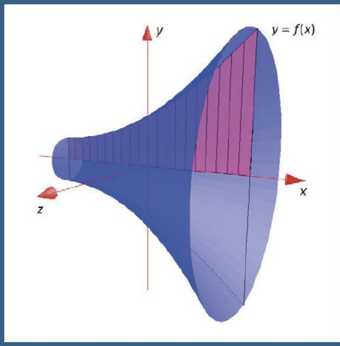
ISBN 9788770668781

Bevis for sætning 10: Beregning af volumen af omdrejningslegemer

Sætning 10: Rumfanget af et omdrejningslegeme ved drejning omkring x-aksen

Lad f være en kontinuert positiv funktion, og lad grafen for f sammen med x-aksen og de lodrette linjer $x = a$ og $x = b$ afgrænse punktmængden M. Da er rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at dreje punktmængden M 360° grader omkring x-aksen givet ved integralet:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$$



Beviset for sætning 10 vil være opdelt i nogle trin

Sætning 10a: Volumenfunktionen er en stamfunktion
Lad f være en ikke-negativ funktion, der er kontinuert og monoton i intervallet $[a;b]$. Så er volumenfunktionen $V(x)$, der angiver volumenet af omdrejningslegemet, når grafen for f i området fra a til x drejes 360° om x-aksen, en stamfunktion til $\pi \cdot f^2$. Dvs. $V(x)$ er differentiabel, og $V'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$.

Bevis for sætning 10a
(*Sammenlign beviset her med det bevis, du har gennemgået for sætning 5*)
Vi antager f er voksende. Beviset går på samme måde for en aftagende funktion.
Vi definerer funktionen $V(x)$ som beskrevet i sætningen, som den funktion, der måler volumenet af omdrejningslegemet, grafen for f fra a og hen til x drejes 360^o om x-aksen.
Vi ønsker at vise, at $V(x)$ er differentiabel, og at $V'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$.
Dertil skal vi bruge tre-trins-reglen som vi arbejdede med under emnet differentialregning.
Tre-trins-reglen siger, at vi kan undersøge om en funktion er differentiabel ved følgende proces:

Praxis: Tretrinsreglen 2. version

1. trin: Opskriv sekanthældningen $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ for den givne funktion.

2. trin: Omskriv sekanthældningen til noget overskueligt.

3. trin: Lad $h \to 0$ og argumenter for, hvad der sker med (det omskrevne udtryk for) sekanthældningen.

Funktionen $f(x)$ er her $V(x)$. Vi vælger et tilfældigt x_0 mellem a og b og en positiv tilvækst h.

1. trin: Opskriv sekanthældningen $\dfrac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h}$

2. trin: Omskriv sekanthældningen til noget overskueligt.
Vi betragter først tælleren $V(x_0+h)-V(x_0)$.
$V(x_0)$ er volumenet af omdrejningslegemet, når grafen for f fra a til x_0 drejes 360^o om x-aksen.
$V(x_0+h)$ er volumenet af omdrejningslegemet, når grafen for f fra a til x_0+h drejes 360^o om x-aksen.

$V(x_0+h)-V(x_0)$ er derfor volumenet af omdrejningslegemet, når *grafen for f i området fra* x_0 *til* x_0+h *drejes* 360^o *om x-aksen*.

Da vi ikke kender funktionen *f* kan vi ikke foretage en direkte omskrivning, men vi kan i stedet foretage en vurdering af størrelsen af dette volumen:
Funktionen er voksende, så for alle *x* i intervallet fra x_0 til x_0+h gælder der:

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_0+h) \qquad (*)$$

$V(x_0+h)-V(x_0)$, er volumenet af et omdrejningslegeme. *Indeni* dette ligger pga (*) en "lille" cylinder, hvor radius er $f(x_0)$. *Udenom* dette ligger, igen pga (*), en "stor" cylinder, hvor radius er $f(x_0+h)$. Prøv selv at tegne en figur, der illustrerer det!

Vi husker at rumfanget af en cylinder med radius *r* og højde *h* er $\pi \cdot r^2 \cdot h$
De to cylindere her begge en "højde" på *h* og har derfor volumener på henh. $\pi \cdot (f(x_0))^2 \cdot h$ og $\pi \cdot (f(x_0+h))^2 \cdot h$.

Resultatet af vores vurdering af arealet $V(x_0+h)-V(x_0)$ kan vi derfor skrive med en dobbelt ulighed:

$$\pi \cdot (f(x_0))^2 \cdot h \le V(x_0+h)-V(x_0) \le \pi \cdot (f(x_0+h))^2 \cdot h$$

Divider med *h* giver

$$\pi \cdot (f(x_0))^2 \le \frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} \le \pi \cdot (f(x_0+h))^2 .$$

Vi har hermed gennemført en vurdering af størrelsen af sekanthældningen, som vi kan anvende under punkt 3.

3. trin: Lad $h \to 0$
Vi udnytter nu den egenskab, at *f* er kontinuert. Kontinuitet betyder *grafisk*, at der ikke er spring eller huller i grafen. Vi siger også, at *for kontinuerte funktioner kan grafen tegnes ud i en streg uden at løfte hånden fra papiret*. Med *symbolsprog* kan kontinuitet udtrykkes ved, at $f(x_0+h)$ vil gå mod $f(x_0)$ når h går mod 0. Og dermed vil $\pi \cdot (f(x_0+h))^2$ gå mod $\pi \cdot (f(x_0))^2$ når h går mod 0.
Se nu på dobbeltuligheden:

$$\pi \cdot (f(x_0))^2 \le \frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} \le \pi \cdot (f(x_0+h))^2$$

Når h går mod 0, vil tallet til venstre blive stående på $\pi \cdot (f(x_0))^2$, mens tallet til højre, $\pi \cdot (f(x_0+h))^2$ vil nærme sig $\pi \cdot (f(x_0))^2$ mere og mere. Men da sekanthældningen hele tiden er klemt inde mellem disse to tal, så vil den også nærme sig det samme tal $\pi \cdot (f(x_0))^2$:

$$\frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} \to \pi \cdot (f(x_0))^2 \text{ når } h \to 0 .$$

Konklusion: Funktionen $V(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotient $V'(x_0) = \pi \cdot (f(x_0))^2$
Da x_0 var valgt tilfældigt, gælder dette for alle *x*.

Hermed har vi vist sætningen: $V(x)$ er differentiabel og $V'(x) = \pi \cdot (f(x))^2$.

Sagt med andre ord: **Volumenfunktionen er en stamfunktion til** $\pi \cdot (f(x))^2$**.**

Sætning 10: Beregning af volumen ved hjælp af integralregning
Lad *f* være en ikke-negativ funktion, der er kontinuert og monoton i intervallet $[a;b]$. Så kan volumen af det omdrejningslegeme, der fremkommer når grafen for *f* i området fra *a* til *b* drejes 360° om x-aksen, beregnes som

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx .$$

Bevis:
Vi prøver simpelthen at udregne højre side:

$$\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx$$

Kender man *stamfunktionen* til en integrand som $\pi \cdot (f(x))^2$, så er det en simpel sag at udregne integralet. Men det gør vi jo her: Stamfunktionen til integranden er volumenfunktionen $V(x)$. Så:

$$\int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx = \left[V(x)\right]_a^b = V(b) - V(a)$$

$V(x)$ angiver volumenet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for *f* drejes 360° om x-aksen i området fra *a* til *x*. Men så er:

- $V(a) = 0$, da området fra *a* til *a* er tomt.
- $V(b) =$ Det søgte volumen, V

Konklusion: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx = V(b) - V(a) = V - 0 = V$

Læses denne identitet fra højre mod venstre står der:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Hermed har vi redegjort for sætning 10.