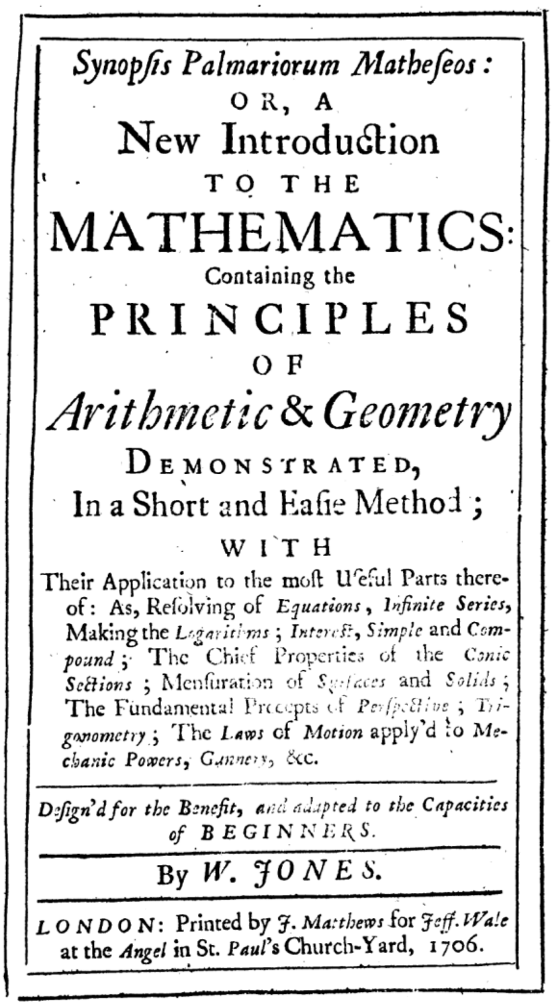
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

website: link fra kapitel 2, *Integralregning*. link fra afsnit 1

Symbolet π introduceres af William Jones i 1706

Første gang vi møder symbolet π som betegnelse for forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter, er i et værk af den engelske matematiker William Jones (1675-1749): *A New Introduction to the Mathematics, Containing the Principles of Arithmetic and Geometry*. Værket bliver ofte i litteraturen betegnet med den titel, der er nævnt øverst på titelbladet: *Synopsis Palmariorum Matheseos*, der betyder: *En synopsis over opnåede resultater i matematikken,*



Synopſis Palmariorum Matheſeos:
OR, A
New Introduction
TO THE
MATHEMATICS:
Containing the
PRINCIPLES
OF
Arithmetic & *Geometry*
DEMONSTRATED,
In a Short and Eaſie Method;
WITH
Their Application to the moſt Uſeful Parts thereof: As, Reſolving of *Equations*, *Infinite Series*, Making the *Logarithms*; *Intereſt*, *Simple* and *Compound*; The Chief Properties of the *Conic Sections*; Menſuration of *Surfaces* and *Solids*; The Fundamental Precepts of *Perſpective*; *Trigonometry*; The *Laws* of *Motion* apply'd to *Mechanic Powers*, *Gunnery*, &c.

Deſign'd for the Benefit, and adapted to the Capacities of BEGINNERS.

By *W. JONES.*

LONDON: Printed by *J. Matthews* for *Jeff. Wale* at the *Angel* in St. *Paul's* Church-Yard, 1706.

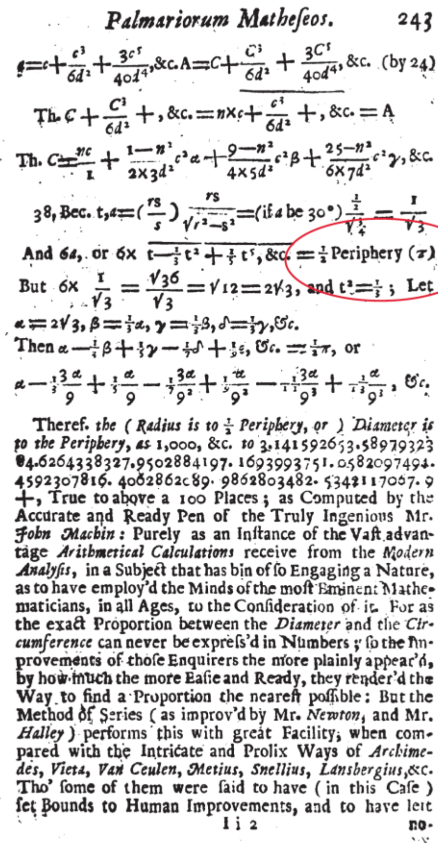
Hele værket kan hentes ***her.***

1706 er på Newtons tid, han har skrevet sine hovedværker, men endnu ikke publiceret nær alt. Det er ikke mere end godt 100 år efter, at det blev almindeligt at anvende symboler som *x* i matematik. Og med William Jones altså også symboler for størrelser som pi.

Prøv at hente værket frem og læg mærke til, hvor let det er at læse den engelske *tekst*. En dansk tekst fra 1700 er ganske vanskelig at læse, men det engelske skriftsprog har udviklet sig meget lidt.
Det fremgår også af de to tekstuddrag nedenfor.

Side 243 er første gang, symbolet dukker op i matematikhistorien, markeret med den røde oval. Jones skriver symbolet uden kommentar: *Periphery* er på dansk: *perferi* , og betyder *cirkelomkreds*. Jones forklarer ikke, hvorfor han valgte dette symbol, men måske er forklaringen, at pi er det græske bogstav for p, og periferi starter med p.

I teksten markeret med de orange streger finder vi det berømte citat af ham: *The exact proportion between the diameter and the circumference can never be expressed i numbers.*
På dette tidspunkt i matematikhistorien er tal noget, der kan udtrykkes ved formler som $\sqrt{2}$, $\cos(0.78)$, $\ln(5)$, eller som måske er rod i et polynomium med hele tal som koefficienter. Men pi er hverken eller. Lige oven over har han angivet pi med 100 decimaler! Og han ved, det bare bliver ved og ved. Dette var beregnet af hans ven John Machin ved en snedig algoritme, der siden er er blevet kaldt for "Machins algoritme". Den kommenteres nedenfor.



Palmariorum Matheſeos. 243

$$a = c + \frac{c^3}{6d^2} + \frac{3c^5}{40d^4}, \&c.\ A = C + \frac{C^3}{6d^2} + \frac{3C^5}{40d^4}, \&c.\ \text{(by 24)}$$

$$\text{Th. } C + \frac{C^3}{6d^2} +, \&c. = n \times c + \frac{c^3}{6d^2} +, \&c. = A$$

$$\text{Th. } C = \frac{nc}{1} + \frac{1-n^2}{2\times 3d^2}c^2\alpha + \frac{9-n^2}{4\times 5d^2}c^2\beta + \frac{25-n^2}{6\times 7d^2}c^2\gamma, \&c.$$

$$38, \text{Bec. } t, a = \left(\frac{rs}{s}\right)\frac{rs}{\sqrt{r^2-s^2}} = (\text{if } a \text{ be } 30°)\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

And $6a$, or $6\times\overline{t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5, \&c.} = \frac{1}{2}$ Periphery (π)

But $6\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, and $t^2 = \frac{1}{3}$; Let

$\alpha = 2\sqrt{3}, \beta = \frac{1}{3}\alpha, \gamma = \frac{1}{3}\beta, \delta = \frac{1}{3}\gamma$, &c.

Then $\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{5}\gamma - \frac{1}{7}\delta + \frac{1}{9}\varepsilon$, &c. $= \frac{1}{2}\pi$, or

$$\alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}, \&c.$$

Theref. *the* (*Radius is to* ½ *Periphery, or*) *Diameter is to the Periphery, as* 1,000, &c. *to* 3.14159 26535.89793 23846.26433 83279.50288 41971.69399 37510.58209 74944.59230 78164.06286 20899.86280 34825.34211 70679 +, True to above a 100 Places; as Computed by the Accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr. *John Machin*: Purely as an Inſtance of the Vaſt advantage *Arithmetical Calculations* receive from the *Modern Analyſis*, in a Subject that has bin of ſo Engaging a Nature, as to have employ'd the Minds of the moſt Eminent Mathematicians, in all Ages, to the Conſideration of it. For as the exact Proportion between the *Diameter* and the *Circumference* can never be expreſs'd in Numbers; ſo the Improvements of thoſe Enquirers the more plainly appear'd, by how much the more Eaſie and Ready, they render'd the Way to find a Proportion the neareſt poſſible: But the Method of Series (as improv'd by Mr. *Newton*, and Mr. *Halley*) performs this with great Facility, when compared with the Intricate and Prolix Ways of *Archimedes*, *Vieta*, *Van Ceulen*, *Metius*, *Snellius*, *Lansbergius*, &c. Tho' ſome of them were ſaid to have (in this Caſe) ſet Bounds to Human Improvements, and to have left

Ii 2 no-

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

På side 263 definerer William Jones mere præcist, hvad hans symbol π står for – se teksten mellem de røde bjælker:

I *cirklen* forholder diameteren sig til omkredsen, som tallet 1 til (en ret kompliceret formel) etc = 3,14159 = π

Palmariorum Matheseos. 263

1. *Where the Ordinates are parallel*; $\dot{\lambda} = \overline{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}|^{\frac{1}{2}}$, and $\dot{\alpha} = \dot{x}y$.

2. *Where the Ordinates respect a Point*; (Let r = Rad. of a Circle describ'd on that Point, x = *Abscissa*, and y = that part intercepted between the Point and Curve) $\dot{\lambda} = \overline{y^2\dot{x}^2 + r^2\dot{y}^2}|^{\frac{1}{2}} \div r$, and $\dot{\alpha} = y^2\dot{x} \div 2r$. And by substituting in the room of $\dot{x}^2$ or $\dot{y}^2$, or of $\dot{x}$ or y, their Values from the Equation of the Curve, there will be produced an Equation whose Fluent is the Length, or Area sought.

Thus in Case 1. If $y = x^n$, then $\dot{\alpha} = \dot{x}x^n$, th. $\alpha = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{xx^n}{n+1} =\right) \frac{1}{n+1}xy$. And the *Asymptotic Space*, in the Hyperbola, (n being there *Negative*) is $= \frac{1}{-n+1}xy$; Therefore if $n <, =, > 1$, the *Space* will be *Finite*, *Infinite*, or *More than Infinite*.

More Examples are given where Occasion requires, th. are here, for Brevity's sake, omitted.

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to $\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -$, &c. $=$ 3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all desireable Ease and Dispatch.

Whence in the *Circle*, any one of these three, α, c, d, being given, the other two are found, as, $d = c \div \pi = \overline{\alpha \div \frac{1}{4}\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $c = d \times \pi = \overline{\alpha \times 4\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{4}\pi \times d^2 = c^2 \div 4\pi$

And

Den komplicerede formel, som vi på s. 243 så en variant af, og som åbenbart er en formel der giver tallet π er den som John Machin fandt.

Udgangspunktet for denne algoritme er den simple iagttagelse, at $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Det svarer til $\tan(45°)$, og i en enhedscirkel ser vi, at en retningsvinkel på $45°$ giver en ligebenet trekant. Så $\cos(45°) = \sin(45°)$, og dermed er $\tan(45°) = 1$.

Ser vi nu kun på intervallet $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, så er tangens en voksende funktion og har derfor en omvendt funktion, vi faktisk kender som $\tan^{-1}$. Denne kaldes også arctan, og repræsenterer altså den omvendte operation, som fjerner tangens:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

Hvis vi kan udregne arctan-værdier, så har vi jo her en formel for π:

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1)$$

På William Jones og Newtons tid har en matematiker Brook Taylor (1685-1731) udviklet sin teori for det, vi idag kalder *Taylorrækker*: Enhver nogenlunde pæn funktion kan skrives som en (normalt) uendelig sum af potenser. Fx:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} +$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

En funktion som arctan har også en Taylorrække, og der er en fast procedure for beregning af de enkelte led. Dette har vi behandlet i projekt 2.9 om Taylorrækker. Taylorrækken for arctan er:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots \qquad (*)$$

Prøv nu at se teksten. Kan du se det begynder at ligne.
Vi kunne nu indsætte og få udtrykket:

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + \frac{1^9}{9} - \ldots\right) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

Konvergensen af denne række er imidlertid meget langsom. Vi skal have 5.000.000.000 led med, før vi når op på 10 cifre!

Men dette var også blot Taylors generelle formel. Nu kommer John Machin ind i billedet.
Han beviser følgende mærkelige formel:

$$\pi = 16 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \qquad (**)$$

ISBN 9788770668781

Prøv at indsætte $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{239}$ hver for sig i formlen for arctan(*), og kombiner disse to rækker som der står i (**), saml leddene efter x-potenserne, og se, om ikke du faktisk får det som står i teksten. (En streg over to led er en parentes, hvor en fællers faktor er sat uden for parentes.

Denne formel giver en hurtig konvergens. Prøv selv i et værktøjsprogram at medtage fx 10 og 20 led.

Machin- formlen er ikke så vanskelig endda at vise – det gør vi i projektet om Taylorrækker.