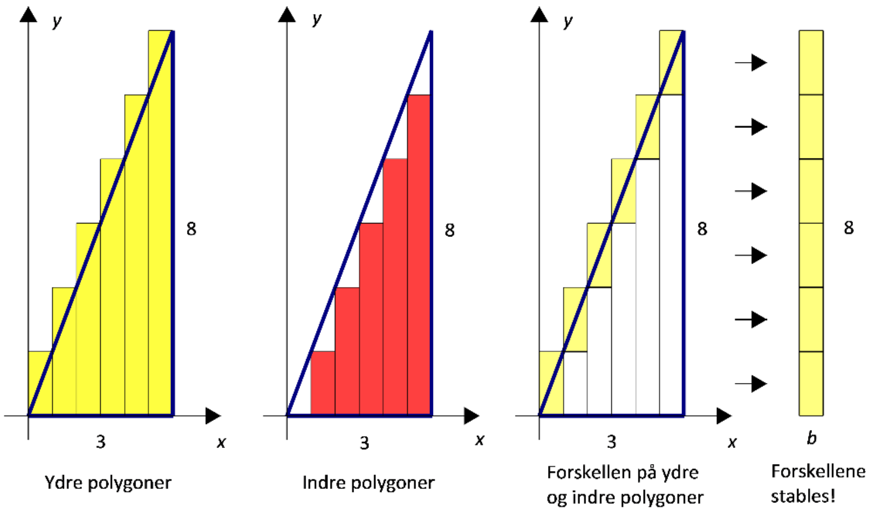
ISBN 9788770668781

Projekt 2.3 Anvendelse af Cavalieris princip i areal- og rumfangsberegninger

Den grundlæggende metode til beregning af arealer af figurer, der er bestemt af krumme kurver, har siden oldtiden være at tilnærme disse med polygoner. Dette kaldte man at lave *kvadratur*. Mest berømt er forsøgene på at løse *cirklens kvadratur*. Det er som bekendt umuligt at løse hvis man kun må anvende passer og lineal. Men hvis opgaven ikke er at studere matematikkens grundlag, men mere praktisk at bestemme arealer og rumfang, så lykkedes det allerede i oldtiden at "kvadrere" mange figurer og at udlede mange af de formler vi kender for arealer og rumfang af pæne, symmetriske figurer som kugler, kegler og pyramider.

Eksempel: Ydre og indre polygoner om en trekant
(*Dette afsnit indeholder materialer fra afsnit 1.2 i kapitel 2 i grundbogen*)
Lad os for bedre at forstå det følgende illustrere, hvordan man i moderne matematik arbejder med følger af ydre og indre polygoner. Vi vælger et meget simpelt eksempel. Vi har givet en retvinklet trekant med *grundlinje* (den ene katete) lig med 3 og *højden* (den anden katete) lig med 8. I dette tilfælde kender vi formlen for arealet og kan udregne dette helt præcist: Det bliver 12. Men hvordan ville vi gøre, hvis vi ikke kendte en formel?
Vi tegner trekanten i et koordinatsystem som vist på illustrationen, og tegner to sæt af smalle høje rektangler af bredde *b*, se illustrationen. Tilsammen udgør disse rektangler dels en indre polygon, dels en ydre.



Øvelse 1
Argumenter nu ud fra tegningen for følgende:
1. Forskellen på den ydre og den indre polygon er summen af de små rektangler
2. Disse små rektangler kan stables, så vi har ét rektangel, hvor højden er lig med trekantens højde på 8.
3. Arealet af dette rektangel er $8 \cdot b$
4. Tegner vi flere og flere rektangler, dvs. lader vi bredden *b* blive mindre og mindre, så vil forskellen nærme sig 0.
5. Arealet af trekanten kan derfor tilnærmes med summen af alle de smalle rektangler.
6. I moderne matematik vil vi sige: Når $b \to 0$, så vil polygonernes areal nærme sig trekantens areal.
7. Udregner vi en række *endelige* summer, fx med 5, 10, 20 eller 100 rektangler, så kan vi måske se et mønster og dermed se, hvilket tal polygonernes areal nærmer sig.

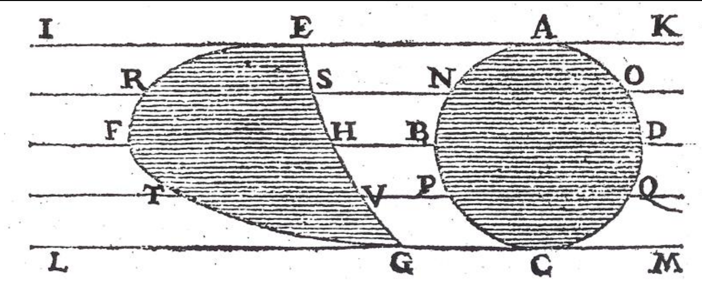
I 1635 udsender den franske matematiker Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) et værk der skulle få afgørende betydning for udviklingen af integralregningen. I stedet for at se på en proces, som $b \to 0$ i ovenstående eksempel, kaster Cavalieri sig ud i uendeligheden og går straks helt til grænsen.

ISBN 9788770668781

Han siger, at trekanten består af uendeligt mange lodrette linjer, der hver for sig ikke har nogen bredde. De er udelelige (”indivisible”). Dette er helt i tråd med Euklid, der sagde, at en linje er længde uden bredde.
Men hvordan får man et areal ud af linjerne? Hvis linjerne bare har en anelse bredde, vil summen af alle linjerne give et uendeligt areal. Og har linjerne ingen bredde kan de ikke bidrage til arealet, så arealet er 0. Men Cavalieri havde alligevel fat i en vigtig pointe:
En uendelig sum af uendeligt små størrelser kan godt give noget endeligt. Matematikken var bare ikke udviklet til at håndtere dette. Han foreslog samme metode til at beregne rumfang, nemlig at se en rumlig figur som en stabel af uendeligt mange planer.


Cavalieri (1598-1647)

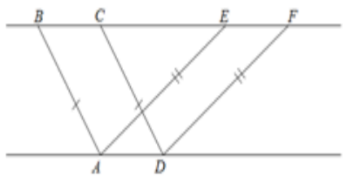
Eksempel: Cavalieris princip
Cavalieri indførte samtidig det princip, der siden er opkaldt efter ham, nemlig at hvis to figurer består af samme linjestykker (eller samme plane stykker), så har de samme areal (eller samme rumfang) uanset linjestykkerne (eller de plane stykker) ligger forskudt. Det kan illustreres dels med hans egen tegning af to plane figurer med samme areal, dels af to rumlige stabler:

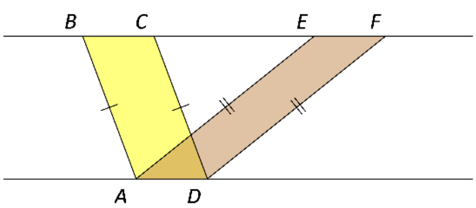


Tegning fra Cavalieris 7-binds værk Geometria indivisibilius continuorum fra 1635: De to figurer har samme areal, da linjerne parvis er lige store.


Illustration af Cavalieris princip i rummet: De to stabler har samme rumfang, da de plane stykker parvis er ens.

Øvelse 2
a) Prøv at anvende Cavalieris princip til at argumentere for, at følgende to parallelogrammer, ABCD og ADEF, har samme areal:



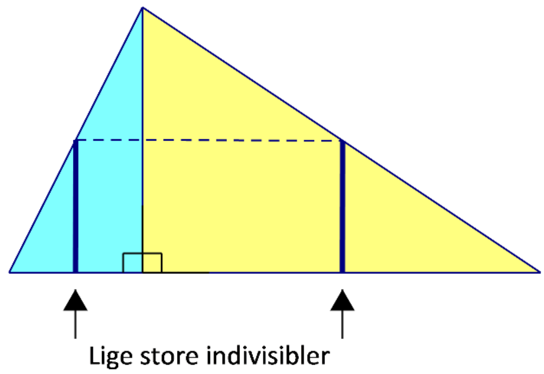


b) I eksemplet med ydre og indre polygoner om en trekant anvendte vi faktisk en metode der svarer til Cavalieris princip. Hvor var det? De to stabler af mønter kan måske give dig en ide.

ISBN 9788770668781

Når man argumenter med uendelige størrelser på denne måde er der mange fælder. Hvis vi forestiller os i teorien, at vi har tegnet alle de udelelige linjer i figurerne ovenfor, hvordan ved vi så at der er "lige mange", så vi kan parre sammen to og to? Fx er der jo lige mange hele tal og lige tal, for vi kan parre 1 med 2, 2 med 4, 3 med 6 osv. Men hvor blev de ulige tal af? Den følgende øvelse rummer et argument mod Cavalieri fra en af hans kritikere.

Øvelse 3
Argumenter ud fra Cavalieris princip for, at den venstre og højre retvinklede trekant har samme areal.



Cavalieris ideer fik især betydning som inspiration for andre matematikere. Ikke mindst den engelske matematiker John Wallis var stærkt inspireret af Cavalieri og overtog fra ham ideen med at dele en punktmængde op i uendeligt mange linjer, og bestemme arealet af punktmængden ved at summere linjernes bidrag. Det redegør han detaljeret for i sit hovedværk *Arithmetica infinitorum* fra 1656. Som titlen angiver kaster også Wallis sig ud i uendeligheden, og i følgende berømte citat fra værket indføres *uendelighedstegnet* for første gang i matematikhistorien:

> *"Som udgangspunkt forestiller jeg mig (i overensstemmelse med Bonaventura Cavalieris Geometri for det udelelige) at enhver plan så at sige er opbygget af et uendeligt antal parallelle linjer. Eller rettere jeg foretrækker at se det som et uendeligt antal parallelogrammer hver med en fælles højde, hvor hver højde kan opfattes som $\frac{1}{\infty}$ af hele højden, dvs. som en uendelig lille del af den samlede højde (hvor vi lader ∞ betegne et uendeligt stort tal), hvorfor den samlede højde af dem alle netop svarer til højden for figuren."*

Rumfang af kegler, pyramider og kugler

Vi kan beregne rumfanget af en række figurer ved en metode, der er beslægtet med den metode Wallis og andre af integralregningens første teoretikere anvendte, og som minder om den metode vi anvendte i afsnit 7.3 til at beregne længder af kurver. Lad os betragte en kegle og placere den i et koordinatsystem, så den ligger ned med 1. aksen som symmetriakse.

Keglens spids ligger i $(0,0)$. Keglens højde kaldes *h*. Keglens bund er en cirkel med en radius på *r* og den skærer 1. aksen i $(h,0)$. I det tværsnit, der ligger i koordinatsystemet, følger kanten af keglen en linje gennem punkterne $(0,0)$ og (h,r). Linjen har ligningen:

$$y=\frac{r}{h}\cdot x$$

'Vi betragter keglen som sammensat af uendeligt mange uendeligt tynde cylinderstykker. Radius i en sådan cylinder er *r* ude, hvor bunden ligger, og i et tilfældigt *x* er radius netop $y=\frac{r}{h}\cdot x$.
Højden af cylinderen kaldes Δx. Så er rumfanget ΔV af det lille cylinderstykke:

$$\Delta V=\pi\cdot \text{radius}^2\cdot\Delta x$$

$$\Delta V=\pi\cdot\left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^2\cdot\Delta x \qquad \text{Indsæt udtrykket for radius}$$

Rumfanget V af keglen er nu summen af alle disse små tynde cylinderskiver. Opfatter vi Δx som et uendeligt lille stykke, vi betegner med dx, så består summen af uendeligt mange bidrag. En sådan uendelig sum udregnes netop som integralet. Dette går vi dybere ind i i kapitel 7, men her får altså følgende resultat:

$$V = \int_0^h \pi \cdot \left(\tfrac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx$$

$$V = \int_0^h \pi \cdot \tfrac{r^2}{h^2} \cdot x^2 \, dx \qquad \text{Udnyt potensregel}$$

$$V = \pi \cdot \tfrac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 \, dx \qquad \text{Udnyt regneregel for integraler}$$

$$V = \pi \cdot \tfrac{r^2}{h^2} \cdot \left[\tfrac{1}{3} \cdot x^3\right]_0^h \qquad \text{Udregn det det bestemte integral}$$

$$V = \pi \cdot \tfrac{r^2}{h^2} \cdot \left(\tfrac{1}{3} \cdot h^3 - \tfrac{1}{3} \cdot 0^3\right) \qquad \text{Udregn det det bestemte integral}$$

$$V = \pi \cdot \tfrac{r^2}{h^2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot h^3 \qquad \text{Reducer}$$

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad \text{Reducer}$$

Dette er formlen for rumfanget af en kegle

Øvelse 4
Bestem rumfanget af en kegle, der har en radius i bunden på 5 og en højde på 20.

Øvelse 5
Anvend samme teknik til at bestemme rumfanget af en pyramide, hvor grundfladen er et kvadrat med sidelængde l og højde h

a) Læg pyramiden vandret, som vi gjorde med keglen. En af pyramidens sidelinjer går fra $(0,0)$ til $\left(h, \tfrac{l}{2}\right)$. Bestem en ligning for denne.

b) Pyramiden opfattes nu som sammensat af tynde kasser med kvadratisk bund med sidelængde lig med $2y$ og højde lig med Δx. Bestem rumfanget af en sådan lille kasse.

c) Når vi opfatter pyramiden som sammensat af uendeligt mange uendeligt tynde kasser med højde dx, så kan summen af alle disse bidrag til pyramidens rumfang opskrives som et integral. Gør det og vis, at pyramidens rumfang bliver:

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h$$

ISBN 9788770668781

Øvelse 6

Anvend samme teknik til at bestemme rumfanget af en kugle med radius 1. Kuglen lægges med centrum i $(0,0)$ og et tværsnit af kuglen ligger så fra -1 til 1 på *x*-aksen.

a) Vis, at halvcirklen i den positive halvplan kan beskrives ved variabelsammenhængen:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

b) Kuglen opfattes nu som sammensat af tynde cylinderstykker med radius lig med *y* og cylinderhøjde lig med Δx . Bestem rumfanget af en sådan lille cylinderskive.

c) Når vi opfatter kuglen som sammensat af uendeligt mange uendeligt tynde cylinderstykker med cylinderhøjde *dx*, så kan summen af alle disse bidrag til kuglens rumfang opskrives som et integral. Gør det og vis, at kuglens rumfang bliver:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi$$

d) Argumenter nu for, at formlen for rumfanget af en kugle med radius *r* er:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

enten ved at genenmføre ovenstående udregninger med radius *r*, eller ved at argumenter ud fra skalering: N radius bliver *r* gange så stor, så bliver arealer ganget op med r^2 og rumgang med r^3 .

Øvelse 7

Bestem rumfanget af en kugle med radius 6.