L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 2.7 Integrationsteknik: Anvendelser af *Delvis (partiel) integration*

Metoden *delvis integration* er bevist i HEM3, Grundbogen, afsnit 3.4.

Delvis integration er nyttigt, hvis man støder på integraler af typerne:

$\int x^n \cdot \sin(a \cdot x)dx$ og $\int x^n \cdot \cos(a \cdot x)dx$, hvor *n* er et helt tal, og *a* er et reelt tal.

$\int x^n \cdot e^{a \cdot x} dx$, hvor *n* er et helt tal, og *a* er et reelt tal.

$\int x^r \cdot \ln(a \cdot x)dx$, hvor *r* og *a* er reelle tal.

$\int e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x)dx$ og $\int e^{a \cdot x} \cdot \cos(b \cdot x)dx$, hvor *a* og *b* er reelle tal.

Vi vil gennemregne et par eksempler, hvor vi anvender sætningen om delvis integration:

Sætning: Delvis integration
Antag, at *f* er kontinuert med stamfunktionen *F,* og *g* er differentiabel med afledet funktion g', og antag at g' er kontinuert. Så gælder det:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Eksempel 1: Produkt med trigonometriske funktioner

1.1 Vi vil bestemme integralet $\int x \cdot \cos(x)dx$ **.**

I formlen for delvis integration $\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$ sætter vi:

$$f(x) = \cos(x) \text{ og } g(x) = x$$

Således er stamfunktionen til *f* : $F(x) = \sin(x)$ og den afledede af *g* er: $g'(x) = 1$, hvorved vi integralet på højre side nemt kan bestemmes, fordi vi jo blot skal bestemme stamfunktionen til $\sin(x)$! Vi får:

$$\int x \cdot \cos(x)\, dx = \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1\, dx$$

$$\int x \cdot \cos(x)\, dx = \cos(x) \cdot x - (-\cos(x)) + k$$

$$\int x \cdot \cos(x)\, dx = \sin(x) \cdot x + \cos(x) + k$$

1.2 Vi vil bestemme integralet $\int x^2 \cdot \sin(x)dx$ **.**

Vi sætter her $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x^2$, dvs. $F(x) = -\cos(x)$ og $g'(x) = 2x$. Således får vi:

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx = -\cos(x) \cdot x^2 - \int -\cos(x) \cdot (2x)\, dx$$

Men for at bestemme integralet på højre side må vi igen anvende delvis integration, men det har vi allerede gjort ovenfor, og vi får da:

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx = -\cos(x) \cdot x^2 + 2 \cdot (\sin(x) \cdot x + \cos(x)) + k$$

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx = -\cos(x) \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) + k$$

Mønsteret gentager sig selvfølgelig, hvis integrandens ene faktor er potensfunktioner af højere grad – man arbejder sig baglæns igennem integralerne, indtil man når frem til et udtryk, hvor det simple integral på højre side er $\int \sin(x)dx$ eller $\int \cos(x)dx$.

Eksempel 2: Produkt med eksponentielle funktioner

2.1 Vi vil bestemme integralet $\int x\cdot e^x\,dx$.

I formlen for delvis integration $\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$ sætter vi:

$$f(x)=e^x \text{ og } g(x)=x$$

Således er stamfunktionen til f: $F(x)=e^x$ og den afledede af g er: $g'(x)=1$, hvorved vi integralet på højre side nemt kan bestemmes, fordi vi jo blot skal bestemme stamfunktionen til e^x ! Vi får:

$$\int x\cdot e^x\,dx = e^x\cdot x - \int e^x\cdot 1\,dx$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = e^x\cdot x - e^x + k$$

2.2 Vi vil bestemme integralet $\int x^2\cdot e^{4x}\,dx$.

Vi sætter $f(x)=e^{4x}$ og $g(x)=x^2$, dvs. $F(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$ og $g'(x)=2x$. Vi får da:

$$\int x^2\cdot e^{4x}\,dx = \tfrac{1}{4}e^{4x}\cdot x^2 - \int \tfrac{1}{4}e^{4x}\cdot(2x)\,dx$$

$$\int x^2\cdot e^{4x}\,dx = \tfrac{1}{4}e^{4x}\cdot x^2 - \tfrac{1}{2}.\int e^{4x}\cdot x\,dx$$

Men for at bestemme integralet på højre side må vi igen anvende delvis integration, som ovenfor – eneste forskel er, at der står 4x i eksponenten, som vi skal tage hensyn til, dvs.:

$$\int x^2\cdot e^{4x}\,dx = \tfrac{1}{4}e^{4x}\cdot x^2 - \tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{4}e^{4x}\cdot x - \tfrac{1}{16}e^{4x}) + k$$

$$\int x^2\cdot e^{4x}\,dx = \tfrac{1}{4}e^{4x}\cdot x^2 - \tfrac{1}{8}\cdot e^{4x}\cdot x + \tfrac{1}{32}e^{4x} + k$$

Også her ser vi, at mønsteret gentager sig, og at man på samme måde som i eksempel 1 må arbejde sig baglæns via gentagen delvis integration indtil integralet på højre side bliver simpelt nok til, at man kan bestemme det.

Eksempel 3: Produkt af eksponentielle og trigonometriske funktioner

3.1 Vi vil bestemme integralet $\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx$.

I formlen for delvis integration $\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$ sætter vi:

$$f(x)=\cos(x) \text{ og } g(x)=e^{3x}$$

Således er stamfunktionen til f: $F(x)=\sin(x)$ og den afledede af g er: $g'(x)=3\cdot e^{3x}$. Dermed får vi:

$$\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot e^{3x} - \int \sin(x)\cdot 3e^{3x}\,dx$$

$$\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot e^{3x} - 3\cdot\int \sin(x)\cdot e^{3x}\,dx$$

Integralet på højre side skal igen bestemmes ved partiel integration, og her sætter vi $f(x)=\sin(x)$ og $g(x)=e^{3x}$, dvs. $F(x)=-\cos(x)$ og $g'(x)=3\cdot e^{3x}$. Anvender vi dette får vi:

$$\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot e^{3x} - 3\cdot\left(-\cos(x)\cdot e^{3x} - 3\cdot\int -\cos(x)\cdot e^{3x}\,dx\right)$$

$$\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot e^{3x} + 3\cdot e^{3x}\cdot\cos(x) - 9\cdot\int \cos(x)\cdot e^{3x}\,dx$$

Umiddelbart ser det jo ud til at vi ikke er kommet et skridt videre, fordi vi stadig ikke kan bestemme integralet på højre side. Men ser vi godt efter, så er integralet på højre side fuldstændigt det samme som på venstre side! Derfor kan vi bare lægge dette led til på begge sider:

$$10\cdot\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot e^{3x} + 3\cdot\cos(x)\cdot e^{3x}$$

$$\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \tfrac{1}{10}\sin(x)\cdot e^{3x} + \tfrac{3}{10}\cdot\cos(x)\cdot e^{3x}$$

$$\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \tfrac{1}{10}\cdot e^{3x}\cdot(\sin(x) + 3\cdot\cos(x))$$

Vi skal dog huske integrationskonstanten, så resultatet bliver:

$$\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = \tfrac{1}{10}\cdot e^{3x}\cdot(\sin(x) + 3\cdot\cos(x)) + k$$

ISBN 9788770668781

Øvelse 1:

Bestem ved delvis integration integralerne:

a) $\int x \cdot \sin(2x)dx$ b) $\int x^2 \cdot \ln(x)dx$ c) $\int x^3 \cdot \ln(2x)dx$ d) $\int e^{2x} \cdot \sin(x)dx$