ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

website: link fra kapitel 2, *Integralregning*. link fra afsnit 5.1

Bevis for regnereglerne i sætning 8

Sætning 8: **Regneregler for bestemte integraler**
Der gælder følgende regneregler for bestemte integraler

1) $\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b f(x)-g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot \int_a^b f(x)dx$

4) $\int_a^b f(g(x)\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$

Forudsætningen er naturligvis, at de to funktioner begge har stamfunktioner, henh. $F(x)$ og $G(x)$, og at de er defineret i det givne interval.

I grundbogen er **den første regneregel** bevist efter opskriften:
- udregn venstresiden
- udregn højresiden
Kontroller de to udtryk er ens

Bevis for 2. regneregel:
Venstresiden:

$$\int_a^b f(x)-g(x)dx = \left[F(x)-G(x)\right]_a^b = F(b)-G(b)-\left(F(a)-G(a)\right) = F(b)-G(b)-F(a)+G(a) = \left(F(b)-F(a)\right)-\left(G(b)-G(a)\right)$$

Vi har anvendt sætningen om stamfunktion til en differens af to funktioner.
Højresiden:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b - \left[G(x)\right]_a^b = \left(F(b)-F(a)\right)-\left(G(b)-G(a)\right).$$

Da venstresiden og højresiden kan omskrives så det er ens udtryk er punkt 2 bevist.

Bevis for 3. regneregel:
Venstresiden:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = \left[k\cdot F(x)\right]_a^b = k\cdot F(b)-k\cdot F(a)$$

Vi har anvendt sætningen om stamfunktion til et produkt med konstantfaktor.
Højresiden:

$$k\cdot\int_a^b f(x)dx = k\cdot\left[F(x)\right]_a^b = k\cdot\left(F(b)-F(a)\right) = k\cdot F(b)-k\cdot F(a).$$

Da venstresiden og højresiden kan omskrives så det er ens udtryk er punkt 3 bevist.

Bevis for 4. regneregel:
Venstresiden:

$$\int_a^b f(g(x)\cdot g'(x)dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b))-F(g(a))$$

Vi har anvendt, at sammensat differentiation giver, at $F(g(x))$ er en stamfunktion til $f(g(x)\cdot g'(x)$.
Højresiden:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = \left[F(x)\right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b))-F(g(a)).$$

Da venstresiden og højresiden kan omskrives så det er ens udtryk er punkt 4 bevist.