ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Bevis for logaritmefunktionens egenskaber – øvelse 2.55

For alle potensfunktioner x^a gælder, at den kanoniske stamfunktion er:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ , blot } a \neq -1$$

Betingelsen $a \neq -1$ er indlysende ud fra formlen, da vi ellers ville dividere med 0. Men det er alligevel mærkeligt, at vi har en fælles formel for stamfunktionerne til alle:

$$\ldots x^{-3}, x^{-2}, x^0, x^1, x^2, x^3 \ldots$$

hvor vi nøjes vmed at se på heltalspotenser.

Den funktion, som mangler her, skiller sig virkelig ud. Den er grundlag for konstruktionen af logaritmefunktionerne:

Definition: Den naturlige logaritmefunktion $\ln(a)$

Den naturlige logaritmefunktion $\ln(a)$ defineres som det bestemte integral af $x^{-1} = \frac{1}{x}$ fra 1 til a:

$$\ln(a) := \int_1^a \tfrac{1}{x}\,dx \text{ , } a > 0$$

Bemærkning 1: Vi beviser i kapitel 7, at for alle kontinuerte funktioner eksisterer integralet. Så definitionen giver mening.
Bemærkning 2: Definitionen kan ikke umiddelbart udstrækkes til, at *a* er 0 eller a er et negativt tal.

a) Gør rede for, at $\ln(1) = 0$

Indsæt $a = 1$ i definitionen:

$$\ln(1) := \int_1^1 \tfrac{1}{x}\,dx = 0$$

b) Gør rede for, at $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

Indsæt $a \cdot b$ i definitionen og gennemfør følgende omskrivninger:

$$\int_1^{a\cdot b} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_a^{a\cdot b} \frac{1}{x}\,dx \qquad (*)$$ Indskudssætningen

Omskriv det sidste integral ved brug af substitution:

$$\int_a^{a\cdot b} \frac{1}{x}\,dx = \int_a^{a\cdot b} \frac{1}{\frac{1}{a}\cdot x} \cdot \frac{1}{a}\,dx$$ Gange og dividere med samme tal $\frac{1}{a}$

$$\int_a^{a\cdot b} \frac{1}{x}\,dx = \int_a^{a\cdot b} \frac{1}{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a}\,dx$$ Brøkregel: $\frac{1}{a} \cdot x = \frac{x}{a}$

Gennemfør substitutionen: $u = \frac{x}{a}$.

$du = \frac{1}{a}\,dx$ Fordi $u = \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \cdot x$

nye grænser når $x = a$ er $u = \frac{a}{a} = 1$

når $x = a \cdot b$ er $u = \frac{a \cdot b}{a} = \frac{b}{1} = b$

Indsæt til substitution:

$$\int_a^{a\cdot b} \frac{1}{x}\,dx = \int_a^{a\cdot b} \frac{1}{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int_1^{b} \frac{1}{u} \cdot du \text{ ,}$$

ISBN 9788770668781

men det sidste udtryk er jo lig med $\ln(b)$, så samlet får vi af (*):

$$\begin{aligned}\ln(a\cdot b) &= \int_1^{a\cdot b}\frac{1}{x}\,dx\\ &= \int_1^{a}\frac{1}{x}\,dx + \int_a^{a\cdot b}\frac{1}{x}\,dx\\ &= \int_1^{a}\frac{1}{x}\,dx + \int_1^{b}\frac{1}{u}\,du\\ &= \ln(a)+\ln(b)\end{aligned}$$

hvilket er den ønskede regneregel.

c) Gør rede for, at $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

Udnyt: $b\cdot\frac{a}{b}=a$, tag ln på begge sider og udnyt regnereglen fra piunkt b):

$$\ln\left(b\cdot\frac{a}{b}\right)=\ln(a)$$

$$\ln(b)+\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)$$

Roker over i sidste ligning:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

hvilket er den ønskede regneregel.

d) Gør rede for, at 1) $\ln(a^n)=n\cdot\ln(a)$ **, 2)** $\ln(a^{-n})=-n\cdot\ln(a)$ **, 3)** $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)$

I det følgende er n et positivt helt tal

Bevis for d1):

$$\begin{aligned}\ln(a^n) &= \ln(a\cdot a^{n-1})\\ &= \ln(a)+\ln(a^{n-1})\\ &= \ln(a)+\ln(a\cdot a^{n-2})\\ &= \ln(a)+\ln(a)+\ln(a^{n-2})\\ &= \ln(a)+\ln(a)+\ln(a\cdot a^{n-3})\\ &= \ln(a)+\ln(a)+\ln(a)+\ln(a^{n-3})\\ &= \ldots\\ &= \ln(a)+\ln(a)+\ln(a)\ \ldots\ \ln(a)\ \ (n \text{ led})\\ &= n\cdot\ln(a)\end{aligned}$$

Bevis for d2):

$$\begin{aligned}\ln(a^{-n}) &= \ln\left(\frac{1}{a^n}\right)\\ &= \ln(1)-\ln(a^n)\\ &= 0-n\cdot\ln(a)\\ &= -n\cdot\ln(a)\end{aligned}$$

ISBN 9788770668781

Bevis for d3):

Udnyt, at $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ved at tage ln på begge sider:

$$\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = \ln(a)$$

$$2 \cdot \ln\left(\sqrt{a}\right) = \ln(a)$$

Divider nu 2 over på højre side:

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \tfrac{1}{2}\ln(a)$$

hvilket var den ønskede formel.

e) Gør rede for, at $\ln(x)$ er en voksende funktion

En differentiabel funktion *f* er voksende, hvis dens afledede funktion er positiv:

$$\ln(x) = \int_1^x \tfrac{1}{u}\, dx$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \left(\int_1^x \tfrac{1}{u}\, dx\right)'$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

hvor vi har udnyttet analysens hovedsætning, at differentiation og integration er omvendte operationer, der ophæver hinanden.

Da vi altid har, at $x > 0$, er

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x} > 0$$

Men her står at ln er en voksende funktion.

f) Gør rede for, at 1) $\ln(x) \to \infty$ når $x \to \infty$ **og 2)** $\ln(x) \to -\infty$ når $x \to 0$

Bevis for f1)

Vi skal vise, at $\ln(x)$ *kan blive så stor det skal være, blot x vælges tilstrækkelig stor*.

Lad *K* være et stort tal.

Da ln er voksende, og $\ln(1) = 0$, er $\ln(2) > 0$

Betragt nu uligheden :

$$\ln(2^n) = n \cdot \ln(2) > K\ ,$$

og isoler *n*:

$$n \cdot \ln(2) > K$$

$$n > \frac{K}{\ln(2)}$$

Her står, at hvis vi vælger *n* større end $\frac{K}{\ln(2)}$, sætter $x = 2^n$, så vil $\ln(2^n) > K$, hvilket var det ønskede resultat – funktionsværdier af ln kan blive så store, vi ønsker det.

Bevis for f2)

Vi skal vise, at $\ln(x)$ *kan blive så stor negativ det skal være, blot x vælges tilstrækkelig tæt ved 0.*

Lad *K* være et stort tal. Så er $-K$ et stort negativt tal.

Da ln er voksende, og $\ln(1) = 0$, er $\ln(\tfrac{1}{2}) = -\ln(2) < 0$

Betragt nu uligheden :

$$\ln\left((\tfrac{1}{2})^n\right) = n \cdot \ln(\tfrac{1}{2}) = -n \cdot \ln(2) < -K\ ,$$

og isoler n:

$$-n \cdot \ln(2) < -K$$
$$n \cdot \ln(2) > K$$
$$n > \frac{K}{\ln(2)}$$

Her står, at hvis vi vælger n større end $\frac{K}{\ln(2)}$, så vil $\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < -K$. Men da ln er voksende, så gælder, at hvis vi vælger et $x < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (for dette valg af n), så er $\ln(x) < -K$ hvilket var det ønskede resultat – funktionsværdier af ln kan blive så store negative, vi ønsker det.

g) Gør rede for, at for ethvert tal *a* og *x*, så har ligningen $\ln(y) = x \cdot \ln(a)$ en løsning.
Resultate i punkt f siger, at værdimængden af ln er alle tal, da ln er kontinuert og går mod + og – uendelig i hver sin ende af definitionsmængden. For et givet tal a og et givet x er $x \cdot \ln(a)$ et reelt tal. Og da alle tal er med i værdimængden – så vil en vandret linje tegnet gennem tallet $x \cdot \ln(a)$ på y-aksen skære grafen for ln. Og da ln er voksende vil den kun skære grafen ét sted. Altså erv der præcis en løsning.

Dette tal y defineres som a^x :

$$\ln(y) = x \cdot \ln(a) \Leftrightarrow y = a^x$$

Hermed er potensbegrebet udvidet til alle tal x!