L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 3.9 Udspring med faldskærm

(*I HEM3, Grundbogen kapitel 3a er der gennemført en grundig og detaljeret modellering af Felix Baumgartners udspring fra 36.500 km's højde, med brug af de autentiske data. I dette projekt, der er mere kortfattet og som er inspireret af et DTU-projekt for gymnasieelever, arbejdes med de samme formler og modeller men med andre eksempler*)

Luftmodstand

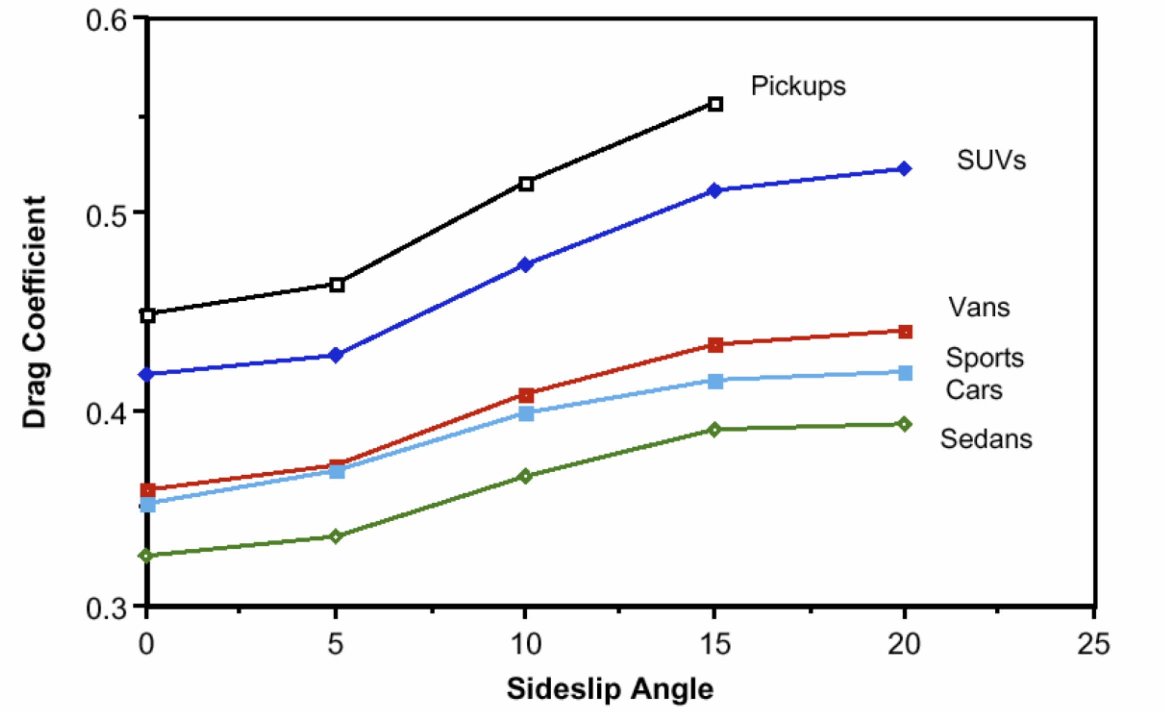
Når vi bevæger os gennem luften, vil vi mærke en kraft modsat rettet bevægelsen, som vi kalder *luftmodstanden*. Specielt mærker vi kraften, når vi kører bil og rækker hånden ud ad vinduet. Luftmodstanden sætter en grænse for tophastigheden af en bil, ligesom den har stor betydning for bilens benzinøkonomi. Derfor ser man moderne biler med aerodynamisk eller strømlinet design.

I andre tilfælde ønsker man så høj luftmodstand som muligt. Det er tilfældet, når man skal bremse en flyvemaskine, der lander på et hangarskib. Her benytter man en bremsefaldskærm, der foldes ud idet øjeblik, hjulene rører landingsbanen. En faldskærm er selvfølgelig mest kendt fra udspring i stor højde fra et fly. Her kan vi faktisk opstille følgende formel, der til en vis grad er empirisk begrundet. Luftmodstanden af et legeme, der bevæger sig gennem luften, afhænger af legemets fart v i forhold til luften og tværsnitsarealet A af legemet målt på tværs i forhold til bevægelsesretningen. Det generelle udtryk for luftmodstanden er

$$F_D = c_D \cdot A \cdot ½\rho \cdot v^2$$

Hvor ρ (rho) er luftens massefylde, og c_D er en modstandskoefficient. Modstandskoefficienten c_D afhænger af den aerodynamiske udformning af legemet. Endvidere afhænger c_D af den relative fart *v* imellem legemet og luften. Denne afhængighed af *v* beskrives ved en dimensionsløse størrelse, der kaldes Reynolds' tal, og som vi skal vende tilbage til senere. (*D* står for "Drag", det engelske ord for luftmodstand.

Betragter vi en plan cirkulær skive med radius *r* og arealet $A = \pi \cdot r^2$, finder man ved store hastigheder, at modstandskoefficienten $c_D \approx 1$ og uafhængig af farten v . Ved at designe biler aerodynamisk, kan man nedsætte modstandskoefficienten til ca. 0,3. På figuren ses, hvordan modstandskoefficienten c_D for forskellige biltyper afhænger af vindens relative indfaldsretning i forhold til bilens køreretning.



Modstandskoefficienten c_D som funktion af vindens relative indfaldsvinkel

ISBN 9788770668781

For en bil af Sedan typen er $c_D \approx 0.33$. Er tværsnitsarealet A = ca. 2 m^2, vil en Sedan bil, der kører med hastigheden 90 Km/h = 25 m/s , blive påvirket af en luftmodstand, der er

$$F_D = 0{,}33 \cdot 2\ m^2 \cdot ½ \cdot 1{,}2\ kg/m^3 \cdot 25^2 \cdot m^2/s^2 = 248\ newton\ .$$

Effekten, der skal til at overvinde luftmodstanden, er

$$P = F_D \cdot v = 248 \cdot 25\ watt = 6200\ watt = 6{,}2\ kW = 8{,}4\ hk$$

Det skulle en moderne bil med en motor på 80 hk nok kunne klare .

Springer vi ud med faldskærm med et tværsnitsareal på $A = 280\ feet^2 = 26{,}0\ m^2$, og regner vi med at skærmen ikke glider men falder gennem luften, kan vi sætte $c_D \approx 1.2$. Herved bliver luftmodstanden

$$F_D = 1{,}2 \cdot 26{,}0\ m^2 \cdot ½ \cdot 1{,}2\ kg/m^3 \cdot v^2 = 18{,}7\ Ns^2/m^2 \cdot v^2\ .$$

Vi ser, at luftmodstanden vokser med kvadratet på farten *v*.

Forudsætningen for dette er, at c_D kun afhænger af geometrien af legemet og ikke af er afhængig af Reynolds tal.

Reynolds tal

Reynolds tal, Re er opkaldt efter englænderen Osborne Reynolds (1842–1912), en britisk professor i ingeniørvidenskab, der først introducerede det dimensionsløse tal. Det er defineret ved:

$$Re = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}\ , \text{hvor}$$

- ρ er luftens/væskens massefylde , ρ = 1,2 kg/m^3.
- η (eta) er luftens/væskens viskositet , η = 18 · 10^{-6} Ns/m^2.
- d er den største diameter af legemet målt vinkelret på bevægelsesretningen
- v er legemets fart i forhold til luften/væsken

Reynolds-tallet er proportional med farten v og angiver hvordan luften strømmer omkring et legeme. Hvis Reynolds tal er lille, hvilket her vil sige mindre end ca. 10^3, vil strømningen foregå *laminart*, dvs. lagdelt. Hvis Reynolds tal er større end ca. 10^3, opstår der hvirvler i strømningen, og vi siger, at strømningen er *turbulent*. Når strømningen er turbulent, kan vi med god tilnærmelse sætte c_D = konstant.

For en bil, der kører med en hastighed på v = 90 Km/h = 25 m/s og hvor vi har d = 1,75 m bliver Reynolds' tal i luft

$$Re\ =\ \frac{25m/s \cdot 1{,}2kg/m^2 \cdot 1{,}75m}{18 \cdot 10^{-6} Ns/m} = 3 \cdot 10^6\ .$$

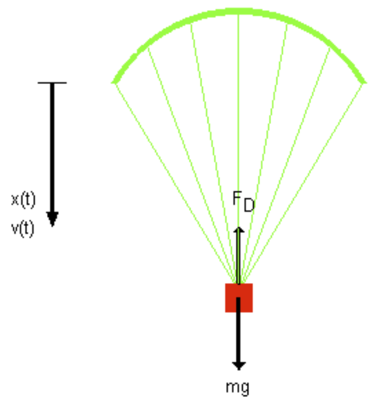
D.v.s luftstrømningen omkring en bil er turbulent. Det samme gælder for en faldskærmsudspringer. Vi kan derfor tillade os med tilnærmelse at sætte c_D = konstant.

En faldskærmsudspringer, der sammen med sin faldskærm har massen m = 90 kg , springer ud fra h = 2 km's højde. Det antages, at luftmodstanden er givet ved udtrykket

$$F_D = a \cdot v^2\ ,$$

hvor a blev beregnet ovenfor til $18{,}7\ Ns^2/m^2$, og hvor v er farten. Foruden luftmodstanden er faldskærms-udspringeren også påvirket af tyngdekraften mg, se figuren. Opstiller vi Newtons 2. lov for faldskærmsudspringeren, finder vi differentialligningen:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - a \cdot v^2$$



Kræfterne ved faldskærmsudspring

Øvelse 1
Vi vil forsøge at løse differentialligningen ved separation. Det er ikke helt oplagt, så vi foretager nogle omskrivninger. Vi antager først, at begyndelsesbetingelsen er $v(0) = 0$, dvs. at faldskærmen udløses øjeblikkeligt.

1. Divider ligningen igennem med m.

2. Vis at første trin i en separation fører til identiteten:

$$\frac{dv}{g-\frac{a}{m}\cdot v^2}=dt \text{ , eller: } \quad \frac{dv}{g-\frac{v^2}{m/a}}=dt$$

3. På dette trin vil vi udnytte en viden vi har, fx fra *Projekt 2.22 Integrationsteknik – vha omvendte trigonometriske og omvendte hyperbolske funktioner*, eller som vi får ved at kigge i integraltabeller, nemlig at

$$\int\frac{1}{1-u^2}du=\operatorname{arctanh}(u)+c \text{ ,} \quad \text{hvor } \tanh(u)=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$$

For at lægge op til en substitution, hvor vi kan udnytte dette integral, dividerer vi igennem med g og samler andet led i nævner, så det ligner det udtryk vi har ovenfor i udregningen af stamfunktionen: Vis, at

$$\frac{dv}{g-\frac{v^2}{m/a}}=dt \Leftrightarrow \frac{dv}{1-\frac{v^2}{mg/a}}=g\cdot dt \Leftrightarrow \frac{dv}{1-\frac{v^2}{{v_\infty}^2}}=g\cdot dt \Leftrightarrow \frac{dv}{1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2}=g\cdot dt$$

hvor vi har sat $v_\infty=\sqrt{\frac{mg}{a}}$

4. Vis, at den egentlige substitution tager følgende form:

$$u=\frac{v}{v_\infty} \text{ , } du=\frac{1}{v_\infty}dv \text{ , så:}$$

$$\int\frac{dv}{1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2}=\int g\cdot dt \Leftrightarrow \int\frac{1}{1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2}\frac{1}{v_\infty}dv=\frac{1}{v_\infty}\int g\cdot dt \Leftrightarrow \int\frac{1}{1-u^2}du=\frac{1}{v_\infty}\int g\cdot dt$$

5. Vis, jfr. ovenstående:

$$\int\frac{1}{1-u^2}du=\frac{1}{v_\infty}\int g\cdot dt \Leftrightarrow \operatorname{arctanh}(u)=\frac{g\cdot t}{v_\infty}+c \text{, hvor } c \text{ er en konstant}$$

6. Udnyt nu, at arctanh er den omvendte til tanh og vis:

$$u=\tanh\left(\frac{g\cdot t}{v_\infty}+c\right)=\tanh(x+c) \text{ , hvor vi har sat: } x=\frac{g\cdot t}{v_\infty}$$

7. Argumenter ud fra formeludtrykkene for, at

$$v(0)=0 \Leftrightarrow u(0)=0$$

samt at, når $t=0$, så er $x=0$, og at dette kombineret med $u(0)=0$ giver, at $c=0$, dvs.:

$$u=\tanh\left(\frac{g\cdot t}{v_\infty}\right)=\tanh(x)$$

8. Tegn grafen for $\tanh(u)$, og argumenter – inspireret af grafen og ud fra formeludtrykket for tanh – for at

$$\tanh(x)<1 \text{ , og } \tanh(x)\to 1 \;\; \textit{når} \;\; x\to\infty$$

hvilket svarer til, at

$$u(t)\to 1 \;\; \textit{når} \;\; t\to\infty$$

9. Argumenter endelig for, at $v(t) \to v_\infty \;\; \textit{når} \;\; t \to \infty$,

hvilket begrunder det i første omgang måske lidt underlige navn v_∞ for størrelsen $v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{a}}$

Ved at kombinere formlerne $u = \dfrac{v}{v_\infty}$ og $u = \tanh\left(\dfrac{g \cdot t}{v_\infty}\right)$ får vi: $v(t) = v_\infty \cdot \tanh\left(\dfrac{g \cdot t}{v_\infty}\right)$

10. Bestem v_∞ for a = 18,7 Ns^2/m^2, og tegn grafen for v(t) .

Faldskærmsudspringeren falder i virkeligheden frit et stykke, før faldskærmen udløses.
Hvis der går $t_0 = 2$ sekunder inden faldskærmen udløses vil begyndelseshastigheden være $v(0) = g \cdot t_0 \approx 20 \; m/s$.

Øvelse 2.
Benyt dit værktøjsprogram til dels at løse og dels at tegne grafen for løsningen til differentialligningen for forskellige begyndelseshastigheder $v(0)$.