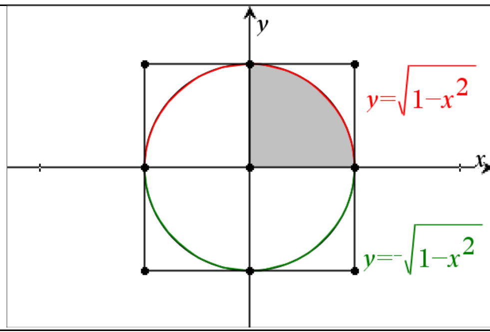
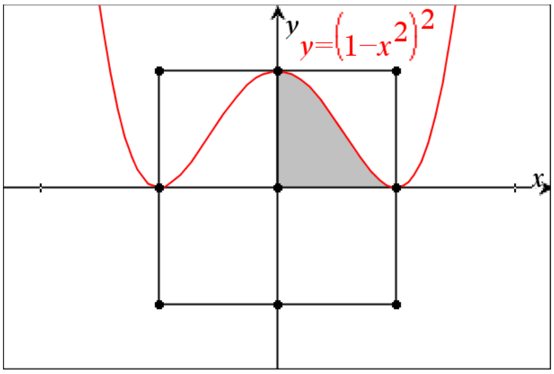
ISBN 9788770668781

Projekt 2.4 Historisk: Wallis løsning af cirklens kvadratur

Wallis havde nu endeligt muligheden for at tackle cirklens kvadratur. Han måtte da først finde ligningen for en cirkel, men det var simpelt nok: Hvis cirklen havde centrum i (0,0) or radius 1, så giver Pythagoras en ligning af formen $x^2+y^2=1$. Altså er ligningen for en enheds-cirkel givet på formen $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Wallis skal altså finde kvadraturen af $\sqrt{1-x^2}$. Det er en sammensat funktion og Wallis havde ikke noget umiddelbart bud på hvordan man kunne finde denne kvadratur.



Men den kunne omskrives på formen $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ svarende til at vi skal finde værdien af integralet $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$. Dette integral repræsenterer en kvartcirkel og kvartcirklens omskrevne kvadrat repræsenterer netop en fjerdedel af hele cirklens omskrevne kvadrat. I moderne notation er forholdet mellem arealet af det omskrevne kvadrat og arealet af kvartcirklen derfor netop $4/\pi$, hvilket også er det svar et moderne CAS-program giver.



Men selv om Wallis ikke kunne finde værdien af kvadraturen direkte, fordi han ikke vidste hvordan man kunne håndtere kvadratroden så kunne han udregne kvadraturen for en hel stribe nært beslægtede kvadraturer, hvor han erstattede potensen ½ med et helt tal:

$$(1-x^2)^0, (1-x^2)^1, (1-x^2)^2, (1-x^2)^3, (1-x^2)^4, (1-x^2)^5, \ldots$$

Ved at gange parenteserne ud kan alle disse nemlig omskrives til en endelig sum af simple potensfunktioner: $1, (1-x^2), (1-2x^2+x^4), (1-3x^2+3x^4-x^6)^3, (1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8), (1-5x^2+10x^4-10x^6+5x^8-x^{10}), \ldots$ Men her er jo tale om almindelige polynomier, så dem kan han sagtens finde kvadraturen af idet han erstatter enhver potens x^a med $\frac{1}{a+1}$. Hvis vi for eksempel ser nærmere på $(1-x^2)^2=1-2x^2+x^4$ finder vi

$$1-2\cdot x^2+x^4 \to$$
$$1-2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{15}{15}-\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}$$

Men Wallis kigger på forholdet mellem arealet af enhedskvadratet og arealet frembragt af kurven, dvs. han finder kvadraturen 15/8. Disse udregninger er ikke sværere end at du skal kunne udføre dem i hånden – præcis lige som Wallis måtte gøre det. Prøv nu selv:

Øvelse 1: Find kvadraturerne for de 6 første medlemmer af familien:

p	0	1	2	3	4	5
Ligning	$(1-x^2)^0$	$(1-x^2)^1$	$(1-x^2)^2$	$(1-x^2)^3$	$(1-x^2)^4$	$(1-x^2)^5$
Udvidet	1	$1-x^2$	$1-2x^2+x^4$	$1-3x^2+3x^4-x^6$	$1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8$	...
Kvadratur			$\frac{15}{8}$			

ISBN 9788770668781

Du kan også finde den numerisk grafisk ved at åbne et **graf**-værksted, indføre en skyder p, der løber fra 0 til 10. Tegn grafen for funktionen $(1-x^2)^p$. Find ved opmåling arealet af enhedskvadratet og arealet under grafen. Udregn ved hjælp heraf kvadraturen. Du finder herved en stribe decimaltal, hvor nogle er nemme at genkende, nogle lidt sværere. Hvilken værdi finder du for p = ½?

Du kan også finde kvadraturen symbolsk i et **Lister og regneark**-værksted, ved at oprette to søjler, én for variablen p_var (dvs. p-værdien) og én for kvadraturen, som udregnes som det reciprokke integral ved hjælp af celleformlen

$$=\left(\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{cellereference} dx\right)^{-1}$$

Hvor cellereferencen peger på cellen i søjlen med p-værdierne. Denne formel kan nu trækkes ned gennem hele søjlen for kvadraturen. Hvad sker der hvis du indskyder en ny række med indekset p = ½ mellem p-værdierne 0 og 1. Hvilken værdi finder du så for kvadraturen?

Opret til sidst et **data og statistik**-værksted med **p_var** ud af førsteaksen og **kvadratur** op af andenaksen. Det ligner starten på en kurve for en pæn funktion! Tegn nu grafen for funktionen

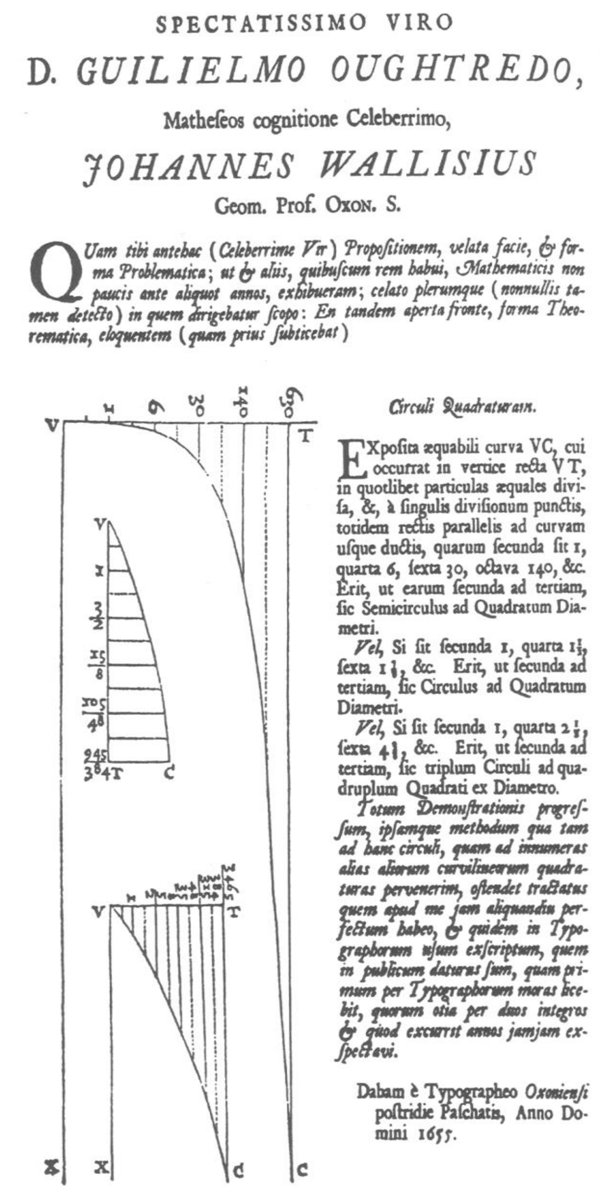
$$y=\left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)^x dt\right)^{-1}$$

Så langt var Wallis kommet, da hans projekt gik i stå. Han havde ved hjælp af kvadratur fundet en række talfølger, hvor cirklens kvadratur optrådte inde i talfølgen, hvis man interpolerede og indskyd mellemled.

Men nu sad han fast og kunne ikke komme nærmere hvordan cirklens kvadratur kunne udtrykkes direkte ved hjælp af hele tal. Og hvad værre var: Der gik rygter om at hans ærkerival filosoffen Hobbes, en selvudnævnt matematiker, som Wallis ikke kunne døje, var tæt på at løse cirklens kvadratur og snart ville offentliggøre sit påståede gennembrud.

Hvad skulle Wallis gøre? Lade som ingenting og løbe risikoen for at års arbejde var spildt og Hobbes ville løbe med hele æren? Wallis tog da et usædvanligt skridt:

Han besluttede sig for at offentliggøre nogle af hans resultater, så man ikke kunne tage æren for deres opdagelse fra ham, men det skulle også gøres på en sådan måde, at man ikke kunne gennemskue hans metode men var nødt til at vente på hans bog for at høre om resten. Han udgav derfor en af matematikhistoriens mest berømte pamfletter, der er gengivet på næste side


SPECTATISSIMO VIRO

D. GUILIELMO OUGHTREDO,

Matheſeos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. Oxon. S.

Quam tibi antehac (Celeberrime Vir) Propoſitionem, velata facie, & forma Problematica; ut & aliis, quibuſcum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celato plerumque (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur ſcopo: En tandem aperta fronte, forma Theorematica, eloquentem (quam prius ſubticebat)

Circuli Quadraturam.

Expoſita æquabili curva VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales diviſa, &, à ſingulis diviſionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam uſque ductis, quarum ſecunda ſit 1, quarta 6, ſexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum ſecunda ad tertiam, ſic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si ſit ſecunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$, ſexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut ſecunda ad tertiam, ſic Circulus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si ſit ſecunda 1, quarta $2\frac{1}{2}$, ſexta $4\frac{3}{8}$, &c. Erit, ut ſecunda ad tertiam, ſic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonſtrationis progreſſum, ipſamque methodum qua tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, oſtendet tractatus quem apud me jam aliquandiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum uſum exſcriptum, quem in publicum daturus ſum, quam primum per Typographorum moras licebit, quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jamjam expectavi.

Dabam è Typographeo *Oxonienſi* poſtridie Paſchatis, Anno Domini 1655.

:

ISBN 9788770668781

Den kan selvfølgelig være svær at læse fordi den står på Latin (hvilket ikke var et problem for Wallis samtidige), men figurerne er klare nok og det er nemt at genkende bidder af teksten: Overskriften til billedteksten lyder **'Circuli Quadraturam'**, dvs. det handler om cirklens kvadratur. Figuren handler om **'curva VC'**, dvs. en kurve VC (der er faktisk tre stykker af dem), der er konstrueret ud fra **'particulas æquales divisa'**, dvs. opdelt i lige store stykker osv.

Wallis giver altså en beskrivelse af hvordan kurven VC er fremkommet. Man tager udgangspunkt i en talfølge, fx 1, 6, 30, 140, 630. Derefter deler man en vandret akse VT i lige store stykker og ud for hver andet delepunkt afsætter man vinkelret på den vandrette akse VT lodrette linjestykker med længderne 1, 6, 30, 140, 630 osv. Derved fremkommer en række punkter som forbindes med en blød kurve.

Hvorfor skriver Wallis nu ikke bare at han afsætter punkterne (2,1), (4,6), (6, 30), (8,140), (10,630) osv. i et koordinatsystem? Simpelthen fordi koordinatsystemet endnu ikke var opfundet. Ganske vidst havde Descartes i sit berømte værk om Geometri undersøgt ligningerne for kurver afsat på samme måde som Wallis, men ideen om to vinkelrette akser, med tallinjer og koordinatsæt udkrystalliserede sig langsomt. Først med Wallis arvtager Newton kom tallinjerne med plads til både positive og negative tal endeligt på plads. Og i starten afsatte man kun en x-akse – y-aksen måtte man tænke sig til. Yder mere blev x-aksen ofte afsat lodret i stedet for vandret og den kunne lige så godt pege nedad som opad. Så Wallis beskrivelse af hvordan man afsætter en kurve ud fra en akse er faktisk forbløffende fremadrettet for sin tid.

Hvilken forbindelse har cirklens kvadratur med hans kurve. Her skriver han '**quarum secunda sit 1, quarta 6, sexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum secunda ad tertiam, sic Semicirculis ad Quadratum Diametri**.' Når man på denne måde afsætter 1 ud for det andet delepunkt, 6 ud for det fjerde, 30 ud fra det sjette, 140 ud fra det ottende osv., så vil man midt mellem det andet og tredje delepunkt netop finde forholdet mellem halvcirklen og kvadratet på dens diameter.

Men hvor kommer tallene fra. Det undlader Wallis behændigt at fortælle! Der skal jo ikke røbes for meget, så interessen for den kommende bog fuser ud i utide. Men se nu nærmere på den anden af hans talfølger:

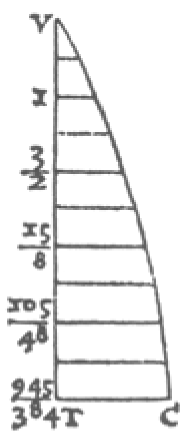
$$1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}, \ldots$$

Den skulle du gerne kunne genkende fra øvelse 1! Her fandt du formentlig de samme tal, bortset fra at dine brøker var forkortet

$$1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{35}{16}, \frac{315}{128}, \ldots$$

Når Wallis ikke har forkortet sine brøker igennem, så var det ikke fordi han ikke kunne finde ud af at forkorte (Wallis var en mental supercomputer!), men fordi der lå et simpelt system gemt i talfølgen:

$$\frac{1}{1} \xrightarrow[\times 2]{\times 3} \frac{3}{2} \xrightarrow[\times 4]{\times 5} \frac{15}{8} \xrightarrow[\times 6]{\times 7} \frac{105}{48} \xrightarrow[\times 8]{\times 9} \frac{945}{384} \rightarrow \ldots$$



Tællerne fremkommer altså ved successiv multiplikation af de ulige tal, mens nævnerne fremkommer ved successiv multiplikation af de lige tal. Det er mageløst godt set! Men Wallis var jo heller ikke tidens førende kodebryder for ingen ting . Wallis kan nu konkludere: '**Vel, Si sit secunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$, sexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic Circulus ad Quadratum Diametri**'. Mellem det andet led 1 og det fjerde led $1\frac{1}{2}$ finder vi altså forholdet mellem cirklen og kvadratet på cirklens diameter. Forholdet mellem arealet af det omskrevne kvadrat og cirklens areal svarer altså netop til den tredje streg på figuren. Igen har han ikke røbet for meget, men nok til at han siden hen kan påvise at han var der først, hvis nogen skulle gøre ham rangen stridig!

Efter pamfletten gik Wallis i stå. Kun ved hjælp af sin gode ven, matematikeren Brouncker, skete der et gennembrud. Brouncker kunne fortælle Wallis at han havde fundet en løsning til Wallis problem om at knytte cirklens kvadratur til de hele tal. Hans løsning var fuldstændigt overraskende en kædebrøksudvikling, noget helt nyt for den tid:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ldots}}}}}$$

Wallis forstod ikke helt hvordan Brouncker var kommet til dette overraskende resultat, men det gav ham mod til at fortsætte sin egen søgning. Forsynet med nyt mod til at gå videre fandt han endelig en af sine guldklumper: **Et uendeligt produkt for cirklens kvadratur**. Vender vi tilbage til Wallis talfølge

$$1,\frac{3}{2},\frac{15}{8},\frac{35}{16},\frac{315}{128},\ldots$$

skulle cirklens kvadratur, som Wallis i mangel af bedre betegnede med $\square$, ligge midt mellem tallene 1 og $\frac{3}{2}$. Men den ovenstående talfølge har en særlig simpel struktur. Hvis vi benytter betegnelserne fra øvelse 1, hvor det første tal 1 er knyttet til eksponenten p = 0 og det andet tal $\frac{3}{2}$ er knyttet til eksponenten p = 1, så er cirklens kvadratur knyttet til eksponenten p = $\frac{1}{2}$:

P	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	…
Faktor	…	?	$\frac{3}{2}$	?	$\frac{5}{4}$	?	$\frac{7}{6}$	?	…
Kvadratur	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	?	$\frac{15}{8}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$	?	$\frac{35}{16}=\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$	?	…

Spørgsmålet er nu: Hvad skal der stå under de ulige eksponenter? Når man rykker én hen i tabellen fra indeks p-1 til indeks p, skal man gange den foregående værdi med $\frac{2p+1}{2p}$. Når man rykker fra indeks 1 til indeks 2 skal man således gange med $\frac{5}{4}$. Men denne regel kan jo også anvendes på de halve indices. Midt mellem $\frac{3}{2}$ og $\frac{5}{4}$ skal man således gange med $\frac{4}{3}$ (idet 4 ligger midt mellem 3 og 5, ligesom 3 ligger midt mellem 2 og 4). Det giver anledning til den følgende tabel:

P	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	…
Faktor	…	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	…
Kvadratur	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\cdot\square$	$\frac{15}{8}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\square$	$\frac{35}{16}=\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$	$\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\square$	…

Alle de halvtalllige indices kan altså udtrykkes simpelt ved hjælp af cirklens kvadratur $\square$. Men se nu hvad der sker når vi fortsætter tabellen: De successive værdier rykker tættere og tættere på hinanden, idet faktoren ligger tættere og tættere på 1. Hvis vi fortsætter i det uendelige bliver successive værdier derfor identiske, hvorfor vi finder:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}\cdot\ldots=\square\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\ldots$$

Isolerer vi cirklens kvadratur finder vi derfor det følgende overraskende simple udtryk :

$$\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\ldots=\square$$

ISBN 9788770668781

I moderne notation er cirklens kvadratur givet ved $\square = \frac{4}{\pi}$, hvorfor brøken kan vendes og vi ender med formlen:

$$\pi = 4 \cdot \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 6}{5\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 8}{7\cdot 7} \cdot \ldots$$

Har du mod på det kan du nu selv prøve at lege med den første af Wallis talfølger fra pamfletten:

Øvelse 2:
Wallis kiggede også på cirklen med centrum i (½,0) og radius ½. Tegn denne cirkel i et **graf**-værksted. Den øverste halvdel af cirklen ligger da indenfor enhedskvadratet. Denne gang forsøger Wallis derfor at finde forholdet mellem arealet af enhedskvadratet og *halvcirklens areal*, jfr. pamfletten.

Gør rede for at den øvre halvbue for cirklen har ligningen $y = \sqrt{x - x^2} = \left(x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Find kvadraturerne for de 5 første medlemmer af familien:

p	0	1	2	3	4
Ligning	$(x-x^2)^0$	$(x-x^2)^1$	$(x-x^2)^2$	$(x-x^2)^3$	$(x-x^2)^4$
Udvidet	1	$x-x^2$	$x^2-2x^3+x^4$	$x^3-3x^4+3x^5-x^6$	$x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8$
Kvadratur					

Du kan også finde den numerisk grafisk ved at åbne et **graf**-værksted, indføre en skyder **p**, der løber fra 0 til 10. Tegn grafen for funktionen $(x-x^2)^p$. Find ved opmåling arealet af enhedskvadratet og arealet under grafen. Udregn ved hjælp heraf kvadraturen. Du finder herved en stribe decimaltal, hvor nogle er nemme at genkende, nogle lidt sværere. Hvilken værdi finder du for *p* = ½?

Du kan også finde kvadraturen symbolsk i et **Lister og regneark**-værksted, ved at oprette to søjler, én for variablen p_var (dvs. *p*-værdien) og én for kvadraturen, som udregnes som det reciprokke integral ved hjælp af celleformlen

$$= \left(\int_0^1 \left(x - x^2\right)^{cellereference} dx\right)^{-1}$$

Hvor cellereferencen peger på cellen i søjlen med *p*-værdierne. Denne formel kan nu trækkes ned gennem hele søjlen for kvadraturen. Hvad sker der hvis du indskyder en ny række med indekset *p* = ½ mellem p-værdierne 0 og 1. Hvilken værdi finder du så for kvadraturen?

Opret til sidst et **data og statistik**-værksted med **p_var** ud af førsteaksen og **kvadratur** op af andenaksen. Det ligner starten på en kurve for en pæn funktion! Tegn nu grafen for funktionen

$$y = \left(\int_0^1 \left(t - t^2\right)^x dt\right)^{-1}$$

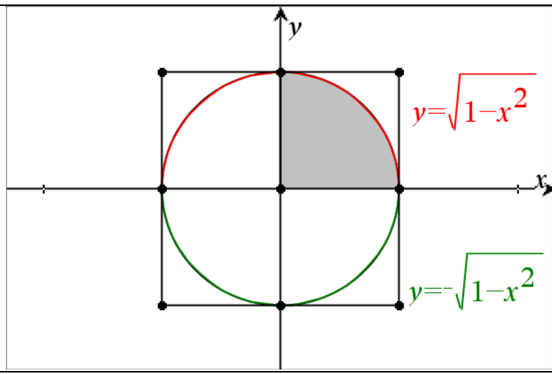
Du skulle nu gerne i øvelse 2 have fundet den første af Wallis talfølger: 1, 6, 30, 140, 630, … Men hvad er systemet bag denne talfølge? Hvad skal man gange med for at gå ét skridt frem i tabellen? Der er igen tale om en brøk, hvor både tæller og nævner varierer regelmæssigt, men der skal pusles lidt med tallene! Hvad sker der når man går langt ud i tabellen: Hvad nærmer faktoren sig så?

Vi har set hvordan Wallis finder diverse talfølger som alle er tæt knytte til cirklens kvadratur. Fra dem alle kan han trække det samme uendelige produkt for cirklens kvadratur (men det kræver lidt snilde jo mere indviklet talfølgen opfører sig – hvis du har mod på det kan du se på talfølgen fra side 4 ovenfor – men du skal holde tungen lige i munden!).

Men hvilket overordnet system følger alle disse talfølger? Også her var Wallis heldig og fandt endnu en guldklump .

ISBN 9788770668781

Først en opvarmning: Hidtil har vi kun integreret polynomier, men rent faktisk kunne Wallis jo integrere alle potensfunktioner, også dem der svarer til rødder! Han kunne derfor frit opstille sine talfølger til at løse cirklens kvadratur. Lad os vende tilbage til enhedscirklen $x^2+y^2=1$, hvor han ønskede at finde arealet af kvartcirklen i første kvadrant: Han skulle altså i moderne terminologi finde værdien af integralet $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, hvilket han ikke kunne fordi eksponenten ½ stod yderst.



Men hvis han byttede om på de to eksponenter ville det pludselig blive lavet om til et integral han godt kunne udregne:

$$\int_0^1 \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx\,.$$

Kig lidt på det nye integral: Nu er den yderste eksponent et helt tal og så kan vi jo bare gange parentesen ud (det er kvadratet på en toleddet størrelse!):

$$\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1-2\cdot x^{\frac{1}{2}}+x$$

Men her kender Wallis jo de enkelte arealer:

$$1-2\cdot x^{\frac{1}{2}}+x \rightarrow$$

$$1-2\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{6}{6}-\frac{8}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$

Kvadraturet er så det reciprokke integral, dvs. 6 (arealet under kurven $1-x^{\frac{1}{2}}$ går 6 gange op i enhedskvadratet). Bytter Wallis om på eksponenterne finder han altså en kvadratur han kan udregne ved hjælp af de regler han allerede har fundet, også selv om der denne gang indgår potensfunktioner med brøk-eksponenter. I almindelighed kigger Wallis derfor på familien

$$\left(\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{p}}\right)^p dx\right)^{-1}$$

Her svarer cirklens kvadratur netop til p = ½. Men så længe p bare er et helt tal kan han udregne kvadraturen i hånden!

Øvelse 3: Find kvadraturerne for de 4 første medlemmer af familien:

p	0	1	2	3	4
Ligning	…	$(1-x^{\frac{1}{1}})^1$	$(1-x^{\frac{1}{2}})^2$	$(1-x^{\frac{1}{3}})^3$	$(1-x^{\frac{1}{4}})^4$
Udvidet	…	$1-x$	$1-2\cdot x^{\frac{1}{2}}+x$	$1-3\cdot x^{\frac{1}{3}}+3\cdot x^{\frac{2}{3}}-x$	$1-4\cdot x^{\frac{1}{4}}+6\cdot x^{\frac{1}{2}}-4\cdot x^{\frac{3}{4}}+x$
Kvadratur			6		

Du kan også finde den numerisk grafisk ved at åbne et **graf**-værksted, indføre en skyder **p**, der løber fra 0 til 10. Tegn grafen for funktionen $(1-x^{\frac{1}{p}})^p$. Find ved opmåling arealet af enhedskvadratet og arealet under grafen. Udregn ved hjælp heraf kvadraturen. Du finder herved en stribe decimaltal, hvor nogle er nemme at genkende, nogle lidt sværere. Hvilken værdi finder du for p = ½?

Du kan også finde kvadraturen symbolsk i et **Lister og regneark**-værksted, ved at oprette to søjler, én for variablen p_var (dvs. *p*-værdien) og én for kvadraturen, som udregnes som det reciprokke integral ved hjælp af celleformlen

$$=\left(\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{cellereference}}\right)^{cellereference}dx\right)^{-1}$$

hvor cellereferencen peger på cellen i søjlen med *p*-værdierne.
Denne formel kan nu trækkes ned gennem hele søjlen for kvadraturen. Hvad sker der hvis du indskyder en ny række med indekset *p* = ½ mellem p-værdierne 0 og 1. Hvilken værdi finder du så for kvadraturen?

Opret til sidst et **data og statistik**-værksted med **p_var** ud af førsteaksen og **kvadratur** op af andenaksen. Det ligner starten på en kurve for en pæn funktion! Tegn nu grafen for funktionen

$$y=\left(\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{x}}\right)^{x}dt\right)^{-1}$$

Øvelse 4: Wallis fandt hurtigt ud af hvor talfølgen stammede fra. Prøv nu selv om du kan finde den gemt i Pascals trekant:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5   10  10  5   1
    1   6   15  20  15  6   1
  1   7   21  35  35  21  7   1
1   8   28  56  70  56  28  8   1
1   9   36  84 126 126  84  36  9   1
```

Men Wallis stoppede ikke her. Pointen med kvadraturen $\left(\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{p}}\right)^{p}dx\right)^{-1}$ var jo at den yderste eksponent var et helt tal og at han derfor kunne gange parentesen ud og finde værdien af kvadraturen. Der var derfor ingen grund til at fastholde den direkte kobling mellem den indre eksponent og den ydre. Wallis kastede sig derfor over kvadraturen $\left(\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{p}}\right)^{q}dx\right)^{-1}$, hvor *p* og *q* er hele tal.

Øvelse 5
Opret et **lister og regneark**-værksted med **p** lodret og **q** vandret som vist:

ISBN 9788770668781

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p\q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0											
3	1											
4	2											
5	3											
6	4											
7	5											
8	6											
9	7											
10	8											
11	9											
12	10											

Opret derefter en celleformel for kvadraturen i celle B2, der trækker på værdierne for *p* og *q*:

$$=\left(\int_0^1\left((1-x^{\frac{1}{\$A2}}\right)^{B\$1}\right)^{-1}$$

Læg mærke til at der er dollartegn foran søjle A og række 1 for at binde cellereferencerne til at hente deres værdier i randen af tabellen! Træk derefter formlen rundt i hele tabellen.
Hvad er konklusionen?

Øvelse 6

I øvelse 1 knyttede vi en af Wallis talfølger til kvadraturen $\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)^p dx\right)^{-1}$: $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{35}{16}, \frac{315}{128}, \ldots$. Hvor kan du finde denne talfølge gemt i Pascals trekant. Kontrollér ved at udvide regnearket fra øvelse 6 passende.

Øvelse 7

I øvelse 2 knyttede vi en anden af Wallis talfølger til kvadraturen $\left(\int_0^1\left(x-x^2\right)^p dx\right)^{-1}$: 1, 6, 30, 140, 630, ...

Find forholdet mellem denne følge og den foregående $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{35}{16}, \frac{315}{128}, \ldots$. Hvad er mønstret? Kan du forklare sammenhængen mellem de to kvadraturer, dvs. hvilken sammenhæng er der mellem de to integraler $\int_0^1\left(1-x^2\right)^p dx$ og $\int_0^1\left(x-x^2\right)^p dx$?

Wallis skæbne:
Årene 1655-56 var Wallis mirakuløse år med opdagelsen af det uendelige produkt for pi samt integralformlen for Pascals trekant. Han forblev en kompetent matematiker, men aldrig så kreativ som i disse år.
Bogen fik en blandet modtagelse: De store matematikere på kontinentet forstod den ikke rigtig: Fermat orkede ikke at læse den igennem og nøjedes med at konstatere at kvadraturerne for potensfunktionerne havde han selv for længst fundet og i øvrigt kunne Wallis tydeligvis ikke engang opstille et rigtigt bevis og slet ikke måle sig med de gamle geometere. Huygens var mere afdæmpet i sin kritik men forstod tydeligvis heller ikke rækkevidden af Wallis arbejde.
Filosoffen Hobbes var bidende i sin kritik af Wallis som han anså for en dilettantisk matematiker. Men Hobbes selv fik en hård medfart af Wallis der ikke forsømte nogen lejlighed til at påpege de mange alvorlige fejlslutninger, der prægede Hobbes eget forsøg på at løse cirklens kvadratur.
Det blev de unge løber, der førte Wallis fakkel videre! Newton læste Wallis som ung i starten af tyverne og det satte en brand i hans sjæl: Hurtigt generaliserede han metoderne og i løbet af det følgende år havde han ikke blot vist integralregningens hovedsætning (at integralregning er det modsatte af differentialregning) men også opstillet en

række slagkraftige teknikker til at integrere udtryk, der gik langt ud over Wallis repertoire. Noget senere læste Euler Wallis og også han udvidede Wallis metoder kraftigt. Men grundlæggende var Newton og Euler ligeså lemfældige med deres beviser som Wallis. Der skulle på flere hundrede år før man for alvor fik styr på grundlaget for analysen. Wallis var den første der så ind i det forjættede land og opdagede at integralregningen kunne kaste lys over mange emner i matematikken, cirklens kvadratur, talfølger og Pascals trekant. Fremtiden tilhørte dem der hørte hans budskab: Geometrien tilhørte fortiden, analysen med symbolsk algebra og differential og integralregning fremtiden: I fremtiden løste man problemer ved at regne på dem!

Et eksempel på et moderne bevis: Med den moderne integralregning fik man ikke blot muligheden for at udregne integraler ved hjælp af stamfunktioner, men når integralregning er det modsatte af differentialregning kunne man også vende regneregler fra differentialregningen om, så de blev tilpasset integralregningen. Det gjaldt især reglen om delvis/partiel integration (som er det omvendte af differentiation af et produkt) og integration ved substitution (som er det omvendte af differentiation af en sammensat funktion).

Øvelse 8:

Se på Wallis integral $I_p = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^p dx$.

Brug potensreglen $(1-x^2)^p = (1-x^2)\cdot(1-x)^{p-1}$ til at vise at der gælder: $I_p = I_{p-1} - \int_0^1 x^2 \cdot (1-x^2)^{p-1} dx$

Brug delvis integration idet integranden omskrives til produktet $1\cdot(1-x^2)^p$, hvor du integrerer 1 og differentierer $(1-x^2)^p$ til at vise at der gælder: $I_p = 2p\cdot\int_0^1 x^2\cdot(1-x^2)^{p-1} dx$.

Kombiner de to resultater til at vise at der gælder sammenhængen: $I_p = \dfrac{2p}{2p+1}\cdot I_{p-1}$.

Sammenhold dette med resultaterne fra side 4!