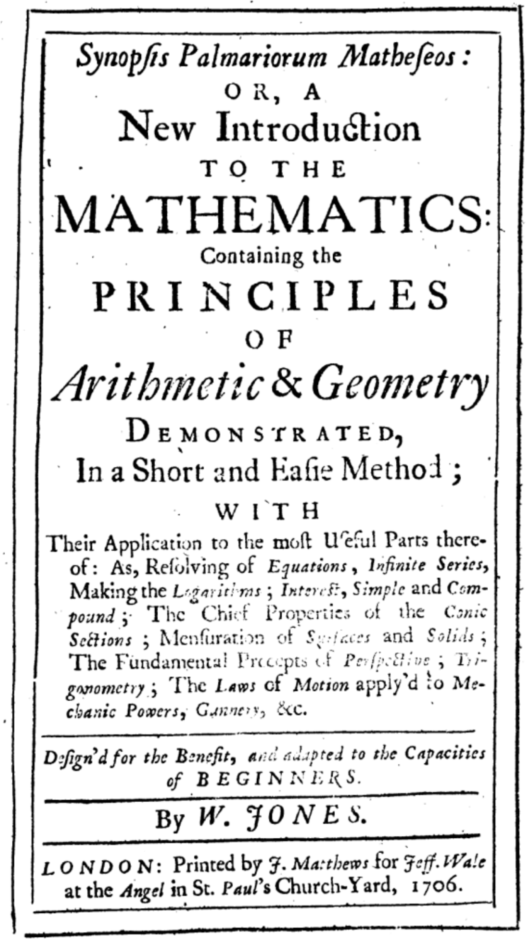
ISBN 9788770668781

π can never be expressed in numbers. William Jones og John Machins algoritme til beregning af π

1. Oprindelsen til symbolet π

Første gang vi møder symbolet π som betegnelse for forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter, er i et værk af den engelske matematiker William Jones (1675-1749): *A New Introduction to the Mathematics, Containing the Principles of Arithmetic and Geometry*. Værket bliver ofte i litteraturen betegnet med den titel, der er nævnt øverst på titelbladet: *Synopsis Palmariorum Matheseos*, der betyder: *En synopsis over opnåede resultater i matematikken,*



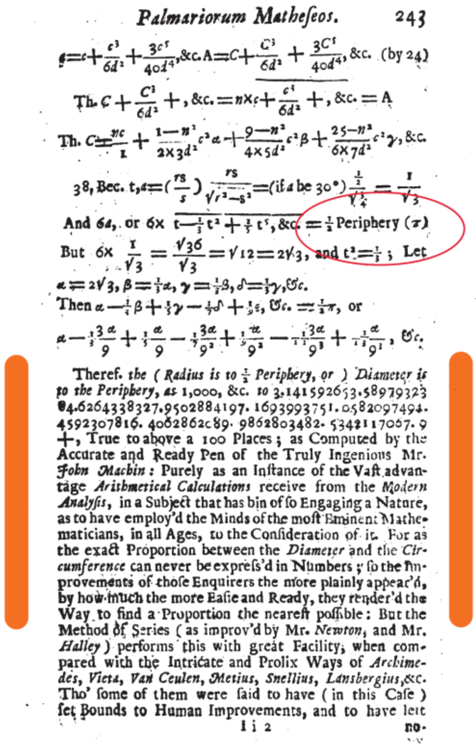
Synopſis Palmariorum Matheſeos:
OR, A
New Introduction
TO THE
MATHEMATICS:
Containing the
PRINCIPLES
OF
Arithmetic & Geometry
DEMONSTRATED,
In a Short and Eaſie Method;
WITH
Their Application to the moſt Uſeful Parts thereof: As, Reſolving of *Equations*, *Infinite Series*, Making the *Logarithms*; *Intereſt*, *Simple* and *Compound*; The Chief Properties of the *Conic Sections*; Menſuration of *Surfaces* and *Solids*; The Fundamental Precepts of *Perſpective*; *Trigonometry*; The *Laws* of *Motion* apply'd to *Mechanic Powers*, *Gunnery*, &c.
Deſign'd for the Benefit, and adapted to the Capacities of BEGINNERS.
By *W. JONES.*
LONDON: Printed by *J. Matthews* for *Jeff. Wale* at the *Angel* in St. *Paul's* Church-Yard, 1706.

Hele værket kan hentes ***her.***

1706 er på Newtons tid, han har skrevet sine hovedværker, men endnu ikke publiceret nær alt. Det er ikke mere end godt 100 år efter, at det blev almindeligt at anvende symboler som *x* i matematik. Og med William Jones altså også symboler for størrelser som pi.

Prøv at hente værket frem og læg mærke til, hvor let det er at læse den engelske *tekst*. En dansk tekst fra 1700 er ganske vanskelig at læse, men det engelske skriftsprog har udviklet sig meget lidt.
Det fremgår også af de to tekstuddrag nedenfor.

Side 243 er første gang, symbolet dukker op i matematikhistorien, markeret med den røde oval. Jones skriver



Palmariorum Matheſeos. 243

$a = c + \frac{c^3}{6d^2} + \frac{3c^5}{40d^4}$, &c. $A = C + \frac{C^3}{6d^2} + \frac{3C^5}{40d^4}$, &c. (by 24)

Th. $C + \frac{C^3}{6d^2} +$, &c. $= n \times c + \frac{c^3}{6d^2} +$, &c. $= A$

Th. $C = \frac{nc}{1} + \frac{1-n^2}{2\times 3d^2}c^2\alpha + \frac{9-n^2}{4\times 5d^2}c^2\beta + \frac{25-n^2}{6\times 7d^2}c^2\gamma$, &c.

38, Bec. t, $a = (\frac{rs}{s})\frac{rs}{\sqrt{r^2-s^2}} =$ (if a be 30°) $\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

And 64, or $6\times \overline{t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5}$, &c. $= \frac{1}{2}$ Periphery (π)

But $6\times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, and $t^2 = \frac{1}{3}$; Let

$\alpha = 2\sqrt{3}$, $\beta = \frac{1}{3}\alpha$, $\gamma = \frac{1}{3}\beta$, $\delta = \frac{1}{3}\gamma$, &c.

Then $\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{5}\gamma - \frac{1}{7}\delta + \frac{1}{9}\varepsilon$, &c. $= \frac{1}{2}\pi$, or

$\alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}$, &c.

Theref. *the* (*Radius is to* $\frac{1}{2}$ *Periphery, or*) *Diameter is to the Periphery, as* 1,000, &c. *to* 3.141592653.58979323 84.6264338327.9502884197.1693993751.0582097494. 4592307816.4062862089.9862803482.5342117067.9 +, True to above a 100 Places; as Computed by the Accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr. *John Machin*: Purely as an Inſtance of the Vaſt advantage *Arithmetical Calculations* receive from the *Modern Analyſis*, in a Subject that has bin of ſo Engaging a Nature, as to have employ'd the Minds of the moſt Eminent Mathematicians, in all Ages, to the Conſideration of it. For as the exact Proportion between the *Diameter* and the *Circumference* can never be expreſs'd in Numbers; ſo the Improvements of thoſe Enquirers the more plainly appear'd, by how much the more Eaſie and Ready, they render'd the Way to find a Proportion the neareſt poſſible: But the Method of Series (as improv'd by Mr. *Newton*, and Mr. *Halley*) performs this with great Facility, when compared with the Intricate and Prolix Ways of *Archimedes*, *Vieta*, *Van Ceulen*, *Metius*, *Snellius*, *Lansbergius*, &c. Tho' ſome of them were ſaid to have (in this Caſe) ſet Bounds to Human Improvements, and to have left no-

Ii 2

symbolet uden kommentar: *Periphery* er på dansk: *perferi* , og betyder *cirkelomkreds*. Jones forklarer ikke, hvorfor han valgte dette symbol, men måske er forklaringen, at pi er det græske bogstav for p, og periferi starter med p.

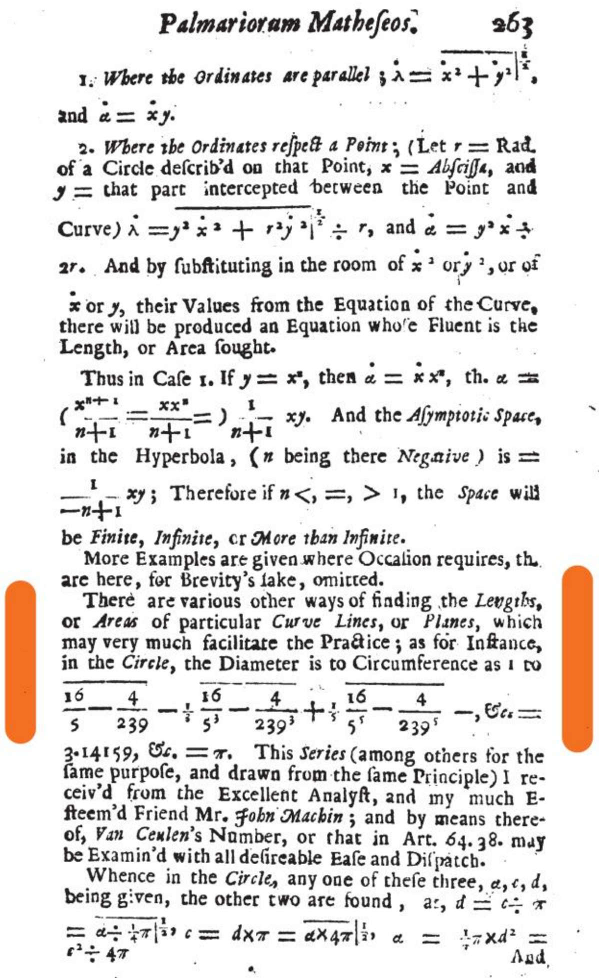
I teksten markeret med de orange streger finder vi det berømte citat af ham: *The exact proportion between the diameter and the circumference can never be expressed i numbers.*
På dette tidspunkt i matematikhistorien er tal noget, der kan udtrykkes ved formler som $\sqrt{2}$, $\cos(0.78)$, $\ln(5)$, eller som måske er rod i et polynomium med hele tal som koefficienter. Men pi er hverken eller. Lige oven over har han angivet pi med 100 decimaler! Og han ved, det bare bliver ved og ved. Dette var beregnet af hans ven John Machin ved en snedig algoritme, der siden er er blevet kaldt for "Machins algoritme". Den kommenteres nedenfor.

ISBN 9788770668781

2. Hvor har William Jones sin komplicerede formel fra?

På side 263 definerer William Jones mere præcist, hvad hans symbol π står for – se teksten mellem de røde bjælker:

I *cirklen* forholder diameteren sig til omkredsen, som tallet 1 til (en ret kompliceret formel) etc = 3,14159 = π



Palmariorum Matheseos. 263

1. *Where the Ordinates are parallel*; $\dot{\lambda} = \overline{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}|^{\frac{1}{2}}$, and $\dot{\alpha} = \dot{x}y$.

2. *Where the Ordinates respect a Point*; (Let r = Rad. of a Circle describ'd on that Point, x = *Abscissa*, and y = that part intercepted between the Point and Curve) $\dot{\lambda} = \overline{y^2\dot{x}^2 + r^2\dot{y}^2}|^{\frac{1}{2}} \div r$, and $\dot{\alpha} = y^2\dot{x} \div$

21. And by substituting in the room of $\dot{x}^2$ or $\dot{y}^2$, or of $\dot{x}$ or $\dot{y}$, their Values from the Equation of the Curve, there will be produced an Equation whose Fluent is the Length, or Area sought.

Thus in Case 1. If $y = x^n$, then $\dot{\alpha} = \dot{x}x^n$, th. $\alpha =$ $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{xx^n}{n+1} =\right) \frac{1}{n+1}xy$. And the *Asymptotic Space*, in the Hyperbola, (n being there *Negative*) is $= \frac{1}{-n+1}xy$; Therefore if $n <, =, > 1$, the *Space* will be *Finite*, *Infinite*, or *More than Infinite*.

More Examples are given where Occasion requires, th. are here, for Brevity's sake, omitted.

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to $\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -$, &c. $=$ 3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all desireable Ease and Dispatch.

Whence in the *Circle*, any one of these three, α, c, d, being given, the other two are found, as, $d = c \div \pi = \overline{\alpha \div \frac{1}{4}\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $c = d \times \pi = \overline{\alpha \times 4\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{4}\pi \times d^2 = c^2 \div 4\pi$

And

Den komplicerede formel, som vi på s. 243 så en variant af, og som åbenbart er en formel der giver tallet π, er den som John Machin fandt.

Udgangspunktet for denne algoritme er den simple iagttagelse, at $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Det svarer til $\tan(45°)$, og i en enhedscirkel ser vi, at en retningsvinkel på $45°$ giver en ligebenet trekant. Så $\cos(45°) = \sin(45°)$, og dermed er $\tan(45°) = 1$.

Ser vi nu kun på intervallet $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, så er tangens en voksende funktion og har derfor en omvendt funktion, vi faktisk kender som $\tan^{-1}$. Denne kaldes også *arctan*, og repræsenterer altså den omvendte operation, som fjerner tangens:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

Hvis vi kan udregne arctan-værdier, så har vi jo her en formel for π:

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1)$$

På William Jones og Newtons tid har en matematiker Brook Taylor (1685-1731) udviklet sin teori for det, vi idag kalder *Taylorrækker*: Enhver nogenlunde pæn funktion kan skrives som en (normalt) uendelig sum af potenser. Fx:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} +$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

En funktion som arctan har også en Taylorrække, og der er en fast procedure for beregning af de enkelte led. Dette har vi behandlet i projekt 2.9 om Taylorrækker. Taylorrækken for arctan er:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots \qquad (*)$$

Prøv nu at se teksten. Kan du se det begynder at ligne.

Vi kunne nu indsætte og få udtrykket:

$$\pi = 4 \cdot \arctan(1) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + \frac{1^9}{9} - \ldots\right) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

Konvergensen af denne række er imidlertid meget langsom. Vi skal have 5.000.000.000 led med, før vi når op på 10 cifre!

Men dette var også blot Taylors generelle formel. Nu kommer John Machin ind i billedet.

ISBN 9788770668781

3. John Machins arctan-formel

John Machin, som William Jones omtaler i sin tekst, er en af hans gode matematiske venner. Han omtales som en sand regnemester, og det må vi medgive. Med John Machin sker der en eksplosiv vækst i antallet af cifre, vi kender i decimaludviklingen for π. Han beviser en række formler, hvor π knyttes sammen med funktionsværdier af arctan. Den vigtigste, og den som vi finder i William Jones teklst , er følgende:

$$\pi = 16 \cdot \arctan\left(\tfrac{1}{5}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\tfrac{1}{239}\right) \qquad (**)$$

Øvelse 1.

Prøv at indsætte $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{239}$ hver for sig i formlen for arctan(*), og kombiner disse to rækker som der står i (**), saml leddene efter *x*-potenserne, og se, at du faktisk får det, som står i teksten. (En streg over to led er en parentes, hvor en fællers faktor er sat uden for parentes).

Øvelse 2.

Denne formel giver en hurtig konvergens. Prøv selv i et værktøjsprogram at medtage fx 10 og 20 led.

Den formel, som John Machin fandt, kan udledes på flere måder. Vi vil her give to helt forskellige metoder, dels ved at anvende de såkaldte *additionsformler* for tangens, og dels ved at gå over og regne i de komplekse tal.

3.1 Bevis for John Machins formel ved hjælp af additionsformler for tangens

Additionsformlerne for tangens var på Machins tid i 1700-tallet velkendt stof, ligesom de additionsformlerne for sinus og cosinus, som de blev udledt fra, var. Denne metode er historisk set autentuiske metode, som Machin anvendte.

Additionsformlerne for sinus og cosinus er vist i projekt 8.11, i *Hvad er matematik*? 2. Her får vi brug for:

$$\sin(u+v) = \sin(u)\cdot\cos(v) + \cos(u)\cdot\sin(v)$$
$$\cos(u+v) = \cos(u)\cdot\cos(v) - \sin(u)\cdot\sin(v)$$

Vi anvender nu definitionen på tangens og foretager en omskrivning, hvor vi forkorter brøken:

$$\begin{aligned}\tan(u+v) &= \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} \\ &= \frac{\sin(u)\cdot\cos(v)+\cos(u)\cdot\sin(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)-\sin(u)\cdot\sin(v)} \\ &= \frac{\dfrac{\sin(u)\cdot\cos(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)} + \dfrac{\cos(u)\cdot\sin(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)}}{\dfrac{\cos(u)\cdot\cos(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)} - \dfrac{\sin(u)\cdot\sin(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)}}\end{aligned}$$

Vi har forkortet med faktoren $\cos(u)\cdot\cos(v)$, fordi vi herved får udtryk med tangens frem. Se her:

$$\begin{aligned}\tan(u+v) &= \frac{\dfrac{\sin(u)\cdot\cos(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)} + \dfrac{\cos(u)\cdot\sin(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)}}{\dfrac{\cos(u)\cdot\cos(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)} - \dfrac{\sin(u)\cdot\sin(v)}{\cos(u)\cdot\cos(v)}} \\ &= \frac{\dfrac{\sin(u)}{\cos(u)} + \dfrac{\sin(v)}{\cos(v)}}{1 - \dfrac{\sin(u)}{\cos(u)}\cdot\dfrac{\sin(v)}{\cos(v)}} \\ &= \frac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\cdot\tan(v)}\end{aligned}$$

Vi har tilladt os at regne uden at overveje definitionsmængderne. For sin og cos er der ingen problemer, men for tangens er der. For at udngå dfet bliver for gteknisk vedtager vi blot, at vi regner inden for det område, hvor både u, v, og $u+v$ liger i intervallet $\left]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, hvor tangens og arctan er veldefinerede.

Foreløbig konklusion:

Sætning: Additionsformlel og formlen for den dobbelte vinkel for tangens
Hvis vi har givet to vinkler u og v så gælder:

1) $\tan(u+v)=\dfrac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\cdot\tan(v)}$ 2) $\tan(2u)=\dfrac{2\tan(u)}{1-\left(\tan(u)\right)^2}$

Øvelse 3.
Vis selv formlen for den dobbelte vikel

Øvelse 5
Vis formlen for tangens til en differens:

$$\tan(u-v)=\frac{\tan(u)-\tan(v)}{1+\tan(u)\cdot\tan(v)}$$

(*Hint*: Udnyt 1), samt at $\tan(-v)=-\tan(v)$)

Vi kan nu udlede formlen:

$$\pi=16\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right)-4\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{239}\right)$$

Vi vil udnytte vores viden om, at $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Vi sætter først $\arctan(\frac{1}{5})=u$, hvoraf vi har: $\tan(u)=\frac{1}{5}$

Nu udnyttes formel 2) i sætningen:

$$\tan(2u)=\frac{2\tan(u)}{1-\left(\tan(u)\right)^2}=\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{25\cdot\frac{2}{5}}{25\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)}=\frac{10}{25-1}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

Dette anvendes videre i udregning af $\tan(4u)$ (udfyld nu selv detaljerne:

$$\tan(4u)=\frac{2\tan(2u)}{1-\left(\tan(2u)\right)^2}=\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}=\frac{120}{119}$$

Ved at anvende arctan får vi $4u$ frilagt, som vi skal bruge nedenfor:

$$4u=\arctan\left(\frac{120}{119}\right) \qquad (***)$$

Nu udnyttes øvelse 5 og vi får π på banen:

$$\tan\left(4u-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(4u)-\tan(\frac{\pi}{4})}{1+\tan(4u)\cdot\tan(\frac{\pi}{4})}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}}=\frac{1}{239}$$

Ved at anvende arctan får vi π frilagt:

$$4u-\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Ved at indfsætte $u=\arctan(\frac{1}{5})$ får vi nu:

$$4\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\text{, eller:}$$

$$\frac{\pi}{4}=4\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\text{, og ved at gange overv:}$$

$$\pi = 16 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Dette er Machins berømte formel. Herefter er det "bare" at indsætte i rækkeudviklingen for arctan og medtage så mange led, man orker. Men konvergensen her er meget hurtig.

3.1 Bevis for John Machins formel ved at regne i de komplekse tal

Der findes en række problemer i matematik, hvis løsning både bliver lettere og mere elegant ved atr gå over tiol de komplekse tal. Det var ikke aktuelt på Machins tid, da en egentlig etori for komoplelse tal først kommer 100 år senere. Anvendelse af denne metiode kan derfor imkke stå alene i et oprojekt om historisk matematik, men det kan perspektivere.

Vi starter med at se på regning inden for de ko9mplelse tal.

Betragt de to komplekse tal:

$$z_1 = a_1 + i \cdot b_1 \quad \text{og} \quad z_2 = a_2 + i \cdot b_2$$

Her er de komplekse tal skrevet med rektangulære koordinater, hvor tallet *i* er den imaginære enhed: $i^2 = -1$. I den komplekse talplan, der svarer til det todimensionelle koordinatsystem afsættes tallet $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ i punktet med koordinaterne $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$. Vi repræsenterer det komplekse tal med stedvektoren til punktet.

Med anvendelse af rektangulære koordinater og de sædvanlige parentesregler kan vi udregne produktet:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \qquad (****)$$

Øvelse 6.

Vis dette

Komplekse tal kan også beskrives med *polære* koordinater: Modulus og argument.

Modulus af fx $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ svarer til *længden* af vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

Argumentet af $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ er lig med den *vinkel*, som stedvektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ danner med 1. aksen (regnet med fortegn).

Nu gælder der for multiplikation af to komplekse tal, fx $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ og $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$

1. man finder modulus af produktet $z_1 \cdot z_2$ som *produktet* af de to tal modulus.
2. man finder argumentet af produktet $z_1 \cdot z_2$ som *summen* af de to tals argumenter, og man finder argumentet til en brøk, $\frac{z_1}{z_2}$ som *differensen* af de to tals argumenter.

Øvelse 7

a) Vis, at $\arg(z^2) = 2 \cdot \arg(z)$

b) Vis, at $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

Øvelse 8

Lad os betegne argumenter for z_1 og z_2 med symbolerne θ_1 *og* θ_2:

$$\arg(z_1)=\theta_1 \text{ og } \arg(z_2)=\theta_2$$

a) Vis, at $\tan(\theta_1)=\frac{b_1}{a_1}$ og $\tan(\theta_2)=\frac{b_2}{a_2}$

b) Vis ud fra regel 2, at:

$$\arg\left(z_1\cdot z_2\right)=\theta_1+\theta_2=\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)+\arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)$$

Vi antager som ovenfor i 3.1, at alle vinkler ligger i intervallet $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Det følgende bygger i en vis forstand på, at vi kender den formel, som vi ønsker at bevise:

$$\frac{\pi}{4}=4\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

$\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ er ifølge øvelse 8 argumentet til det komplekse tal $5+i$.

$4\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ er ifølge øvelse 7 argumentet til det komplekse tal $(5+i)^4$.

$\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ er ifølge øvelse 8 argumentet til det komplekse tal $239+i$.

Og endelig:

$4\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ er ifølge regneregel 2) argumentet til det komplekse tal $\frac{(5+i)^4}{239+i}$.

Lad os nu udregne dette tal – og lad os blot anvende et værktøjsprogram.
Vi foretager af instruktive årsager en udregning af gangen:

$$(5+i)^4=476+480i\text{, så:}$$

$$\frac{(5+i)^4}{239+i}=\frac{476+480i}{239+i}$$

Vi forlænger denne brøk med tallet $239-i$ for at skaffe det komplekse element væk i nævneren:

$$\frac{(476+480i)\cdot(239-i)}{(239+i)\cdot(239-i)}=\frac{114244+114244i}{239^2+1}$$

Og som var det magi bliver alt dette til:

$$\frac{114244-114244i}{239^2+1}=\frac{114244+114244i}{57122}=2+2i$$

Men dette tal kan vi let afsætte i den komplekse talplan – det er punktet $(2,2)$. Og vinklen med 1. aksen, dvs argumentet for $2+2i$ er $\frac{\pi}{4}$ (svarende til 45°).

Heraf får vi så - ved udregning af argumentet for tallet $\frac{(5+i)^4}{239+i}$ på to måder - den ønskede formel:

$$\frac{\pi}{4}=4\cdot\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$