ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 2.9 Taylorpolynomier og Taylorrækker

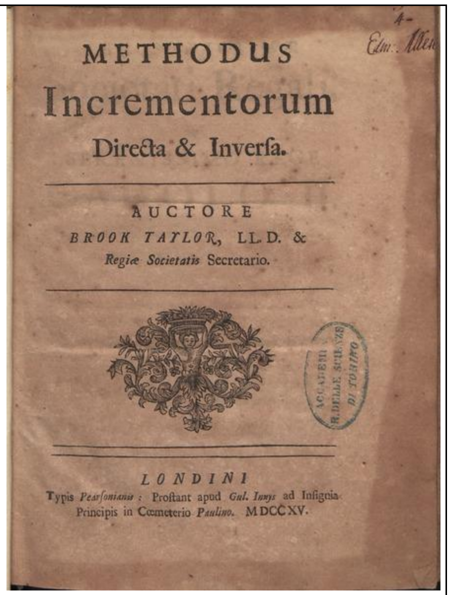
Indhold

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

I den indledende fortælling til HEM2, kapitel 5B fortalt om, hvordan Newton var en mester i at omskrive alle mulige funktionstryk til polynomier. Alle disse resultater var så lovende, at der blandt datidens matematikere bredte sig en almindelig tro på, at sammenhængen må gælde generelt med enkelte forbehold over for særlige punkter, hvor fx. en funktion ikke er defineret. Newton selv havde en række teknikker til at foretage en sådan omskrivning, og man kan se i hans papirer, at han faktisk kendte til det vi idag kalder for Taylor-rækker. Men han publicerede ikke noget om det. En række andre var også tæt på at finde den generelle metode, bla. Newtons gode ven, den skotske matematiker James Gregory (1638–1675), der så tidligt som i et brev fra 1671 opskriver "Taylorpolynomier" for 7 forskellige rimeligt komplicerede funktioner, bl.a. $\tan(x)$, $\arctan(x)$, $2\arctan(\tanh(\frac{x}{2}))$!

Men det blev Newtons landsmand, Brook Taylor (1685-1731), der i matematikhistorien har fået æren for det i en sådan grad, at disse polynomier er opkaldt efter ham. Metoden præsenterede han i en bog om *fluxionsmetoden* fra 1715. Denne metode var Newtons særlige tilgang til differentialregningen, der i stor udstrækning byggede teorien for *differensrækker*, der var udbredt dengang. Det vil fremgå nedenfor, hvorledes Taylor udnyttede dette.
Brook Taylor er i øvrigt mest kendt som forfatter til en fremragende lærebog i perspektivtegning, der også udkom i 1715


METHODUS
Incrementorum
Directa & Inversa.

AUCTORE
BROOK TAYLOR, LL.D. &
Regiæ Societatis Secretario.

LONDINI
Typis Pearsonianis: Prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Cœmeterio Paulino. MDCCXV.

1. Taylors formel

Taylor præsenterer i bogen både den formel, vi i dag kalder funktionens *Taylorrække*, og en formel for det vi kalder *Taylor-polynomiets restled*, som vi vender tilbage til. Han beviser ikke resultatet i sin bog, men påstår at enhver funktion f kan – med moderne notation – opskrives således:

$$f(x_0+t)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot t+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot t^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot t^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot t^n+\ldots$$

Tallet x_0 kaldes Taylor-rækkens udviklingspunkt. f'', f''',... er den anden afledede funktion, tredje afledede osv. af f, og $n!$ er fakultetsfunktionen, fx er $3!=3\cdot 2\cdot 1$.

Sætter vi $x=x_0+t$, kan vi se, at $t=x-x_0$. Hvis vi alene betragter de første to led, får vi:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot t$$
$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Dette genkender vi som formlen for *tangentligningen* til grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$. Vi ved, at tangenten er en tilnærmelse til grafen, når vi zoomer ind på punktet.

Tager vi flere led med, vil vi få polynomier, der normalt vil give en stadigt bedre tilnærmelse til grafen. Disse polynomier kaldes *Taylor-polynomier*:

$$T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2$$
$$T_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{6}\cdot(x-x_0)^3$$

…

ISBN 9788770668781

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Øvelse 1. Taylorpolynomierne for $f(x)=e^x$ med udviklingspunkt i 0

a) Betragt funktionen $f(x)=e^x$. Funktionen har afledede af alle ordner, og her er den afledede af f særlig enkel, da vi får differentialkvotienten e^x uanset hvor mange gange, vi differentierer, dvs.

$f^{(n)}(x)=e^x$ og $f^{(n)}(0)=e^0=1$ for alle n.

Vis, at Taylorpolynomierne bliver:

$T_1(x)=1+x$

$T_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}$

$T_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$

$T_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$

....

b) Tegn i samme koordinatsystem og med definitionsmængden $[-3;3]$ grafen for $f(x)=e^x$ sammen med graferne for de fire første Taylorpolynomier.

c) Kommenter hvad du ser.

Eksempel. Taylorrækken for $f(x)=e^x$

Øvelsen giver os Taylorrækken for $f(x)=e^x$, og de grafiske approksimationer gør, at vi vil tillade os at skrive:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{4!}\cdot x^4+\frac{1}{5!}\cdot x^5+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot x^n+\ldots$$

Af og til skrives dette på en kortere form med brug af sum-tegnet:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Øvelse 2. Taylorpolynomierne for $\sin(x)$ og $\cos(x)$ med udviklingspunkt i 0

Funktionerne $\sin(x)$ og $\cos(x)$ har de samme pæne egenskaber som e^x. Vi kender også differentialkvotienterne, og vi er efter 4 gange for begge funktioner tilbage ved $\sin(x)$ og $\cos(x)$ igen. Så det er let at se mønstret.

a) Vis, at

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \quad \text{og} \quad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

b) Tegn for både $\sin(x)$ og $\cos(x)$ i samme koordinatsystem og med definitionsmængden $[0;2\pi]$ grafen for funktionen sammen med graferne for de første Taylorpolynomier op til de to ovenfor angivne.

a) Indfør fx en skyder for graden af polynomiet. Kommenter hvad du ser.

Øvelse 3. Taylorpolynomier i værktøjsprogrammerne

Værktøjsprogrammerne har en, evt flere kommandoer, der kan give dig Taylorpolynomiet af den grad du ønsker for en given funktion.

a) Undersøg hvordan det foregår i dit værktøjsprogram. I Maple vil kommandoen *taylor*(*,*,*) give dig Taylorpolynomiet af den ønskede orden *sammen med restleddet*. Ønsker du alene Taylorpolynomiet skal du af med restleddet. Det kan du gøre konkret i hvert tilfælde, men hvis du anvender *mtaylor*(*,*,*) i stedet, får du alene polynomiet og ikke restleddet.

b) Kontroller kommandoen ved at bestemme Taylorpolynomier til de tre funktioner, vi undersøgte ovenfor.

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 4. Tangenten som graf Taylorpolynomiet af grad 1
Taylorpolynomiet af grad 1 er som vi så ovenfor *det approksimerende førstegradspolynomium.* Grafen for dette er tangenten til grafen i pågældende punkt. De fleste værktøjsprogrammer har også en direkte kommando, der giver tangentligningen i et givet punkt på en given graf.
Opskriv selv en forskrift for et tredjegradspolynomium, *f*. Bestem det approksimerende førstegradspolynomium i punktet $(1, f(1))$, og tegne grafen. Bestem tangentligningen i $(1, f(1))$ og tegn tangenten. Hvad ser du?

2. MacLaurins formel
Hvis vi skærer af ved det n'te led, så gælder der naturligvis ikke, at udtrykket er lig med $f(x)$. Så er der tale om en tilnærmelse, og forskellen er netop restleddet:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Restleddet vender vi som sagt tilbage til, men lad os først betragte en lidt simplere udgave.

Hvis vi i Taylor-rækken sætter $x_0 = 0$. får vi følgende formel:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + ...$$

Denne kaldes ofte for MacLaurin´s formel, opkaldt efter den skotske matematiker Colin MacLaurin (1698-1746). Han præsenterer den i sin bog *Treatise on Fluxions* fra 1742. Det er selvfølgeligt ikke så svært at sætte 0 ind i Taylors formel, men det særlige var, at han faktisk beviste sin formel. Det var første gang, der blev givet et egentligt bevis i moderne forstand.

MacLaurin's bevis vil vi vende tilbage til nedenfor, men den bygger på den gennemgående antagelse, der var helt almindelig dengang, at enhver funktion kan skrives som et uendeligt polynomium. Dvs. at $f(x)$ kan skrives:

$$f(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3 + a_4\cdot x^4 + ... + a_n\cdot x^n + ...$$

Øvelse 4.
a) Udregn $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ osv. ved at differentiere led for led.
b) Indsæt dernæst $x = 0$ i alle disse formler, og vis derved at koefficienterne $a_0, a_1, a_2, ...$ får de værdier, som indgår i MacLaurin´s formel.

Øvelse 5
Vi så ovenfor, at eksponentialfunktionens Taylor-række er:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 + ... + \frac{1}{n!}\cdot x^n + ...$$

a) Tegn graferne for de 20 første Taylor-polynomier sammen med grafen for $f(x) = e^x$, idet du Indfører en skyder for graden af polynomiet. Hvad ser du?

3. Approksimationer (tilnærmelser)
Før værktøjsprogrammerne og lommeregnerne blev Taylor-polynomier ofte anvendt ti at beregne approksimationer til funktionsværdier, når funktionerne var mere komplicerede end polynomier. Det kunne være tilnærmede værdier til logaritmer, til trigonometriske funktioner, til kvadratrødder mm.

Øvelse 6. Approksimationer til logaritmer

a) Definer $f(x)=\ln(1+x)$, og anvend MacLaurins formel til at vise:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

b) Udregn med værktøj $\ln(1.1)$, $\ln(1.2)$, og $\ln(1.3)$

c) Udregn approksimationer til de tre værdier med brug af henh to led og tre led i ovenstående række.

d) Udregn den procentvise fejl.

Øvelse 7. Approksimationer til Kvadratrødder

a) Definer $f(x)=\sqrt{1+x}$, og anvend MacLaurins formel til at vise, at for små tal x gælder:

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$$

b) Udregn med værktøj $\sqrt{(1.1)}$, $\sqrt{(1.2)}$, og $\sqrt{(1.3)}$

c) Udregn approksimationer til de tre værdier med brug af henh to led og tre led i ovenstående række.

d) Udregn den procentvise fejl.

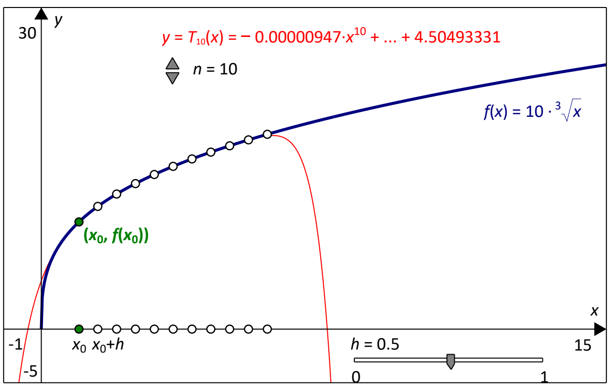
Det er klart, at uden kendskab til restleddet, ved vi ikke hvor stor en fejl vi laver ved at approksimere. Erfaringen gennem århundreder var, at i eksempler som ovenstående, gik det godt. Faktisk så har algoritmer til udregning af kvadratrødder, der dybest set bygger på Taylor, været kendt siden babyloniernes tid!

4. Taylors og MacLaurins beviser

Beviser i moderne forstand findes ikke altid hos fortidens store matematikere. Dels havde de ofte en forbløffende intuition, og dels argumenterede de i stor udstrækning induktivt – hvis et resultat var bevist for en række tilfælde, så blev der ofte generaliseret. Og oftest gik det godt, men desværre ikke altid.

Taylor fik ideen til sine polynomier fra differensregningen. Antag vi vil *approksimere* en graf for funktionen f med polynomier. Så vælger vi et punkt $(x_0, f(x_0))$, hvor ud fra vi vil *udvikle* polynomierne, samt en lille tilvækst h.

Bestem værdierne: $x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ x_0+3h,\ \ldots$
Udregn vi de n punkter på grafen dvs:
$(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h)), (x_0+2h, f(x_0+2h)),\ldots.$
Bestem det n'te-gradspolynomium, hvis graf går gennem de (n+1)-punkter. Taylor vidste, der var ét sådant polynomium, og at koefficienterne kunne bestemmes ved en simpel formel ud fra sin *differensregning*.
Lad så antallet af punkter blive uendeligt stort, samtidigt med at tilvæksten går mod nul.
Så vil grænsepolynomiet af uendelig grad netop være Taylor-polynomiet (se figur).



Selv om Taylor argumenterer principielt, og har ret i de fleste tilfælde, og selv om han er skrap til at regne, så er det ikke en særlig anvendelig metode i praksis.

Det var derimod MacLaurins metode. Det var den, vi beskrev ovenfor:
Enhver funktion $f(x)$ kan skrives som et uendeligt polynomium:

$$f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+a_4\cdot x^4+\ldots+a_n\cdot x^n+\ldots$$

Ved at sætte $x=0$ bestemmes a_0.
Ved at differentiere én gang og indsætte $x=0$ bestemmes a_1.

ISBN 9788770668781

Ved at differentiere to gange og indsætte $x=0$ bestemmes a_2.

...

På den måde når vi i mål, eller i alt fald frem til et polynomium af den grad vi øænsker.

5. Uendeligt mange og uendeligt små størrelser – er alt tilladt?

Vi har i det foregående differentieret og integreret uendelige polynomier, som vi gør det med endelige polynomier. Og det er faktisk sandt, at man kan generalisere sådan. Beviset udelades her.

Newton og hans samtidige tillod sig også at flytte rundt på leddene i uendelige summer, som det nu passer bedst. Det virkede, men det må man ikke i enhver situation – det kan gå helt galt med resultaterne, hvis man altid regner sådan.

Med formuleringen af den generelle Taylor-række og med alle de konkrete rækker for de kendte funktioner så det ud til, at man var nået til vejs ende. Alle funktioner kan skrives som polynomier, evt. af uendelig grad – måske med undtagelse af enkelte punkter. Det troede man faktisk i over 100 år. Men det har vist sig at være forkert.

De største matematikere var så overbeviste om, at dette var korrekt, at der blandt dem opstod den idé, at man kunne vende problemstillingen for Taylor-rækker om. I stedet for at beregne koefficienterne ud fra de afledede funktioner, så kunne man *definere de afledede funktioner ud fra koefficienterne*. Har vi givet en funktion, så opskriver vi, fx med brug af Newtons metoder, funktionens potensrække:

$$f(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+a_4\cdot x^4+...+a_n\cdot x^n+...$$

Derefter *definerer* vi $f'(0)=a_1$, $f''(0)=2\cdot a_2$ osv. Tilsvarende med et andet udviklingspunkt x_0.

Gennem 1700-tallet var der store diskussioner om og megen kritik af grænseværdibegrebet og den måde, hvorpå man regnede med uendeligt små størrelser. I 1797 forsøgte den store mester blandt de franske matematikere, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) at afslutte den diskussion en gang for alle gennem et værk med den imponerende titel: "*Teorien om analytiske funktioner, indeholdende differentialregningens principper, renset for betragtninger om uendeligt små eller forsvindende størrelser, og for betragtninger om grænseværdier og fluxioner, og indskrænket til algebraisk analyse af endelige størrelser*". Analytiske funktioner er funktioner, der kan skrives som potensrækker. Og det kan alle pæne funktioner, troede Lagrange. Men det holder ikke.

Øvelse 8 En funktion, hvis Taylorpolynomier alle er 0!

Anvend dit værktøjsprogram til at undersøge følgende funktion:

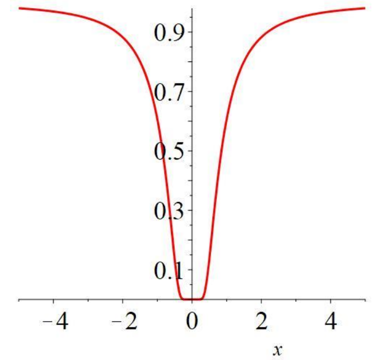
$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}x^{-2}} & \text{når } x\neq 0 \\ 0 & \text{når } x=0 \end{cases}$$

a) Tegn grafen for g. Det skal se nogenlunde således ud:

b) Bestem første, anden og tredje afledede funktion af g, og bestem ved hjælp af en grænseværdibetragtning værdien af disse afledede i $x=0$.

c) Vis derved, at Taylor-rækken for g er: $T(x)=0+0x+0x^2+0x^3+...$.

d) Hvad vil du konkludere ud fra dette?



Bemærkning: Hvis værktøjsprogrammets Taylor-kommando ikke umiddelbart virker, da udviklingspunktet jo er 0, og vi her er tæt på at dividere med 0, så kan du regne ud fra et punkt tæt på 0, fx 0,001. I Maple kan de se således ud:

$$taylor(h(x), x=0.001, 5)$$

$$5.741804140\ 10^{-217148}+5.741804140\ 10^{-217139}\ (x-0.001)+2.870893457\ 10^{-217130}\ (x-0.001)^2+9.569587442\ 10^{-217122}\ (x-0.001)^3+2.392375329\ 10^{-217113}\ (x-0.001)^4+\mathrm{O}\big((x-0.001)^5\big)$$

Det er vist et overbevisende billede på, at alle koefficienter er 0, når x nærmer sig 0.

ISBN 9788770668781

Nogle ”praktikere” kunne måske argumentere, at dette jo bare er et skørt eksempel, og at metoden, som MacLaurin fandt på, og som bygger på, at en funktion kan skrives som et polynomium af uendelig grad, virker i de fleste tilfælde. Men problemet er jo, at når det første modeksempel er kommet på bordet, så må matematikken kunne svare på, i hvilke tilfælde virker metoden? Så skør en funktion er det jo heller ikke, som blev præsenteret i øvelse 7. Den er faktisk tæt beslægtet med normalfordelingsfunktionen. Den viser sig at være uendeligt ofte differentiabel. Problemet er givetvis *restleddet*. Faktisk pegede MacLaurin på sine gamle dage selv på dette problem og opstillede endda et udtryk til beregning af, hvor stor en fejl vi begår, ved at se bort fra det. I øvelse 7 vil det vise sig, at restleddet er lig med funktionen selv!

For at nå frem til en beskrivelse af dette restled er vi nødt til at udlede Taylors formel fra bunden. Den grundlæggende metode, vi anvender i det følgende, er den integrationsteknik, der hedder *partiel integration*, eller *delvis integration*. Og den matematiker, der første gang trak denne teknik på banen, var ingen anden end Brook Taylor! Så han var meget tæt på at give det endegyldige resultat om Taylorrækker.

6. Udledning af Taylorrækker med brug af delvis integration

Integrationsteknikken *delvis integration* demonstreret i en række tilfælde i HEM3, projekt 2.7, og selve teknikken er bevist i HEM3, Grundbogen afsnit 3.4. Beviset, der kan findes dér, bygger på produktreglen for differentiation. Sætningen siger:

Sætning 1: Delvis integration
Antag, at f er kontinuert med stamfunktionen F, og g er differentiabel med afledet funktion g', og antag at g' er kontinuert. Så gælder det:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

De *forudsætninger*, vi tager udgangspunkt i, i udledningen af Taylors formel, er, at vi har givet en funktion f, der er defineret på intervallet $[a;b]$, som er $(n+1)$ gange differentiabel, og hvor den $(n+1)$'te afledede $f^{(n+1)}(t)$ er kontinuert. Er den uendeligt mange gange differentiabel, så kan den række vi finder frem til bare fortsættes.

Den matematiske indsigt, vi vil anvende, er foruden sætningen om delvis integration, analysens fundamentalsætning, der populært siger, at differentiation og integration er omvendte regningsarter, og som vi her anvender i følgende form:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt\,, \quad \text{eller:} \quad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$$

Vi har valgt i beviset at anvende t som den uafhængige variabel.

For at udnytte sætningen om delvis integration, vil vi skrive integranden som et produkt:

$$f'(t) = f'(t)\cdot 1\,,$$

hvor den konstante funktion 1 skal svare til $f(x)$ i sætningen, og $f'(t)$ skal svare til $g(x)$.
Hvad er så $F(x)$? En stamfunktion til konstanten 1 er jo t, men også alle funktioner, hvor der lægges en konstant til. Og det viser sig i løbet af udregningerne, at det gør disse enklere, hvis vi vælger $(t-b)$ som stamfunktion.
Vi går igang:

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt \\
&= f(a) + \int_a^b f'(t)\cdot 1\,dt \\
&= f(a) + \left[f'(t)\cdot(t-b)\right]_a^b - \int_a^b f''(t)\cdot(t-b)\,dt \\
&= f(a) - f'(a)\cdot(a-b) - \int_a^b f''(t)\cdot(t-b)\,dt && \text{- Øvre og nedre grænse indsættes} \\
&= f(a) + f'(a)\cdot(b-a) + \int_a^b f''(t)\cdot(b-t)\,dt && \text{- der skiftes fortegn}
\end{aligned}$$

ISBN 9788770668781

Øvelse 9

a) Vis med samme metode, og nu med den konstante funktion $(b-t)$ svarende til $f(x)$ i sætningen, og $f''(t)$ med rollen som $g(x)$, at:

$$\int_a^b f''(t)\cdot(b-t)dt=\frac{1}{2}f''(a)\cdot(b-a)^2+\frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)\cdot(b-t)^2\,dt$$

b) Vis ved kombination af dette med resultatet ovenfor, at

$$f(b)=f(a)+f'(a)\cdot(b-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(b-a)^2+\frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)\cdot(b-t)^2\,dt$$

Øvelse 10

Vis med samme fremgangsmåde som i øvelse 8, at næste trin bliver:

$$f(b)=f(a)+f'(a)\cdot(b-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(b-a)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}f'''(a)\cdot(b-a)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_a^b f^{(4)}(t)\cdot(b-t)^3\,dt \text{ , eller:}$$

$$f(b)=f(a)+f'(a)\cdot(b-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(b-a)^2+\frac{1}{2\cdot 3}f'''(a)\cdot(b-a)^3+\frac{1}{2\cdot 3}\int_a^b f^{(4)}(t)\cdot(b-t)^3\,dt$$

Bemærkning: Brøken $\frac{1}{2\cdot 3}$ kan også skrives som $\frac{1}{3!}$, hvor $3!$ læses "3 fakultet".

Det er nu forholdsvis let at se, at fortsættes denne proces vil vi få Taylors formel med restled:

Sætning 2: Taylors formel med restled

Funktionen *f* er defineret på intervallet $[a;b]$. Antag, at *f* er $(n+1)$ gange differentiabel, og at den $(n+1)$'te afledede $f^{(n+1)}(t)$ er kontinuert. Så gælder:

$$f(b)=f(a)+f'(a)\cdot(b-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(b-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)\cdot(b-a)^3+\ldots\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(b-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\cdot(b-t)^n\,dt$$

Vi kalder:

$$T_nf(b)=f(a)+f'(a)\cdot(b-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(b-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)\cdot(b-a)^3+\ldots\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(b-a)^n$$

for Taylorpolynomiet af grad *n* for funktionen *f* med udviklingspunkt *a*. Med denne betegnelse kan vi skrive:

$$f(b)=T_nf(b)+\int_a^b f^{(n+1)}(t)\cdot(b-t)^n\,dt$$

Bemærkning: *b* er jo "den variable", og erstatter vi den med *x* får vi den almindelige form:

$$f(x)=T_nf(x)+\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt \text{ , eller:}$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)\cdot(x-a)^3+\ldots\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt$$

Vi valgte at anvende *b* og ikke *x* i udledningen, for at undgå forvirringen under integraltegnet omkring *x* og *t*.

Bevis:

Vi valgte i udledningen at sige "osv.". I matematik betyder "osv." i sådanne sammenhænge, at resten klares med et induktionsbevis, og det skulle vi strengt taget også gøre her. Men alt går efter samme melodi, så det vil vi overlade til læseren.

Bemærk: Vi har i udledningen uden at nævne det gået ud fra, at $b>a$. Beviset kan justeres lidt og virker også for tilfældet $b<a$. Det lader vi ligge her, og overlader til læseren at se beviset igennem og justere det.

ISBN 9788770668781

7. Restleddet

Restleddet i Taylors formel er størrelsen:

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt$$

Da vi dybest set er interesseret i at tilnærme funktionen *f* med et polynomium af en vis grad, så er vi selvsagt også interesseret i at vide, hvor stor en fejl, vi begår ved at smide restleddet væk.

Det ser umiddelbart fornuftigt ud, da fakultetsfunktionen vokser uhyre hurtigt, og faktoren $\frac{1}{n!}$ dermed bliver meget lille efter få skridt.

Øvelse 11

Udregn $\frac{1}{n!}$ for tallene n=1..8.

Men det er jo ikke utænkeligt, at også den $(n+1)$'te afledede vokser hurtigt, og dermed ophæver bidraget fra $\frac{1}{n!}$. Så vi skal som altid i matematik have et redskab, der fører os ud over almindelig snak.

Vi starter med at konstatere, at eftersom den $(n+1)$'te afledede $f^{(n+1)}(t)$ er kontinuert i $[a;x]$, så har den et maksimum og minimum. Dvs, at der findes et tal M, således at

$$\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M \text{ for alle tal mellem } a \text{ og } t. \qquad (*)$$

Øvelse 12

a) Argumenter for, at der for enhver funktion g gælder $g(t)\le|g(t)|$ *og* $-|g(t)|\le g(t)$

b) Argumenter for, at hvis funktionen g er kontinuert i intervallet $[a;x]$, så er:

$$\int_a^x g(t)dt \le \int_a^x |g(t)|dt \;\; og \;\; \int_a^x -|g(t)|dt \le \int_a^x g(t)dt,\ eller\ -\int_a^x |g(t)|dt \le \int_a^x g(t)dt$$

c) Argumenter for, at dette betyder:

$$\left|\int_a^x g(t)dt\right| \le \int_a^x |g(t)|dt$$

Vi udnytter nu resultaterne i øvelse 12:

$$\begin{aligned}
|R_n f(x)| &= \frac{1}{n!}\left|\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt\right| \\
&\le \frac{1}{n!}\int_a^x \left|f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\right|dt && \text{jfr. øvelse 11} \\
&= \frac{1}{n!}\int_a^x \left|f^{(n+1)}(t)\right|\cdot\left|(x-t)^n\right|dt \\
&\le \frac{1}{n!}\int_a^x M\cdot(x-t)^n\,dt && jfr. forudsætningen\ og\ at\ x\ge t
\end{aligned}$$

Herfra er det almindelig integrationsteknik:

ISBN 9788770668781

$$\begin{aligned}\left|R_n f(x)\right| &\leq \frac{1}{n!}\int_a^x M\cdot(x-t)^n\,dt\\ &=\frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt\\ &=\frac{M}{n!}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left[-(x-t)^{n+1}\right]_a^x\\ &=\frac{M}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\end{aligned}$$

Konklusion:

Sætning 3: Vurdering af restleddet version 1
Funktionen *f* er defineret på intervallet $[a;x]$. Antag, at *f* er $(n+1)$ gange differentiabel, og at den $(n+1)$'te afledede $f^{(n+1)}(t)$ er kontinuert. Antag *M* er et tal, så $\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leq M$ for alle tal mellem *a* og *x*. Så gælder:

$$\left|R_n f(x)\right|\leq\frac{M}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

Da Lagrange opdagede Taylors og MacLaurins arbejder med polynomie-tilnærmelser til vilkårlige funktioner, fandt han en anden version af restleddet, som ofte er lettere at bruge end version 1:

Sætning 4: Vurdering af restleddet version 2 – Lagranges formel
Funktionen *f* er defineret på intervallet $[a;x]$. Antag, at *f* er $(n+1)$ gange differentiabel, og at den $(n+1)$'te afledede $f^{(n+1)}(t)$ er kontinuert. Så gælder, at der findes et tal *c* i det åbne interval $]a;x[$, så:

$$R_n f(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^{n+1}$$

Dvs Taylorudviklingen får følgende form:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)\cdot(x-a)^3+\ldots\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^{n+1}$$

Bemærkning: En af grundene til, at Lagrange formel er populær er, at den er let at huske, da restleddet har samme form som øvrige led.

Bevis:
(*Der er kun givet få forklaringer i det følgende, så gennemgå det selv i detaljer som en øvelse*)
Som ved version 1 starter vi med at konstatere, at eftersom den $(n+1)$'te afledede $f^{(n+1)}(t)$ er kontinuert i $[a;x]$, så har den et maksimum og minimum. Dvs, at der findes tal *m* og *M*, så

$m\leq f^{(n+1)}(t)\leq M$, for alle tal *t* i intervallet.

Det betyder, at vi kan vurdere størrelsen af restleddet $R_n f(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt$ opad og nedad:

$$R_n f(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt\geq\frac{1}{n!}\int_a^x m\cdot(x-t)^n\,dt=\frac{m}{n!}\int_a^x(x-t)^n\,dt=\frac{m}{n!}\cdot\left[\frac{-1}{n+1}\cdot(x-t)^{n+1}\right]_a^x=\frac{m}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

$$R_n f(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt\leq\frac{1}{n!}\int_a^x M\cdot(x-t)^n\,dt=\frac{M}{n!}\int_a^x(x-t)^n\,dt=\frac{M}{n!}\cdot\left[\frac{-1}{n+1}\cdot(x-t)^{n+1}\right]_a^x=\frac{M}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

Vi ganger og dividerer nu over, og får følgende dobbeltulighed:

$$m\leq\frac{(n+1)!\cdot R_n f(x)}{(x-a)^{n+1}}\leq M$$

ISBN 9788770668781

Men m og M er henholdsvis minimum og maksimum af den kontinuerte funktion $f^{(n+1)}(t)$. Funktionens graf fylder altså hele intervallet $[m;M]$ ud. Men så klarer **sætningen om mellemliggende værdier**, der er bevist i HEM2, kapitel 5a, afsnit 2.1, resten:

Sætning 1B: Sætningen om mellemliggende værdier

Hvis f er kontinuert i intervallet $[a;b]$, og y er et tilfældigt tal mellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes der et tal c mellem a og b, så $f(c) = y$.

Der findes et tal c mellem m og M, så

$$\frac{(n+1)! \cdot R_n f(x)}{(x-a)^{n+1}} = f^{(n+1)}(c)$$

Vi ganger og dividerer nu tilbage og får det ønskede resultat:

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \cdot (x-a)^{n+1}$$

og sætningen er bevist.

8. Anvendelser

Med adgang til matematiske værktøjsprogrammer er anvendelsen af Taylorpolynomier i beregninger af tilnærmede værdier naturligt blevet mere beskeden end tidligere. Men vi skal alligevel huske, at i anvendelsen af et værktøj til udregning af en funktionsværdi eller et integral af en *transcendent* funktion som $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x *og* $\ln(x)$, dvs funktioner, som ikke kan udtrykkes præcist med polynomier og som derfor ikke kan udregnes helt præcist med brug af de 4 regningsarter, da kender vi ikke den nøjagtighed, hvormed resultatet er beregnet.

Maskinerne anvender naturligvis en viden, som den der findes i de kendte funktioners Taylorpolynomier. Og polynomier er lette at udregne for en maskine – det er blot de simple regningsarter. Men hvor stor er nøjagtigheden. I de fleste praktiske situationer spiller det en mindre rolle, men ikke hvis man skal sende et fartøj til Mars, eller skal foretage indgreb i en størrelsesorden på molekylært niveau. Man toede i en periode af den nye regneteknologis udvikling, at disse *numeriske metoder* ville hovedsageligt have historisk interesse. Men samtidig med at værktøjsmaskinerne er blevet stadigt bedre, så er opgaverne også blevet stadigt mere kompliceret og skal udføres på langt under nano-niveau og udføres med en tidslig præcision, man ikke kendte før.

Så det er stadig værd at øve sig i metoderne. Lad os se på to eksempler.

Eksempel 1: Beregn værdien af $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ med en nøjagtighed af 10^{-4}

Funktionen $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ er kontinuert i området, og ønsker vi funktionen defineret i *hele* intervallet $[0;1]$, kan vi udvide funktionen ud over det åbne interval, ved at sætte $f(0)=1$. Denne funktion er kontinuert i 0.

f har en stamfunktion, da den er kontinuert, men vi kan ikke opskrive denne vha. de kendte funktioner. Hvis vi i stedet kan tillade os at erstatte $\sin(x)$ med et Taylorpolynomium, så kan vi let bestemme stamfunktionen.

$$\sin(x) = T_{2n}\sin(x) + R_{2n}\sin(x) \text{, hvor}$$

$$T_{2n}\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Dette giver:

$$\frac{T_{2n}\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

som er let at integrere.
Men hvor mange led skal vi tage med for at holde os indenfor den ønskede nøjagtighed?

Fejlen, vi begår ved at udregne $\int_0^1 \frac{T_{2n}\sin(x)}{x}dx$ i stedet for $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$, er lig med $\int_0^1 \frac{R_{2n}\sin(x)}{x}dx$

Lad os derfor vurdere på $R_{2n}\sin(x)$ i første omgang, Vi anvender version 1:

- De afledede svinger hele tiden mellem sinus og cosinus, så M kan vælges til 1 i udtrykket: $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M$
- Derfor får vi: $\left|R_{2n}\sin(x)\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$

Dermed kan vi nu give en vurdering af $\int_0^1 \frac{R_{2n}\sin(x)}{x}dx$:

$$\int_0^1 \frac{R_{2n}\sin(x)}{x}dx \le \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)}\cdot\left[x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)}$$

Hvis fejlen skal være under 10^{-4}, skal vi altså sikre, at

$$\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)} < 10^{-4}\text{, eller: } (2n+1)!\cdot(2n+1) > 10^4$$

Her er det mest enkle blot at udregne for $n=1, n=2, n=3, \ldots$ Gør det!
Vi får, at $(2\cdot 3+1)!\cdot(2\cdot 3+1) = 7!\cdot 7 = 35280 > 10000$, så vi kan nøjes med tre led:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx \approx \int_0^1 \frac{T_{2\cdot 3}\sin(x)}{x}dx = \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x}{5!\cdot 5}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = \frac{1703}{1800} = 0.9461$$

Så 0.9461 er værdien af integralet angivet med en nøjagtighed bedre end 10^{-4}

Eksempel 2: Bevis for at e er et irrationalt tal

Taylorrækken for e^x, som en funktion defineret på $[0;1]$ er:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot x^n + R_n f(x)$$

hvoraf vi får:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n f(1)$$

De første $n+1$ led kan sættes på en fælles brøkstreg:

$e = \frac{K}{n!} + R_n f(1)$, hvor K er et helt tal.

Lad os vurdere restleddet med version 1. Alle afledede er jo funktionen selv, og e^x er en voksende funktion, så største værdien i $[0;1]$ er værdien i tallet 1, dvs med notationen i sætning 3:

$\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le e$, og deraf: $R_n f(x) \le \frac{e}{(n+1)!}$, og specielt:

$$R_n f(1) \le \frac{e}{(n+1)!}$$

Vi ved, at e ikke er et helt tal, og at det ligger i intervallet $]2;3[$, så antallet af led, vi skal have med, er større end eller lig med 2. Derfor er $n+1 \geq 3$. Det giver:

$$\frac{\mathrm{e}}{(n+1)} \leq \frac{\mathrm{e}}{3} < 1 \text{, hvoraf:} \quad R_n f(1) \leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \frac{1}{n!}$$

Altså kan $\mathrm{e} = \frac{K}{n!} + R_n f(1)$ ikke skrives som $\frac{H}{n!}$, hvor H er et helt tal. Dette gælder for ethvert tal n.

Men hvis nu tallet e var rational, kunne det skrives på formen $\frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal.

Denne brøk kan så forlænges til: $\frac{p \cdot (q-1)!}{q!}$. Men vi har lige argumenteret for, at e ikke kan skrives på formen $\frac{H}{n!}$ for noget tal n, heller ikke med tallet q.
Så tallet e er irrationalt!