ISBN 9788770668781

Projekt 3.10 Tømning af beholder (Torricelli's lov)

(*Dette projekt stammer hovedsageligt fra et DTU-projekt, der er bearbejdet en smule af Marit Hvalsøe Schou til HTX*)

1. Indledning

Evangelista Torricelli, 1608-1647, var en italiensk fysiker og matematiker, der var født i Firenze. Han var elev af Galilei og efterfulgte Galilei som professor i matematik og fysik i Firenze. Torricelli udførte eksperimenter med kviksølvsøjler for at påvise luftens tryk, og han bliver betragtet som barometerets opfinder.
Torricelli var blandt andet optaget af at påvise eksistensen af vakuum. På hans tid var det en udbredt opfattelse, at der ikke fandtes vakuum, og man talte ligefrem om naturens uvilje mod vakuum ("horror vacui"), en opfattelse der stammede helt tilbage fra Aristoteles.
Torricelli fandt desuden den lov for hastigheden, hvormed vand løber ud gennem et lille hul i et kar, som vi skal benytte her.
Enheden torr for tryk er opkaldt efter Torricelli. (1 torr = 133,3 Pa)

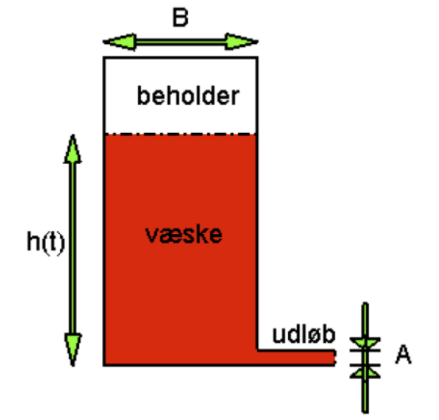
2. Torricelli's lov.

Torricelli undersøgte hvor hurtigt væsker strømmer ud af huller i beholdere under indflydelse af tyngdekraften. Hans eksperimenter viste, at strømningshastigheden v af væsken, der løb ud af en beholder med tilnærmelse kunne skrives:

$$v = 0{,}6\sqrt{2\cdot g\cdot h} \qquad \text{(Torricelli's lov)}$$

hvor g er tyngdeaccelerationen og h er væskehøjden i beholderen. Noget af formlen genkender vi fra det frie fald af et legeme i et tyngdefelt, hvor hastigheden af et legeme, der er faldet stykket h er givet ved

$$v = \sqrt{2\cdot g\cdot h} \qquad \text{(Frit fald for et legeme i et tyngdefelt)}$$



Denne formel udledes ud fra energisætningen, idet den kinetiske energi af et legeme med massen m er $E_{kin} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ og ændringen i den potentielle energi er $E_{pot} = m\cdot v\cdot h$. Sættes $E_{kin} = E_{pot}$ fås formlen.

Benytter vi en tilsvarende betragtning på væsken, der strømmer ud af beholderen, kan vi indse, at Torricelli's lov siger, at væsken må tabe noget af sin kinetiske energi. Årsagen til dette er den *turbulens* eller *kaotiske bevægelse* der opstår omkring udløbet i beholderen. På grund af denne turbulens vil noget den kinetiske energi eller bevægelsesenergien til sidste blive omdannet til indre energi eller varme.

3. Opstilling af den matematiske model

For at opstille en matematisk model for udstrømningen af væske fra en beholder, må vi benytte de fysiske love, der gælder for udstrømningen.

Vi har allerede været inde på, at det er tyngdekraften, der får væske til at strømme ud. Endvidere har vi været inde på, at der går noget energi tabt ved turbulensen omkring udløbet. Den fysiske lov, vi her benytter, er *energisætningen.* Det er benyttelsen af denne sætning, der fører til opstillingen af Torricelli's lov. Denne lov giver os en sammenhæng imellem de to fysiske størrelser udløbshastigheden *v* og væskehøjden *h*. Vi har altså én ligning med to ubekendte. Så vi mangler endnu en ligning, der indeholder størrelserne *v* og *h*.

Denne ligning får vi, ved at benytte den grundlæggende fysiske lov, der udsiger, at massen af et lukket system ikke kan forsvinde eller med andre ord: *Massen af et lukket fysisk system er bevaret*.
Loven kan ikke bevises, men kan kun efterprøves eksperimentelt.

Vi antager, at væsken ikke kan sammentrykkes. Derved er massefylden af væsken konstant, og vi behøver kun at betragte ændringer i væskerumfang eller volumen. Vi vil nu udtrykke, at det væskerumfang $dV_{beholder}$ der i et lille tidsrum dt forsvinder inde fra beholderen, må være det samme, som det væskerumfang $dV_{udløb}$ der tidsrummet dt strømmer ud af udløbet.

For at gøre dette indfører vi følgende størrelser, se figur 1:

$h(t)$: Højden af væskeoverfladen i beholderen til tiden t.
$B(h)$: Tværsnitsareal af beholderen. *B* kan afhænge af højden $h(t)$ af væskestanden.
A: Tværsnitsareal af hullet ved udløbet. *A* regnes konstant

Væsken der strømmer ud af udløbet i tiden dt bevæger sig stykket $ds = v \cdot dt$.
Ifølge Torricelli's lov får vi derfor:

$$dV_{udløb} = -v \cdot dt \cdot A = -0{,}6\sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot A \cdot dt$$

Ændring i volumen af væske i beholderen er

$$dV_{beholder} = B(h) \cdot dh$$

Sættes de to udtryk lig hinanden: $dV_{udløb} = dV_{beholder}$ får følgende ligning i $h(t)$

$$dV_{udløb} = dV_{beholder} \Leftrightarrow$$

$$-0{,}6\sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot A_{udløb} \cdot dt = B(h) \cdot dh$$

Ligningen er en 1. ordens differentialligning i $h(t)$.
Vi samler konstanterne til en værdi *k*.

$$\frac{dh}{dt} = -k \cdot \frac{\sqrt{h}}{B(h)}$$

Denne bliver særlig simpel, hvis vi antager, at
Beholderens tværsnitsareal *B* er konstant. Herved får vi ligningen

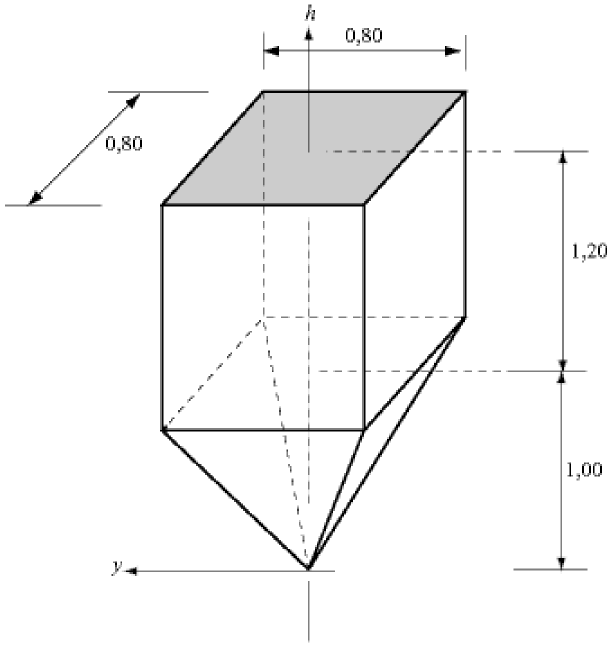
Hvor *k* er en positiv konstant, der bl.a. afhænger af udløbshullets tværsnitsareal.

I det følgende antages *k* at have værdien *k* = 0,02216

Der skal arbejdes med tømning af en beholder efter eget valg. Nedenfor er givet nogle eksempler på beholdere, der kan regnes på. For alle beholdere gælder at beholderens totale højde H er 2,20m.

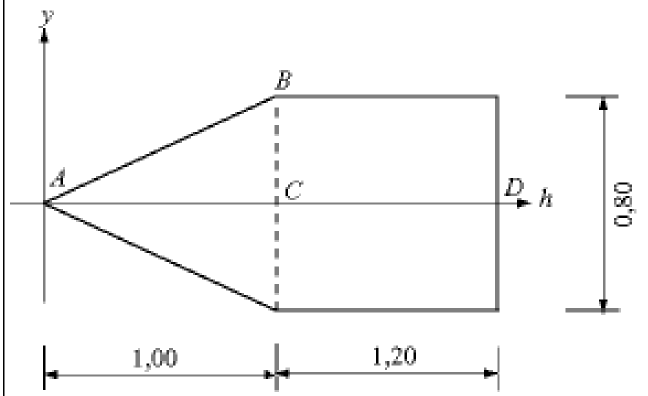
ISBN 9788770668781

Forslag 1



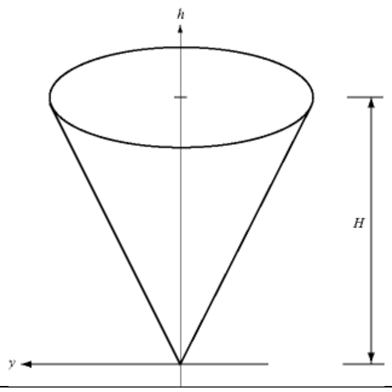
Den øverste del af beholderen er et prisme med et kvadratisk tværsnit.
Den nederste del af beholderen er en regulær pyramide.

Nedenfor ses et tværsnit af beholderen:

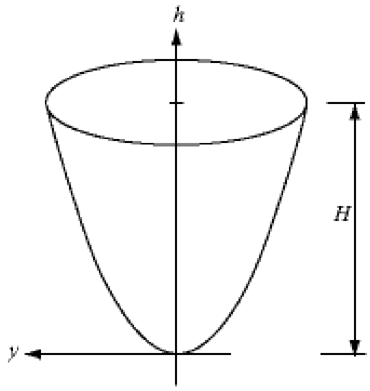


Andre forslag til beholdere er vist nedenfor. Her skal benyttes en funktion *f* til at angive beholderens ydre afgrænsning. Arealet mellem grafen for funktionen *f* og *h*-aksen drejes 360^0 omkring *h*-aksen, og det derved fremkomne omdrejningslegeme beskriver beholderens volumen. Som funktioner kan f.eks. anvendes potensfunktioner af forskellig grad.

Forslag 2



Forslag 3



ISBN 9788770668781

Opgaver

a) Bestem den valgte beholders volumen.

b) Bestem, for den valgte beholder, en regneforskrift for arealet af væskeoverfladen *A*, som en funktion af væskehøjden *h*.

c) Opstil differentialligningen til bestemmelse af væskehøjden *h* som funktion af tiden *t*.

d) Bestem den løsning $y = h(t)$, hvorom det gælder, at til $t = 0$ er $h = H$.

e) Tegn grafen for løsningen $y = h(t)$

f) Bestem til hvilket tidspunkt *t*, at halvdelen af væskemængden er løbet ud.
Hvornår er 10 %, 95 %,..... løbet ud? Hvordan kan dette anskueliggøres?

g) Bestem til hvilken tid *t* beholderen er tom.

Udfordrende tillægsopgave til mat-fys elever.

Vi ser nu på cylinderformet varmtvandsbeholder med højden h_0 = 80 cm og en diameter på d_1 = 40 cm
Udløbet forneden foregår igennem et 1" rør hvis indre diameter er d_2 = 24 mm .

4. Find volumen af varmtvandsbeholderen, når den er fyldt.
5. Find den tid det tager, at tømme en fyldt beholder, og skitser væskehøjden $h(t)$.

Udarbejd besvarelsen som en rapport. Du skal gøre noget ud af opstillingen af modellen, og redegøre for løsningsmetoden, men ikke bevise separationsmetoden.