Hvad er matematik? 3
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

website: link fra kapitel 2, *Integralregning*. link fra afsnit 4

Integralregningens hovedsætning – illustreret med $f(x)=x^3$

Sætning 4: Integralregningens hovedsætning
Lad *f* være en ikke-negativ funktion, der er kontinuert og monoton i intervallet [*a*;*b*]. Så er arealfunktionen *A*(*x*), der angiver arealet under grafen i området fra *a* til *x*, en stamfunktion til *f*. Dvs. *A*(*x*) er differentiabel, og *A*′(*x*) = *f*(*x*).

Vi vil nu bevise integralregningens hovedsætning for funktionen $f(x)=x^3$ i intervallet $x \geq 0$.

Vi definerer funktionen *A*(*x*) som beskrevet i sætningen, nemlig som den funktion, der måler arealet under grafen for *f* fra *a* og hen til *x*.

Vi ønsker at vise, at *A*(*x*) er differentiabel, og at *A*′(*x*) = *f*(*x*).
Dertil skal vi bruge tretrinsreglen som vi arbejdede med under emnet differentialregning.
Tretrinsreglen siger, at vi kan undersøge om en funktion er differentiabel ved følgende proces:

Praxis: Tretrinsreglen 2. version
1. trin: Opskriv sekanthældningen $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ for den givne funktion.

2. trin: Omskriv sekanthældningen til noget, man kan arbejde videre med.

3. trin: Lad $h \to 0$ og argumenter for, hvad der sker med (det omskrevne udtryk for) sekanthældningen.

Den "givne funktion" er her *A*(*x*). Vi vælger et tilfældigt x_0 mellem *a* og *b* og en positiv tilvækst *h*.

1. trin: Opskriv sekanthældningen: $\dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}$

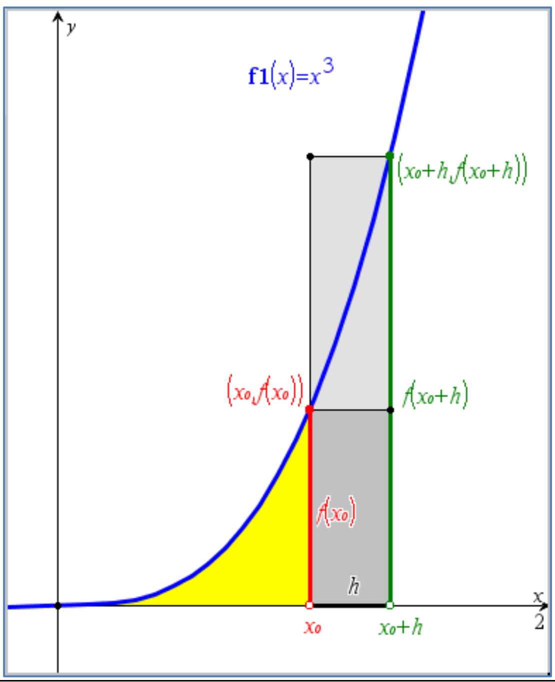
2. trin: Omskriv sekanthældningen til noget, man kan arbejde videre med.
Vi betragter først tælleren $A(x_0+h)-A(x_0)$:

$A(x_0)$ er arealet under grafen fra *a* til x_0.

$A(x_0+h)$ er arealet under grafen fra *a* til x_0+h.

$A(x_0+h)-A(x_0)$ er derfor *arealet under grafen fra* x_0 *til* x_0+h.

Vi kalder i det følgende dette areal for ΔA.
Vi ved at $f(x)=x^3$, og vi foretager nu en vurdering af størrelsen af det omtalte areal, som vi kalder ΔA:



ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Arealet ΔA er større end arealet af det "lille" rektangel, som har en bredde på *h* og en højde på $f(x_0)$. Dette areal er på: $f(x_0)\cdot h = {x_0}^3 \cdot h$

Arealet ΔA er mindre end arealet af det "store" rektangel, som har en bredde på *h* og en højde på $f(x_0+h)$.
Dette areal er på : $f(x_0+h)\cdot h = (x_0+h)^3 \cdot h$

Resultatet af vores vurdering af arealet $\Delta A = A(x_0+h)-A(x_0)$ kan vi skrive som en dobbelt ulighed:

$${x_0}^3 \cdot h \le A(x_0+h)-A(x_0) \le (x_0+h)^3 \cdot h$$

Vi dividerer med den positive tilvækst h og får:

$${x_0}^3 \le \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \le (x_0+h)^3$$

Vi har hermed gennemført en vurdering af størrelsen af sekanthældningen.
Dette anvendes under næste trin.

3. trin: Lad $h \to 0$

Vi udnytter nu den egenskab, at *f* er kontinuert.

Kontinuitet betyder *grafisk*, at der ikke er spring eller huller i grafen, hvilket jo grafen for $f(x)=x^3$ jo opfylder.

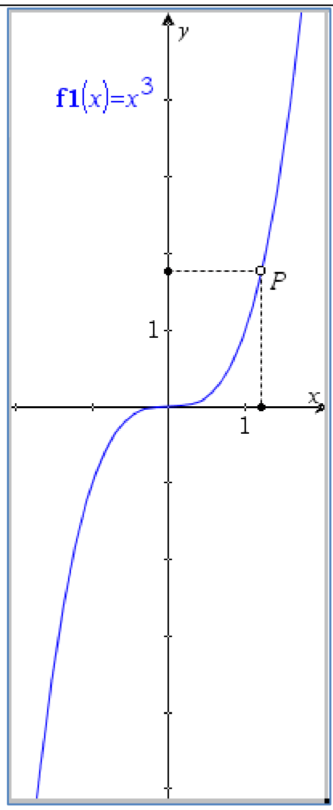
Vi siger også, at *for kontinuerte funktioner kan grafen tegnes ud i en streg uden at løfte hånden fra papiret*, hvilket svarer til at vi skal kunne trækket et frit punkt rundt på grafen uden forhindringer!

Med *symbolsprog* kan kontinuitet udtrykkes ved, at $f(x_0+h)$ vil nærme sig $f(x_0)$, når *h* går mod 0.

Se nu på dobbeltuligheden:

$${x_0}^3 \le \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \le (x_0+h)^3$$

Når *h* går mod 0, vil tallet til venstre blive stående på ${x_0}^3$, mens tallet til højre vil nærme sig ${x_0}^3$ mere og mere. Men da sekanthældningen hele tiden er klemt inde mellem disse to ens tal, så vil den også nærme sig tallet ${x_0}^3$.



Konklusion: Funktionen $A(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotient $A'(x_0)={x_0}^3$.