**ISBN 9788770668781**


# Projekt 3.7 Bernouillis differentialligning

Den logistiske differentialligning er et eksempel på en *ikke-lineær differentialligning*. Den logistiske differentialligning kan generaliseres på flere måder, og i dette afsnit skal vi studere en af disse generaliseringer, de såkaldte Bernouilli-differentialligninger.

De lineære differentialligninger er karakteriseret ved, at den ukendte *y* ikke indgår med potenser eller som en del af sammensatte funktioner. Lineære differentialligninger (af første, anden eller højere orden) er de mest håndterlige. Her kan vi ofte bestemme løsninger eksakt og skabe os et overblik over *den fuldstændige* løsning (dvs. *mængden* af alle løsninger til den forelagte differentialligning). Eksempler på sådanne differentialligninger er typerne $y' = k \cdot y$, $y' = b - a \cdot y$, $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ og $y'' + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = h(x)$. Definitionsmængderne indskrænkes kun, hvis der er problemer med definitionsmængderne for nogle af de funktioner, der indgår i ligningen.

Anderledes er det med ikke-lineære differentialligninger. For den logistiske differentialligning så vi, at visse løsninger fik indskrænket definitionsmængden dramatisk. Mange ikke-lineære differentialligninger kan ikke løses eksakt. I stedet kan man vælge at foretage en *numerisk løsning*, eller man kan af og til tilnærme med lineære differentialligninger. Endelig kan man også få en del oplysninger ved at analysere differentialligningen uden direkte at løse den – som f.eks. oplysninger om løsningers monotoniforhold.

En del familier af ikke-lineære differentialligninger kan dog løses eksakt. Den logistiske er således med i en større familie, vi samlet kalder Bernouillis differentialligning. De har fået navn efter Jacob Bernouilli, der levede samtidig med Newton og Leibniz. Bernouillis differentialligning er interessant af flere grunde. Den træder ind på scenen i så forskellige situationer som opstilling af modeller for et frit fald med luftmodstand inden for fysikken og opstilling af matematiske fiskerimodeller inden for biologi.

## 1. Den generelle form og nogle specialtilfælde

Bernouillis differentialligning kan i sin generelle form opskrives således:

$$y' = g(x) \cdot y^{\alpha} - f(x) \cdot y\,,\ (*)$$

hvor *f* og *g* er kontinuerte funktioner defineret på et interval *I* – som evt. kan være alle reelle tal – og *α* er et reelt tal.

**Øvelse 1**

Angiv hvad *f*(*x*) og *g*(*x*) samt *α* er i følgende differentialligninger:

1. $y' = by - ay^2$
2. $h' = hy^{\frac{2}{3}} - ky$
3. $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y}$

Før vi undersøger differentialligningen i sin generelle form, ser vi først på et par specialtilfælde:

$\alpha = 1$: $\quad y' = g(x) \cdot y - f(x) \cdot y \Leftrightarrow y' = \big(g(x) - f(x)\big) \cdot y$

Dette genkendes som et specialtilfælde fra behandlingen af den generelle lineære 1. ordens differentialligning. I tilfældet, hvor funktionerne er konstante: $f(x) = b$ og $g(x) = a$, og vi sætter $k = a - b$, genkendes den første type differentialligning, vi løste: $y' = k \cdot y$.

$\alpha = 0$: $\quad y' = g(x) \cdot y^0 - f(x) \cdot y \Leftrightarrow y' = g(x) - f(x) \cdot y \Leftrightarrow y' + f(x) \cdot y = g(x)$

Dette genkendes som den lineære 1. ordens differentialligning, som vi kan opskrive den fuldstændige løsning til. I tilfældet, hvor funktionerne er konstante: $f(x) = a$ og $g(x) = b$, genkendes differentialligningen: $y' = b - a \cdot y$.

**ISBN 9788770668781**





$\alpha=2$ : $y'=g(x)\cdot y^2-f(x)\cdot y \Leftrightarrow y'=y\cdot\left(g(x)\cdot y-f(x)\right)$

Denne minder om den logistiske differentialligning. I tilfældet, hvor funktionerne er konstante: $f(x)=-b$ og $g(x)=-a$ , får vi: $y'=y\cdot(b-a\cdot y)$ . Altså ser vi, at den logistiske differentialligning er et specialtilfælde af Bernouillis differentialligning.

**Løsning af den generelle Bernouilli-ligning**

Vi gennemfører nu løsningen af differentialligningen: $y'=g(x)\cdot y^{\alpha}-f(x)\cdot y$ . (*)

I det følgende antages $\alpha\neq 0$ og $\alpha\neq 1$ . Ofte løses differentialligningen kun i tilfældet med konstante koefficienter; men det vanskeliggør ikke løsningen i særlig grad at betragte det generelle tilfælde, så det lægger vi ud med.
Vi lader os inspirere af løsningsmetoden ved den logistiske differentialligning: Dengang dividerede vi igennem med $y^2$ , og efter nogle omskrivninger lykkedes det at substituere tilbage til en lineær differentialligning.

Lad i det følgende *f* og *g* være kontinuerte funktioner defineret på et interval *I* (*I* kan som tidligere nævnt udmærket være alle reelle tal).

Hvis $\alpha>0$ er funktionen $y=0$ en løsning til (*), hvilket ses ved indsættelse.
Hvis $\alpha<0$ kan *y* ikke være 0.
Derfor antages i det følgende, at $y\neq 0$ . Da *y* er kontinuert gælder derfor, at $y\neq 0$ i et helt interval inden for *I*. Vi arbejder videre inden for dette interval og vil afslutningsvis bestemme definitionsmængden, så denne bliver så stor som muligt.

Vi regner nu ensbetydende ud fra (*):

$$\begin{aligned} y'&=g(x)\cdot y^{\alpha}-f(x)\cdot y && \Leftrightarrow \text{ (ganger med } y^{-\alpha}\text{)}\\ y'\cdot y^{-\alpha}&=g(x)-f(x)\cdot y\cdot y^{-\alpha} && \Leftrightarrow\\ y'\cdot y^{-\alpha}&=g(x)-f(x)\cdot y^{1-\alpha} && (**)\end{aligned}$$

Vi bemærker nu: $\left(y^{1-\alpha}\right)'=(1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'$

Inspireret heraf ganger vi (**) igennem med $(1-\alpha)$, idet vi bemærker, at $(1-\alpha)\neq 0$:

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\cdot y'\cdot y^{-\alpha}&=(1-\alpha)\cdot g(x)-(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot y^{1-\alpha} && \Leftrightarrow\\ \left(y^{1-\alpha}\right)'&=(1-\alpha)\cdot g(x)-(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot y^{1-\alpha} && \Leftrightarrow\\ \left(y^{1-\alpha}\right)'&=-(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot y^{1-\alpha}+(1-\alpha)\cdot g(x)\end{aligned}$$

Substituér: $z=y^{1-\alpha}$ :

$$z'=-(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot z+(1-\alpha)\cdot g(x)$$

Dette er en lineær 1. ordens differentialligning, og vi kunne derfor nu opskrive den fuldstændige løsning hertil. Den formel, vi når frem til, er imidlertid så klodset og lidet oplysende, at vi i stedet løser differentialligningen herfra i hvert konkret tilfælde.

**ISBN 9788770668781**



**Første konklusion om Bernouillis differentialligning**

Ligningen $y' = g(x) \cdot y^{\alpha} - f(x) \cdot y$ , hvor $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$, løses i det generelle tilfælde efter følgende opskrift:

1. Indfør substitutionen $z = y^{1-\alpha}$.
2. Løs den lineære 1. ordens differentialligning $z' = -(1-\alpha) \cdot f(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot g(x)$.
3. Substituér tilbage og find $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.
4. Bestem definitionsmængden for *y*. Bemærk, at selv om vi i omskrivningerne ovenfor har forudsat $y \neq 0$ så kan det godt tænkes, at vi i tilfældet $\alpha > 0$ får udvidet definitionsmængden til også at omfatte tal, der giver $y = 0$.

**Øvelse 2**

Før vi ser vi nogle eksempler og øvelser i relation til det generelle tilfælde, vil vi betragte specialtilfældet, hvor $f(x)$ og $g(x)$ er konstanter, henholdsvis *b* og *a*.

1. Vis at vi i så fald får $y' = ay^{\alpha} - by \Leftrightarrow z' = -(1-\alpha) \cdot b \cdot z + (1-\alpha) \cdot a$, hvor $z = y^{1-\alpha}$.
2. Anvend løsningsformlen for denne type differentialligning til at bestemme den fuldstændige løsning:
$$z = c \cdot e^{-(1-\alpha)b \cdot x} + \frac{a}{b}$$

Gennem Øvelse 2 har vi argumenteret for:

**Anden konklusion om Bernouillis differentialligning**

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = ay^{\alpha} - by$ , hvor $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$, findes som løsningen til

$$y^{1-\alpha} = c \cdot e^{-(1-\alpha)b \cdot x} + \frac{a}{b} \quad \vee \quad y = 0.$$

**Eksempel 1**

Løs differentialligningen $y' = y + y^3$.

Vi bemærker, at dette er en Bernouilli-differentialligning med konstante koefficienter og med $\alpha = 3$. Så kan vi simpelthen indsætte i formlen i 2. konklusion med $a = 1$, $b = -1$ (idet vi kalder den uafhængige variabel for *t*):

$$y^{1-3} = c \cdot e^{-(1-3)\cdot(-1)t} + \frac{1}{-1} \quad \vee \quad y = 0 \qquad \Leftrightarrow$$
$$y^{-2} = c \cdot e^{-2t} - 1 \quad \vee \quad y = 0 \qquad \Leftrightarrow$$
$$y = \sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{-2t} - 1}} \quad \vee \quad y = -\sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{-2t} - 1}} \quad \vee \quad y = 0$$

Definitionsmængden bestemmes:
$$c \cdot e^{-2t} - 1 > 0 \Leftrightarrow c \cdot e^{-2t} > 1 \Leftrightarrow c > e^{2t}$$

Dvs. kun positive *c*-værdier er mulige. For en given *c*-værdi får vi $c > e^{2t} \Leftrightarrow t < \frac{1}{2}\ln(c)$,

så $Dm(f) = \left]-\infty; \frac{1}{2}\ln(c)\right[$

**Øvelse 3**

Undersøg grafens forløb for $t \to \infty$ og for $t \to \frac{1}{2}\ln(c)$, og skitser det grafiske forløb.

**ISBN 9788770668781**



L&R Uddannelse EGMONT

**Eksempel 2**

Bestem den løsning til differentialligningen $y'=3y^{0,5}-0,5y$, hvis graf går gennem punktet $P(0,4)$.

Før vi går i gang, registrerer vi lige, at $y^{0,5}$ kun har mening for $y\geq 0$.

Vi bemærker, at det er en Bernouilli-differentialligning med $a$ = 3, $b$ = 0,5, $\alpha=0,5$, og vi indsætter:

$$y^{1-0,5}=c\cdot e^{-(1-0,5)\cdot 0,5t}+\frac{3}{0,5} \quad \vee \quad y=0 \Leftrightarrow y^{0,5}=c\cdot e^{-0,25t}+6 \quad \vee \quad y=0$$

Punktet $P$(0,4) fortæller, at den søgte løsning ikke kan være $y$ = 0. Indsæt $P(0,4)$:

$4^{0,5}=c\cdot e^{0}+6$, hvoraf vi får $c=-4$

Indsæt $c$:

$$y^{0,5}=-4\cdot e^{-0,25t}+6$$

$y$ findes nu ved at kvadrere; men derved regner vi ikke længere ensbetydende, så $Dm$ fastlægges på dette sted:

$y\geq 0$ kræver, at $-4\cdot e^{-0,25t}+6\geq 0$

Ved at løse denne ulighed får vi $t\geq -\dfrac{\ln(1,5)}{0,25}$ eller $t\geq -4\ln(1,5)$

Tilnærmet får vi $t\geq -1,62$.

Konklusionen bliver derfor, at den søgte løsning er $y=\left(-4\cdot e^{-0,25t}+6\right)^2$, $t\in[-1,62;\infty[$.

**Øvelse 4**

Undersøg grafens forløb for $t\to\infty$ og for $t\to -4\ln(1,5)$, og skitser det grafiske forløb.

**Eksempel 3**

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$\left(1-x^2\right)\cdot y'-x\cdot y=x\cdot y^2$ i strimlen $-1<x<1$

Vi begynder med at omskrive, så vi kan genkende det som en Bernouilli-differentialligning (hvorfor må vi gøre det?):

$$y'=\frac{x}{1-x^2}\cdot y^2+\frac{x}{1-x^2}\cdot y$$

Vi bemærker, at ligningen nu har samme form som (*), hvor:

$f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, $g(x)=-\dfrac{x}{1-x^2}$, og $\alpha=2$

Vi følger første konklusion og substituerer $z=y^{1-\alpha}=y^{1-2}=y^{-1}$, og får

$$z'=-(1-2)\cdot\frac{-x}{1-x^2}\cdot z+(1-2)\cdot\frac{x}{1-x^2}\Leftrightarrow z'=-\frac{x}{1-x^2}\cdot z-\frac{x}{1-x^2} \quad (***)$$

Vi får nu brug for formlen til løsning af lineære 1. ordens differentialligninger:

Samtlige løsninger til differentialligningen
$y'=f(x)\cdot y+g(x)$,

hvor $f$ og $g$ er tilfældige kontinuerte funktioner, er funktionerne med forskriften:

$$y = c\cdot e^{F(x)} + e^{F(x)}\cdot\int g(x)\cdot e^{-F(x)}\,dx$$

hvor $c$ er en konstant, og $F$ er en stamfunktion til $f$.

**Øvelse 5**

For at løse den lineære differentialligning (***) skal vi således først finde en stamfunktion $F(x)$ til funktionen

$$f(x) = -\frac{x}{1-x^2}$$

Denne stamfunktion kan bestemmes ved substitutionsmetoden, men du kan også vælge, at vise, at

$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right) = \ln\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ er en stamfunktion.

(Overvej: Hvorfor er der ingen problemer i at opskrive $\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, dvs. $\sqrt{1-x^2}$ ?)

Anvend nu løsningsformlen på (***):

$$z = c\cdot e^{\ln\left(\left(1-x^2\right)^{0,5}\right)} + e^{\ln\left(\left(1-x^2\right)^{0,5}\right)}\cdot\int -\frac{x}{1-x^2}\cdot e^{-\ln\left(\left(1-x^2\right)^{0,5}\right)}\,dx \quad\Leftrightarrow$$

$$z = c\cdot\left(1-x^2\right)^{0,5} + \left(1-x^2\right)^{0,5}\cdot\int -\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{0,5}}\,dx \quad\Leftrightarrow$$

$$z = c\cdot\left(1-x^2\right)^{0,5} + \left(1-x^2\right)^{0,5}\cdot\int -\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

**Øvelse 6**

Vis at løsningen bliver $z = c\cdot\left(1-x^2\right)^{0,5} - 1$.

(Hint: Anvend substitutionsmetoden på at løse integralet)

Ved at substituere tilbage får vi endelig $y = \dfrac{1}{c\cdot\left(1-x^2\right)^{0,5} - 1}$.

$c$ fastlægges af et givet punkt (en begyndelsesbetingelse).
*Dm* bliver en del af intervallet $]-1;1[$ og fastlægges ved hjælp af punktet.

**Øvelse 7**

Bestem den endelige forskrift og definitionsmængde for en løsning, hvis graf går gennem $P(0,2)$.
Samme spørgsmål med punktet $Q(-0.5,5)$.

## Øvelse 8

I de følgende opgaver skal du først fastlægge områderne, hvor vi kan regne.

1. Bestem den fuldstændige løsning til $y' = y - y^3$.
2. Bestem den fuldstændige løsning til $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$.
3. Bestem den fuldstændige løsning til $y' + y = xy^3$.
4. Bestem den løsning til $y' + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$, der opfylder $y(1) = 2$.
5. Bestem den løsning til $xy' + y = (xy)^{\frac{3}{2}}$, der opfylder $y(1) = 4$.
6. Bestem den fuldstændige løsning til $y' - \frac{3}{x}y = \frac{3}{x}y^{\frac{2}{3}}$.