$

Øvelse 7. Josefkurven

1. Bestem de resterende forskrifter og opstil selv $p(x)$
2. Tegn grafen for p(x). Du skal få noget i retning af denne:



Måske kan du huske den bibelske historie om Josef, der blev rådgiver ved en Faraos hof. Han havde en mærkelig drøm, som medførte, at han rådede Farao til at fylde laderne op med korn.

3. Hvad var det for en drøm?

Fortællingen har givet anledning til, at man af og til bruger betegnelsen "Josefkurve" for en graf som denne.