ISBN 9788770668781

Integralregningens hovedsætning – Beviset i det generelle tilfælde

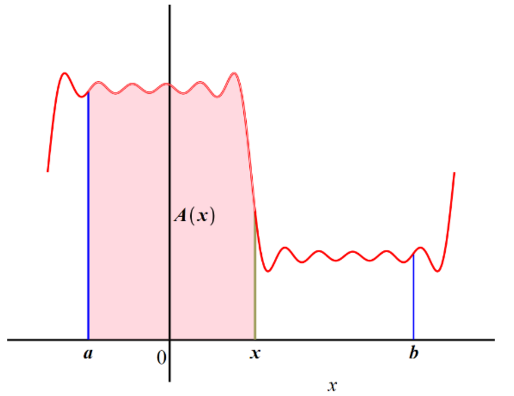
Sætning 4: Integralregningens hovedsætning
Lad *f* være en ikke-negativ funktion, der er kontinuert og monoton i intervallet $[a;b]$. Så er arealfunktionen $A(x)$, der angiver arealet under grafen i området fra *a* til *x*, en stamfunktion til *f*. Dvs. $A(x)$ er differentiabel, og $A'(x) = f(x)$.

Bevis:

Vi har givet en kontinuert funktion *f*, som kan have en graf som denne:

Vi definerer funktionen $A(x)$ som beskrevet i sætningen, som den funktion, der måler arealet under grafen af *f* fra *a* og hen til *x*.
$A(x)$ er altså arealet af området, der er tegnet pink.

Vi ønsker at vise, at $A(x)$ er differentiabel, og at $A'(x) = f(x)$.



Dertil vil vi bruge tre-trins-reglen som vi har præsenteret i *Hvad er matematik*? 2, kapitel 3B. Tre-trins-reglen siger, at vi kan undersøge om en funktion er differentiabel ved følgende proces:

Praxis: Tretrinsreglen 2. version
1. trin: Opskriv sekanthældningen $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ for den givne funktion.
2. trin: Omskriv sekanthældningen til noget overskueligt.
3. trin: Lad $h \to 0$ og argumenter for, hvad der sker med (det omskrevne udtryk for) sekanthældningen.

Den "givne funktion" er her $A(x)$. Vi vælger et tilfældigt *x* mellem *a* og *b* og en positiv tilvækst h.

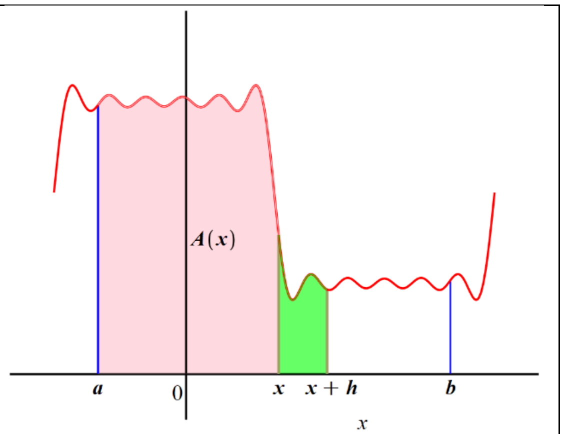
1. trin: Opskriv sekanthældningen $\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h}$

(*Bemærk*: Ordet *sekanthældning* kan måske forvirre her, for det er hældningen på grafen for $A(x)$ - det er ikke en hældning, der kan aflæses på grafen for den oprindelige funktion $f(x)$)
.

Vi betragter først tælleren $A(x+h)-A(x)$.

$A(x)$ er arealet under grafen fra *a* til x.
$A(x+h)$ er arealet under grafen fra *a* til $x+h$.
$A(x+h)-A(x)$ er derfor *arealet under grafen fra x til* $x+h$.
$A(x+h)-A(x)$ er altså arealet af området, der er tegnet grønt.

Da vi ikke kender funktionen *f* kan vi ikke foretage en direkte omskrivning, men vi kan i stedet foretage en vurdering af størrelsen af dette areal:



ISBN 9788770668781

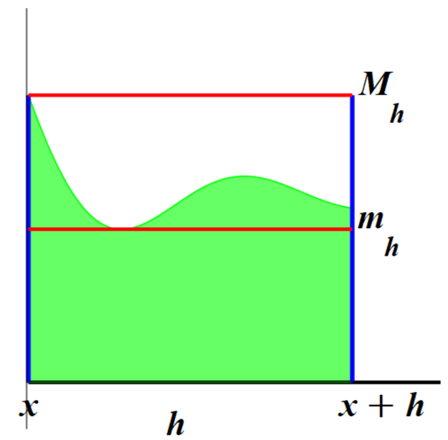
Lad os nu fokusere på det grønne område:

f er en kontinuert funktion. Om kontinuerte funktioner ved vi, at de i et lukket og begrænset interval, som fx. $[x; x+h]$, altid har et *maksimum, M* og et *minimum, m*. (Det er gennemgået i *Hvad er matematik*? 2, kapitel 3a, afsnit 2 om kontinuitet). Som det fremgår af illustrationen vil Maksimum og minimum afhænge af intervallet. Holder vi her *x* fast og lader *h* variere, vil maksimum og minimum derfor være funktioner af *h*. Det er angivet på illustrationen som M_h og m_h.

Maksimum og minimum er funktionsværdier, dvs der findes tal i intervallet, x_M og x_m, så:

$$f(x_M) = M_h \text{ og } f(x_m) = m_h$$

Hvor findes disse x-værdier på tegningen?



Når $h \to 0$, vil $x+h \to x$, og dette vil ”trække” x_M og x_m med ind til *x:*

$$x_M \to x \text{ og } x_m \to x$$

Da *f* er kontinuert vil der gælde

$$f(x_M) \to f(x) \text{ og } f(x_m) \to f(x)$$

Vi vil nu give en vurdering af $A(x+h) - A(x)$, som er lig med arealet af det grønne område

2. trin:
Arealet af det grønne område ligger mellem de to rektangler med grundlinjen *h* og højder henholdsvis $M_h = f(x_M)$ og $m_h = f(x_m)$
I dette interval gælder altså:

Areal af ydre rektangel ≤ Areal af grønne område ≤ Areal af indre rektangel

Skriv med symboler:

$$f(x_M) \cdot h \le A(x+h) - A(x) \le f(x_m) \cdot h$$

Divider hele dobbeltuligheden med *h*:

$$f(x_m) \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f(x_M)$$

Vi har hermed gennemført en vurdering af størrelsen af *sekanthældningen*, som vi kan anvende under punkt 3.

3. trin: Lad $h \to 0$
Vi udnytter nu den egenskab, at f er kontinuert.

Se på dobbeltuligheden: $$f(x_m) \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f(x_M)$$

Når h går mod 0, har vi set under punkt 1, at $f(x_M) \to f(x)$ og $f(x_m) \to f(x)$

Dvs de yderste tal i dobbeltuligheden vil begge nærme sig samme tal, nemlig $f(x)$.

I hele grænseovergangen er $\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ ”spærret inde” mellem de to tal $f(x_m)$ og $f(x_M)$, som nærmer sig $f(x)$. Men så må denne brøk også nærme sig $f(x)$:

ISBN 9788770668781

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \to f(x) \text{ når } h \to 0$$

Konklusion: Funktionen $A(x)$ er differentiabel i x med differentialkvotient $A'(x) = f(x)$

Hermed har vi vist sætningen: $A(x)$ er differentiabel og $A'(x) = f(x)$. Specielt gælder der, at en kontinuert funktion *f* har en stamfunktion.