ISBN 9788770668781

Projekt 2.8 Fakultetsfunktionen, gammefunktionen og χ^2 -fordelingen

(*Dette projekt anvender partiel (delvis) integration, som er omtalt i kapitel 2 som supplerende stof. Endvidere anvendes en viden om funktioners størrelsesorden, som er behandlet i projekt 5.18 i Hvad er matematik? 2 . Det sidste kommenteres kort undervejs i dette projekt*).

Et udtryk som $\int_0^\infty f(x)\,dx$ er defineret som grænseværdien af $\int_0^N f(x)\,dx$ for $N \to \infty$. I nogle værktøjsprogrammer kan man direkte indsætte symbolet for uendelig i integralers grænser. Hvis du ikke kan det, så indsæt et symbolsk tal *N* og lad *N* gå mod uendelig i de følgende udregninger. Det er normalt let at se, hvad der vil ske med udtrykkene i denne grænseovergang.

Øvelse 1
Udregn integralerne:
a) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx$ b) $\int_0^\infty x\cdot\mathrm{e}^{-x}\,dx$ c) $\int_0^\infty x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}\,dx$ d) $\int_0^\infty x^3\cdot\mathrm{e}^{-x}\,dx$ e) $\int_0^\infty x^4\cdot\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

Baseret på ovenstående øvelse kan man måske gætte mønstret:

$$n! = \int_0^\infty x^n \cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx\ ,$$

hvor $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. ($n!$ læses *n fakultet*: Man kan også høre udtrykket *n udråbstegn*.)
Men hvordan beviser man en sådan formel?

Man kunne forsøge at gennemføre en fuldstændig integration af $x^n\cdot\mathrm{e}^{-x}$ Men inspireret af ovenstående vil vi forsøge, om der ikke kan tilvejebringes et bevis med brug af *induktion*. Induktionsbeviser er omtalt i C-bogen, se evt. i registrene. Et *induktionsbevis* anvendes ofte i situationer, hvor man ønsker at bevise en bestemt egenskab gælder for alle naturlige tal, og det bygger på den grundlæggende antagelse om de naturlige tal, at hvis man starter i tallet 1, og hvis man altid kan komme fra et givet naturligt tal *n* videre til det næste naturlige tal $n+1$, så vil man nå igennem alle de naturlige tal.

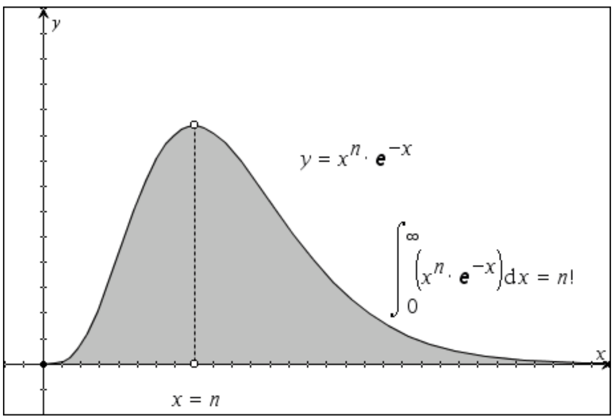
Fakultetsfunktionen for heltallige positive værdier kan beskrives ved følgende to krav, der antyder brug af induktion – vi starter i tallet 1 og vi kan altid komme et skridt videre:

$$1! = 1$$
$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$$

Sætning: **Fakultetsfunktionen $n!$ udtrykt som et integral**
For alle naturlige tal *n* gælder der:

$$n! = \int_0^\infty x^n\cdot\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

Bevis
Vi starter med en lille funktionsundersøgelse af integranden $f(x) = x^n\cdot\mathrm{e}^{-x}$. Ved differentiation finder vi ved brug af produktreglen
$f'(x) = n\cdot x^{n-1}\cdot\mathrm{e}^{-x} + x^n\cdot\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = x^{n-1}\cdot(n-x)\cdot\mathrm{e}^{-x}$. Grafen er derfor voksende i intervallet $[0,n]$ og aftagende i intervallet $[n,\infty[$. Så længe *n* er positiv er $f(0)=0$. Vi ønsker nu at argumentere for at der også må gælde $\lim_{x\to\infty} x^n\cdot\mathrm{e}^{-x} = 0$.
Intuitivt er det klart at eksponentialfunktionen aftager hurtigere end en hvilken som helst potensfunktion vokser.



ISBN 9788770668781

Eksponentialfunktionen har nemlig en *fast* halveringslængde $\ln(2)$, mens fordoblingslængden for x^n stedse vokser, idet den er givet ved $\sqrt[n]{2}\cdot x_0$, dvs. efter *n* fordoblinger af *x* er *y*-værdien blevet dobbelt så stor. Vi kan stramme argumentet ved at se på omskrivningen:

$$f(x)=\frac{x^n}{e^x}=\frac{x^n}{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}=\frac{x^n}{\left(\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^x\right)^n}=\frac{x^n}{\left(a^x\right)^n}=\left(\frac{x}{a^x}\right)^n \text{ med } a=e^{\frac{1}{n}}.$$

Men en hvilken som helst eksponentialfunktion, a^x med grundtallet $a=e^{\frac{1}{n}}$, der ligger tæt ved 1, når *n* er stor, giver til syvende sidst baghjul til den lineære funktion *x*, dvs. forholdet mellem *x* og a^x går mod nul, når *x* går mod uendelig. Men hvis $\frac{x}{a^x}$ går mod nul gælder det samme naturligvis for den *n*'te potens.
(*I projekt 2.4 om størrelsesorden af funktioner kan du finde et helt præcist argument for dette*).

Vi fører nu beviset ved induktion, dvs. vi sætter $g(n)=\int_0^\infty x^n\cdot e^{-x}\,dx$ og udregner først integralet for $n=1$:

$$g(1)=\int_0^\infty \underset{\substack{\downarrow\\1}}{x}\cdot \overset{\substack{-e^{-x}\\\uparrow}}{e^{-x}}\,dx$$

Vi udfører en delvis integration, idet vi differentierer *x* og integrerer e^{-x}.

$$=\left[x\cdot\left(-e^{-x}\right)\right]_0^\infty-\int_0^\infty -e^{-x}\,dx$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(-x\cdot e^{-x}\right)-0\right)+\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

Vi udnytter at $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot e^{-x}\right)=0$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=-e^{-\infty}-(-e^{-0})=1$$

Vi udnytter at $e^{-\infty}=0$

Derefter viser vi, at egenskaben er *arvelig*, dvs. overføres fra $g(n)$ til $g(n+1)$:

$$g(n+1)=\int_0^\infty \underset{\substack{\downarrow\\(n+1)\cdot x^n}}{x^{n+1}}\cdot \overset{\substack{-e^{-x}\\\uparrow}}{e^{-x}}\,dx$$

Vi udfører en delvis integration, idet vi differentierer x^n og integrerer e^{-x}.

$$=\left[x^{n+1}\cdot\left(-e^{-x}\right)\right]_0^\infty-\int_0^\infty (n+1)\cdot x^n\cdot\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(-x^{n+1}\cdot e^{-x}\right)-0\right)+(n+1)\cdot\int_0^\infty x^n\cdot e^{-x}\,dx$$

Vi udnytter at $\lim_{x\to\infty}\left(x^{n+1}\cdot e^{-x}\right)=0$

$$=(n+1)\cdot g(n)$$

Dermed er induktionsbeviset fuldført.

Formlen blev først fundet af Euler på en lidt anden form:

Øvelse 2: Eulers formel for fakultetsfunktionen

Vis at der gælder formlen $n!=\int_0^1\left(-\ln(x)\right)^n dx$.

(*Hint*: Gennemfør substitutionen $u=-\ln(x)$).

I et andet projekt fortælles nærmere om hvordan Euler fandt denne formel og hvordan den store danske matematiker Harald Bohr slog en lille men meget vigtig krølle på fakultetsfunktionen.

Men integralformlen har den vidunderlige egenskab at den også kan anvendes på værdier af *n*, der ikke er heltallige. Vi kan derfor bruge den som definition på fakultetstallene for ikke heltallige værdier af *n*:

ISBN 9788770668781

Definition: Fakultetsfunktionen

Fakultetsfunktionen $t!$ defineres ud fra integralformlen $t! = \int_0^{\infty} x^t \cdot \mathrm{e}^{-x} dx$.

Ofte anvendes en anden betegnelse og en anden symbolik, når vi går fra naturlige tal til alle reelle tal, idet man definerer *gammafunktionen*, $\Gamma(t) = (t-1)! = \int_0^{\infty} x^{t-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} dx$.

Eksempel: Fakultetsfunktionen og tallet π

Vi kan fx prøve at udregne tallet $\left(-\tfrac{1}{2}\right)!$:

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)! = \int_{x=0}^{x=\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\infty} \left(\tfrac{1}{2} \cdot u^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} d\left(\tfrac{1}{2} \cdot u^2\right)$$

Vi substituerer $x = \tfrac{1}{2} \cdot u^2$

$$= \int_{u=0}^{u=\infty} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} \cdot u\, du$$

Vi rykker $\tfrac{1}{2} \cdot u^2$ uden for differentialet og ændrer grænserne til *u*-grænser, og vi forkorter $1/u$ ud mod u

$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} du$$

$$= \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} du$$

Vi udnytter symmetrien til at udstrække grænsen, så vi kan genkende *normalfordelingsintegralet*

$$= \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$$

Konklusion: $\left(-\tfrac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$. Det må siges, at være en bemærkelsesværdig formel!

Med brug af gammafunktionen skrives denne formel: $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

De halvtallige fakultetstal er altså tæt knyttet til π. Fx fås $\left(\tfrac{1}{2}\right)! = \tfrac{1}{2} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)! = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ osv.

Bemærkning. Normalfordelingsintegralet $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} du = \sqrt{2\pi}$ kan du finde behandlet i et andet af kapitlets projekter.

Eksempel: χ^2 **-fordelingen**

I et andet af kapitlets projekter viser vi, at tæthedsfunktionen for χ^2 -fordelingen er proportional med $x^{\frac{f}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot x}$, hvor *f* er antallet af frihedsgrader. Den samlede sandsynlighed er jo altid 1, så proportionalitetskonstanten kan vi finde, ved at udregne integralet $\int_0^{\infty} x^{\frac{f}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot x} dx$:

$$\int_{x=0}^{x=\infty} x^{\frac{f}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot x} dx = \int_{x=0}^{x=\infty} (2u)^{\frac{f}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-u} d(2u)$$

Vi substituerer $x = 2u$

$$= 2 \cdot \int_{u=0}^{u=\infty} 2^{\frac{f}{2}-1} \cdot u^{\frac{f}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-u} du$$

Vi flytter 2 uden for såvel differential som integral

$$= 2^{\frac{f}{2}} \cdot \int_0^{\infty} u^{\frac{f}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-u} du$$

Vi flytter konstanten $2^{\frac{f}{2}}$ udenfor integralet og forkorter

$$= 2^{\frac{f}{2}} \cdot \left(\tfrac{f}{2} - 1\right)!$$

Vi udnytter definitionen på fakultetsfunktionen

Konklusion: Forskriften for chi-i-anden funktion med *f* frihedsgrader er:

$$\chi^2(x, f) = \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \cdot \left(\frac{f}{2} - 1\right)!} \cdot x^{\frac{f}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$

For et lige antal frihedsgrader, giver det anledning til forholdsvis simple forskrifter. Fx er χ^2 -fordelingen med 2 frihedsgrader givet ved

$$\chi^2(x,2) = \frac{1}{2^1 \cdot 0!} \cdot x^0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x} = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x},$$

altså en ren eksponentialfunktion.

For ulige antal frihedsgrader giver det derimod anledning til normeringer, der involverer $\sqrt{2\pi}$, fx er χ^2 -fordelingen med 1 frihedsgrad givet ved

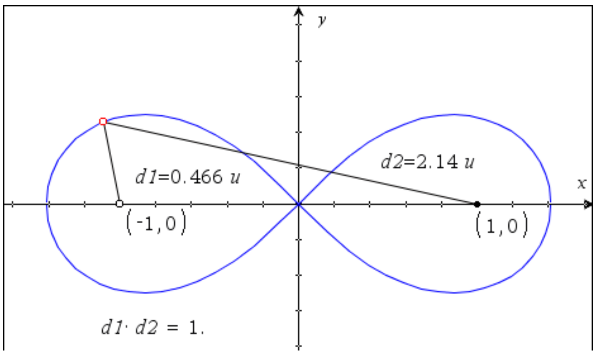
$$\chi^2(x,1) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)!} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$

Øvelse 3:

Bestem tæthedsfordelingerne for χ^2 -fordelingerne med 3 og 4 frihedsgrader.

Perspektivering

Man kan så spørge efter andre fakultetstal, fx $\left(\frac{1}{4}\right)!$. I en veritabel tour de force viste den dengang kun 19-årige Gauss, at der var en snæver forbindelse mellem cirklens geometri og lemniskatens geometri. Her er en enhedslemniskate en kurve med to brændpunkter i (-1,0) og (1,0), hvor *produktet* af brændpunktafstandene er konstant 1. (Sammenlign med definitionen af en ellipse, hvor det er summen, der er konstant.)



Gauss indså at ligesom omkredsen af enhedscirklen er tæt knyttet til $\left(\frac{1}{2}\right)!$ er omkredsen af en enhedslemniskate tæt knyttet til $\left(\frac{1}{4}\right)!$ I sin begejstring over disse vidunderlige opdagelser skrev Gauss den 30. maj 1799 i sin dagbog denne profetiske optegnelse (hvor ϖ er den halve omkreds af enhedslemniskaten på samme måde som π er den halve omkreds af enhedscirklen):

"*Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et* $\sqrt{2}$ *esse =* $\frac{\pi}{\varpi}$ *usque ad figuram undecimam comprabavimus, quare demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperioetur*"

(*Vi har bekræftet ved udregning, at det aritmetisk-geometriske middeltal mellem 1 og* $\sqrt{2}$ *er det samme som* $\frac{\pi}{\varpi}$ *op til 11 decimaler. Hvis det kan bevises, åbner det mulighed for en helt ny analyse*)

Men selv om Gauss flere gange senere vendte tilbage til lemniskatens geometri, så offentliggjorde han ingenting, så det blev overladt til den næste generation af unge matematikere, især Niels Henrik Abel (1802–1829) og Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) at træde ind i den nye vidunderlige verden og delagtiggøre os andre i den!