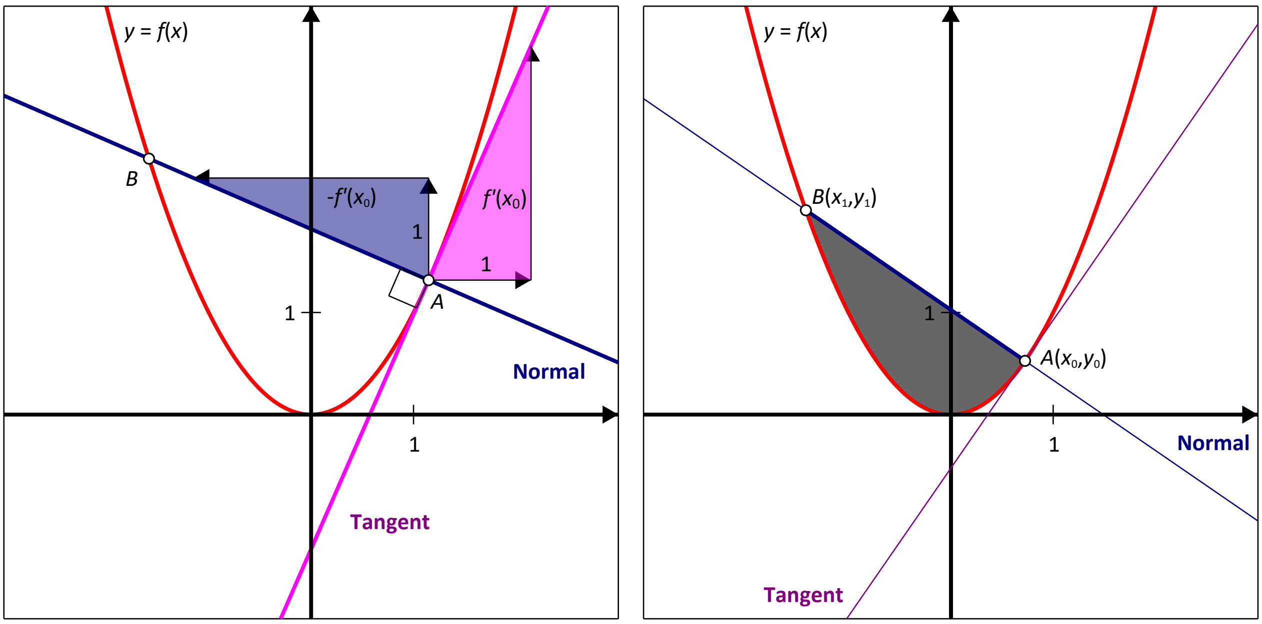
Projekt 2.5 Normalen og det mindste areal for et andengradspolynomium

Indledning

Gennem ethvert punkt $A(x_0, f(x_0))$ på grafen for en differentiabel funktion f, kan vi tegne en tangent med ligningen

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

Men vi kan også tegne en *normal*, dvs. en linje, der står vinkelret på tangenten i grafpunktet A.



a) Gøre rede for at normalen får ligningen

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

Hvis der er tale om en simpel graf, som fx en parabel $y = x^2$, vil normalen skære grafen i endnu et punkt B og derved frembringe en *korde AB*. Denne korde afskærer sammenmed parablen som vist et areal, og det dette areal, vi vil forsøge at minimere.

Første del: Dynamisk geometri

Vi vil først danne os et indtryk af situationen ved at bruge et dynamisk graftegneprogram.

b) Tegn grafen for funktionen $p(x) = x^2$ i dit dynamiske geometriprogram. Konstruer dernæst et frit punkt A på grafen.

c) Konstruér normalen til parablen i punktet A, fx som den vinkelrette til tangenten i A. Konstruér det andet skæringspunkt B mellem parablen og normalen.

d) Bestem nu ligningen for normalen samt koordinaterne til skæringspunkterne A og B.

e) Bestem nu arealet afgrænset af parablen og korden. Træk i punktet A og find derved såvel et skøn over det mindste areal, samt de tilhørende koordinater til A og B.

f) Prøv også at konstruere grafen for arealfunktionen som et geometrisk sted ved at afbilde punktet med samme x-koordinat x_0 som A og arealet $T(x_0)$ som y-koordinat. Når du trækker i det fire punkt A vil areal-punktet $(x_0, T(x_0))$ gennemløbe grafen for arealfunktionen. Grafen kan nu enten spores eller konstrueres som geometrisk sted. Beskriv grafens karakteristika: monotoniintervaller, ekstremer osv.

ISBN 9788770668781

Anden del: den symbolske maskine

g) Opret nu funktionen $p(x)=x^2$ i dit CAS-program. Tildel det frie punkt *A* koordinaterne (x_0, y_0) og bestem nu ligningen for normalen *n* udtrykt ved x_0. Bestem koordinaterne (x_1, y_1) til skæringspunktet *B* mellem normalen og grafen udtrykt ved x_0.

h) Bestem nu ligningen for normalen udtrykt ved x_0. Du kan nu finde arealet afgrænset af normalen og grafen ved en symbolsk udregning, dvs. finde arealet $T(x_0)$ udtrykt ved x_0. Tegn grafen for arealfunktionen *T*.

i) Bestem nu minimumspunkterne for arealfunktionen *T* og finde derved den eksakte værdi for det mindste areal såvel som de eksakte koordinater til *A* og *B* hørende til det mindste areal.