ISBN 9788770668781

Projekt 3.1 Løsning af inhomogene ligninger ved hjælp af gættemetode

I de tilfælde, hvor man godt kan "løse" et integral, men hvor dette fremstår ret kompliceret, kan man have glæde af følgende:

> **Sætning: Løsningsmængden til inhomogene ligninger**
> Løsningsmængden til den inhomogene differentialligning: $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ er lig med alle funktioner af formen: $i_0(x) + h(x)$, hvor $i_0(x)$ er én bestemt funktion, som vi har gættet er løsning til den inhomogene ligning, og hvor $h(x)$ repræsenterer alle løsninger til den homogene ligning.

Bevis

1. del: Bevis for, at $i_0(x) + h(x)$ er en løsning

Antag, at $i_0(x)$ er en løsning til den inhomogene ligning:

$y' = f(x) \cdot y + g(x)$, dvs $\qquad (i_0(x))' = f(x) \cdot i_0(x) + g(x) \quad (1)$

samt at $h(x)$ er en løsning til den homogene ligning:

$y' = f(x) \cdot y$, dvs $\qquad (h(x))' = f(x) \cdot h(x) \quad (2)$

Vi undersøger om $i_0(x) + h(x)$ er en løsning til den inhomogene ligning ved at indsætte og se om ligningen er opfyldt:

$(i_0(x) + h(x))' = f(x) \cdot (i_0(x) + h(x)) + g(x)$ $\qquad$ Indsæt $(i_0(x) + h(x))$

$(i_0(x))' + (h(x))' = f(x) \cdot i_0(x) + f(x) \cdot h(x) + g(x)$ $\qquad$ Udnyt regneregler for differentiation samt parentesregel

$f(x) \cdot i_0(x) + g(x) + f(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot i_0(x) + f(x) \cdot h(x) + g(x)$ $\qquad$ Indsæt (1) og (2)

Vi kan nu se at der efter en omrokering vil stå samme udtryk på begge sider af lighedstegnet. Altså er $i_0(x) + h(x)$ en løsning.

2. del: Bevis for, at enhver løsning kan skrives på formen $i_0(x) + h(x)$

Antag, at $i_0(x)$ er en løsning til den inhomogene ligning:

$y' = f(x) \cdot y + g(x)$, dvs $\qquad (i_0(x))' = f(x) \cdot i_0(x) + g(x) \quad (1)$

og antag, at vi har givet yderligere en løsning $k(x)$ til den inhomogene ligning, dvs:

$$(k(x))' = f(x) \cdot k(x) + g(x) \quad (3)$$

Vi vil nu vise, at funktionen $h(x) = k(x) - i_0(x)$ er en løsning til den inhomogene ligning:

$$y' = f(x) \cdot y$$

Øvelse 1

Indsæt funktionen $h(x)$ på begge sider af ligningen, og anvend regneregler og (1) og (3) til at vise, at ligningen stemmer.

Men $h(x) = k(x) - i_0(x)$ kan jo også skrives således;

$$k(x) = i_0(x) + h(x)$$

dvs den tilfældigt valgte løsning $k(x)$ har vi skrevet som en sum af funktionen $i_0(x)$ og en funktion, der er løsning til den homogene ligning. Det var netop, hvad vi ønskede.

Gættemetoder kan selvfølgelig være tilfældige skud, men erfaringerne fra differentialregning giver os en mere systematisk fremgangsmåde.

ISBN 9788770668781

Øvelse 2

a) Bestem et førstegradspolynomium $p(x)=a\cdot x+b$, der er løsning til $y'=2\cdot y+6\cdot x-1$.
(*Hint*: Indsæt $p(x)$ og opstil to ligninger med a og b, der skal være opfyldt for at $p(x)$ kan være en løsning).
Opskriv dernæst den fuldstændige løsning.
b) Bestem et andengradspolynomium $p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, der er løsning til $y'=4\cdot y+6\cdot x^2-3x+1$.
(*Hint*: Indsæt $p(x)$ og opstil tre ligninger, der skal være opfyldt for at $p(x)$ kan være en løsning).
Opskriv dernæst den fuldstændige løsning.
c) Bestem en funktion af typen $g(x)=c\cdot \mathrm{e}^{2\cdot t}$, der er løsning til $y'=-y+\mathrm{e}^{2\cdot t}$.
(*Hint*: Indsæt $g(x)$ og bestem tallet c).
Opskriv dernæst den fuldstændige løsning.
d) Bestem en funktion af typen $g(x)=a\cdot\cos(2\cdot \mathrm{t})+\mathrm{b}\cdot\sin(2\cdot \mathrm{t})$, der er løsning til $y'=3\cdot y+4\cdot\cos(2\cdot t)$.
(*Hint*: Indsæt $g(x)$ og opstil to ligninger til bestemmelse af tallene a og b).

Vi opsummerer erfaringerne i følgende:

Praxis. Om at gætte løsninger til differentialligninger
Skal vi løse en inhomogen differentialligning af typen:

$$y'=f(x)\cdot y+g(x)$$

så gør vi følgende:
1. Bestem den fuldstændige løsning til den homogene ligning.
2. Gæt en løsning $h(x)$ til den inhomogene ved at lade dig lede af følgende:
- er $g(x)$ et polynomium fx af grad 2, så gæt på et polynomium af samme grad, i dette tilfælde $h(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, indsæt og se om man kan bestemme koefficienterne så ligningen stemmer.
- er $g(x)$ en trigonometrisk funktion, så gæt på en funktion af typen $h(x)=a\cdot\sin(k\cdot x)+b\cdot\cos(k\cdot x)$, indsæt og se om man kan bestemme koefficienterne så ligningen stemmer. Lykkes det ikke, så gæt på en funktion, der indeholder $x\cdot\sin(k\cdot x)$
- rummer $g(x)$ en eksponentialfunktion, så gæt på en funktion af typen $h(x)=c\cdot\mathrm{e}^{k\cdot x}$, eller hvis det ikke rækker $h(x)=a\cdot\mathrm{e}^{k\cdot x}+b\cdot x\cdot\mathrm{e}^{k\cdot x}$, indsæt og se om man kan bestemme koefficienterne så ligningen stemmer.

3. Den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning består da af samtlige funktioner, der kan skrives som summen af $h(x)$ og én fra den fuldstændige løsning til den homogene.

Bemærkning. Ovenstående fremgangsmåde vil normalt lykkes i tilfælde, hvor $f(x)$ er en konstant eller en meget enkel funktion. I andre tilfælde kan vi ofte støde på uoverstigelige hindringer. Man kan naturligvis altid forsøge at anvende sit værktøjsprogram. Men ovenstående metode kan give en vis indsigt i, hvorfor værktøjet svarer som det gør.