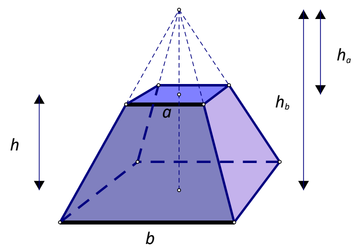
Projekt 2.9 Historisk: Newtons beregning af rumfanget af prismer

1. Moskva papyrussens formel for rumfanget af en pyramidestub.

Ifølge et taleksempel fra Moskvapapyrussen (se projekt 2.21) er rumfanget af en pyramidestub med kvadratiske endeflader givet ved formlen

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)\cdot h$$



hvor a og b er kanterne i endefladerne og h er højden af pyramidestubben. Spørgsmålet er nu dels, hvordan man kan udlede en sådan formel, dels hvordan man kan forstå formlen? Vi bemærker da først at hvis vi bruger formlen for en pyramides rumfang $Volumen = \tfrac{1}{3}\cdot højde\cdot grundflade$ fås

$V = \tfrac{1}{3}\cdot h_b\cdot b^2 - \tfrac{1}{3}\cdot h_a\cdot a^2$	
$= \tfrac{1}{3}\cdot(h+h_a)\cdot b^2 - \tfrac{1}{3}\cdot h_a\cdot a^2$	Vi udnytter at $h_b = h + h_a$
$= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot b^2 + \tfrac{1}{3}\cdot h_a\cdot b^2 - \tfrac{1}{3}\cdot h_a\cdot a^2$	Vi ganger parentesen ud
$= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot b^2 + \tfrac{1}{3}\cdot h_a\cdot\left(b^2 - a^2\right)$	Vi sætter h_a uden for en parentes

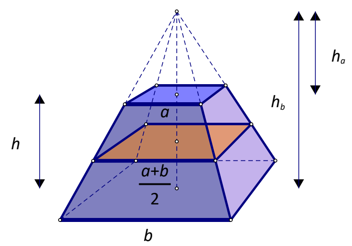
Men af ligedannethed fås nu

$\dfrac{h_a}{h_b} = \dfrac{a}{b}$	
$\dfrac{h_a}{h+h_a} = \dfrac{a}{b}$	Vi udnytter at $h_b = h + h_a$
$h_a\cdot b = h\cdot a + h_a\cdot a$	Vi ganger overkors
$h_a\cdot(b-a) = h\cdot a$	Vi samler leddene med h_a på venstre side
$h_a = \dfrac{a}{b-a}\cdot h$	Vi isolerer h_a

Indsættes det i rumfangsformlen fås netop Moskva papyrussens formel

$V = \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot b^2 + \tfrac{1}{3}\cdot h_a\cdot\left(b^2 - a^2\right)$	
$= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot b^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a}{b-a}\cdot h\cdot\left(b^2 - a^2\right)$	Vi indsætter udtrykket for h_a
$= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot b^2 + \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot a\cdot\dfrac{b^2-a^2}{b-a}$	Vi flytter rundt på faktorerne i sidste led
$= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot b^2 + \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot a\cdot(b+a)$	Vi forkorter brøken ved hjælp af kvadratreglen $b^2 - a^2 = (b+a)\cdot(b-a)$
$= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot b^2 + \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot a\cdot b + \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot a^2$	Vi ganger parentesen ud
$= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)$	Vi sætter $\tfrac{1}{3}\cdot h$ uden for en parentes

Men hvordan skal vi nu tolke denne formel? Den minder om formlen for rumfanget af en pyramide, idet den sidste faktor $a^2 + a\cdot b + b^2$ kan tolkes som et areal. De to yderste led er simple nok: Det er arealet af bundkvadratet henholdsvis arealet af topkvadratet. Men hvordan skal vi forstå det midterste led $a\cdot b$? Her kan man få den ide at kigge på arealet af et tværsnit *midtvejs* i pyramidestubben. Det tilhørende kvadrat har da sidelængden $\dfrac{a+b}{2}$ og dermed arealet $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2\right)$.



Læg mærke til hvordan det begynder at ligne rumfangsformlen for en pyramidestub. Vi giver nu rumfangsformlen lidt massage

ISBN 9788770668781

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot h \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{6} \cdot h \cdot \left(2 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2\right)$$ Vi dividerer med 2 udenfor parentesen og ganger med 2 inde i parentesen.

$$= \tfrac{1}{6} \cdot h \cdot \left(a^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + b^2\right)$$ Vi omformer $2a^2$ til $a^2 + a^2$ og tilsvarende for $2b^2$

$$= \tfrac{1}{6} \cdot h \cdot \left(a^2 + (a+b)^2 + b^2\right)$$ Vi samler de midterste led til kvadratet på en toleddet størrelse

$$= \tfrac{1}{6} \cdot h \cdot \left(a^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot (a+b)^2 + b^2\right)$$ Vi ganger og dividerer det midterste led med 4

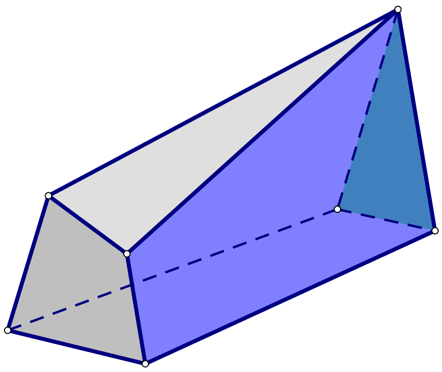
$$= \tfrac{1}{6} \cdot h \cdot \left(A_{\text{top}} + 4 \cdot A_{\text{midt}} + A_{\text{bund}}\right)$$ Vi indsætter formlerne for arealerne

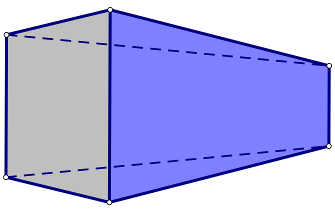
Dette er faktisk Newtons prismatoidformel for en pyramidestub!

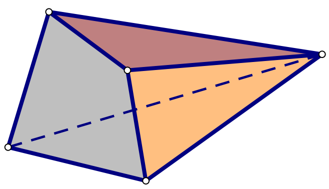
2. Newtons Prismatoidformel

Det er ikke så svært at vise at formlen gælder for en vilkårlig pyramidestub, uanset grundfladens form, og at den også udstrækkes til keglestubbe. Men faktisk gælder den også for fx udsnit af kugler, hvilket vi vender tilbage til, så det er klart at det er en meget omfattende formel. Men præcis hvor omfattede den egentlig var forblev længe uafklaret.

Det første gennembrud skyldes Newton, der fandt en generel formel til udregning af rumfang afgrænset af passende polyedre. Sådanne rumfangsberegninger har stor ingeniørmæssig interesse. Når man fx skal anlægge veje, har man brug for at vide hvor meget jord man skal bortskaffe (eller fremskaffe) og meget ofte kan man modellere udgravningen med en prismatoid, dvs. et polyeder afgrænset af to *parallelle polygoner* som endeflader, hvor polygonerne *ikke* behøver at have samme antal hjørner. Man kan altså tænke på prismatoiden som en 3-dimensional generalisation af et trapez. Prismatoiden har sideflader, hvis kanter forbinder hjørnerne i disse to polygoner. Sidefladerne er altså enten trekanter eller firkanter.

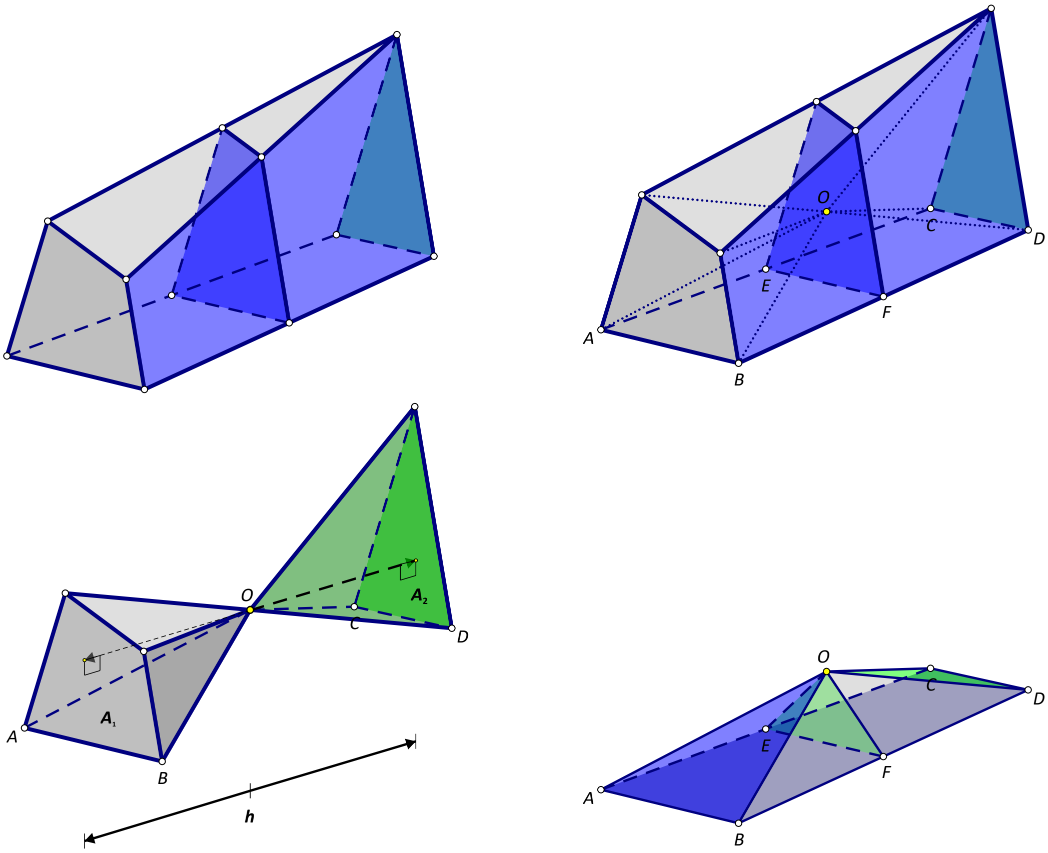






En endeflade kan også udarte til et linjestykke eller et punkt, hvorfor prismatoider omfatter ikke blot prismer, men også kiler, pyramider, pyramidestubbe osv.

Newton fandt rumfanget ved at skære prismatoiden over med en plan midtvejs mellem endefladerne. Derved fås et tværsnit, der selv er en polygon. Vælges et indre punkt *O* i dette midtertværsnit, kan vi spalte prismatoiden i et antal *pyramider* afgrænset af enten endefladerne eller sidefladerne. Newton havde ikke svært ved at finde rumfanget for hver af disse pyramider:



Endefladerne har arealerne A_1 og A_2. De tilhørende højder for pyramiderne udgør den halve højde af prismatoiden. Deres bidrag til rumfanget er derfor givet ved

$$V_1 = \tfrac{1}{3} \cdot A_1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h = \tfrac{1}{6} \cdot A_1 \cdot h \text{ og } V_2 = \tfrac{1}{3} \cdot A_2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h = \tfrac{1}{6} \cdot A_2 \cdot h$$

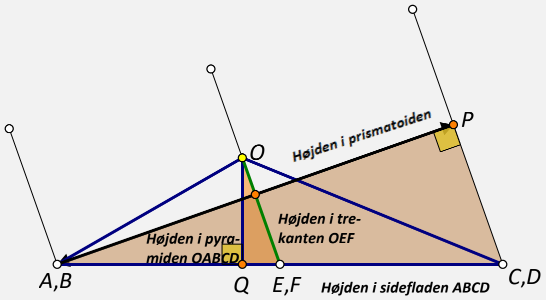
Sidefladerne er lidt mere indviklede. Vi ser på sidefladen *ABCD* som et eksempel. Det er en firkant, men *ikke en vilkårlig firkant*: Det er nødvendigvis et trapez! Trekanten *ABC* udspænder nemlig en plan, der også må indeholde *D*. Men dette plan skærer de to parallelle endeflader i to parallelle snit, dvs. *AB* er parallel med *CD*. Midtvejs mellem de to parallelle kanter *AB* og *CD* finder vi netop grundlinjen i trekanten *OEF*. Grundlinjen *EF* er derfor gennemsnittet af de to kantlængder *AB* og *CD*. Hvis midtertværsnittet *OEF* står vinkelret på sidefladen *ABCD* gælder derfor den følgende snedige omskrivning af rumfanget:

$$\begin{aligned} Volumen[OABCD] &= \tfrac{1}{3} \cdot højde[O - ABCD] \cdot Areal[ABCD] \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot højde[O - ABCD] \cdot h \cdot længde[EF] \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot højde[O - ABCD] \cdot længde[EF] \cdot h \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot Areal[OEF] \cdot h \end{aligned}$$

Men selv om midtertværsnittet står skråt gælder præcis den samme omskrivning stadigvæk på grund af ligedannede trekanter, jfr. følgende øvelse

ISBN 9788770668781

Øvelse 1



Hvis vi ser på prismatoiden fra siden, så de parallelle planer gennem sidefladerne og midtertværsnittet fremstår som rette linjer, fås som vist en plan figur, der indeholder såvel trekantens højde, som pyramidens højde og tilsvarende både afstanden *h* mellem de parallelle sideflader og grundlinjen i sidefladen *ABCD*.

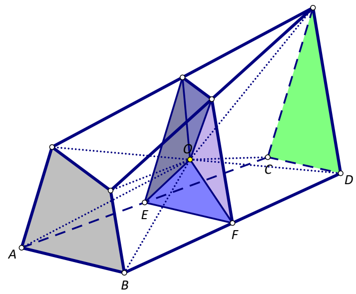
a) Argumentér ud fra ligedannethed at der må gælde $\dfrac{\textit{højde i pyramide}}{\textit{højde i trekant}} = \dfrac{\textit{højde i prismatoid}}{\textit{højde i sideflade}}$

b) Argumentér for at den ovenstående formel for rumfanget $V = \frac{2}{3} \cdot Areal[OEF] \cdot h$ også må gælde selvom midtersnittet *OEF* står skævt på sidefladen *ABCD*.

Sidefladernes bidrag er derfor alt i alt givet ved

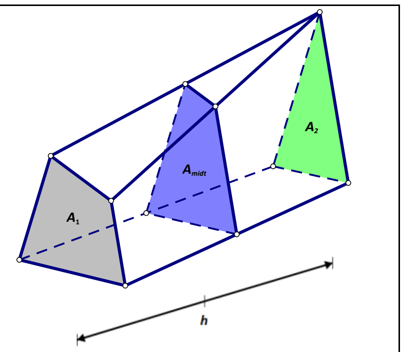
$$\begin{aligned} V_{midt} &= \tfrac{2}{3} \cdot Areal[\triangle OEF] \cdot h + \ldots \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot \left(Areal(\triangle OEF) + \ldots \right) \cdot h \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot A_{midt} \cdot h \end{aligned}$$

Det samlede rumfang er derfor givet ved formlen:

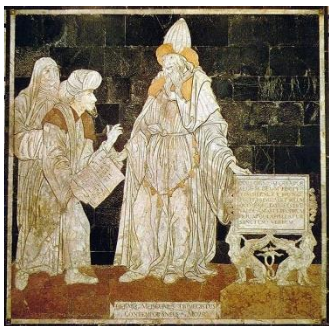


Sætning 2: Newtons Prismatoidformel
Rumfanget af en prismatoid er givet ved

$$V = V_1 + V_{midt} + V_2 = \tfrac{1}{6} \cdot \left(A_1 + 4 \cdot A_{midt} + A_2 \right) \cdot h$$



Newton selv mente i øvrigt ikke der var tale om ny viden men blot om en genopdagelse af en gammel hemmelig viden der gik tilbage til ægyptisk visdom. Newton kendte dog ikke til Moskvapapyrussen, men støttede sine antagelser på en alkymistisk tradition, ifølge hvilken grækerne, hvor fx Thales og Pythagoras havde studeret i Ægypten, havde kendskab til en esoterisk viden om den ægyptiske visdom som antydet i de såkaldte hermetiske skrifter, som Newton var velbevandret i.



Hermes trismegistus, Siena (ca. 1480)

Bemærkning: Prismatoidformel kan også tolkes som at middeltværsnitsarealet er givet ved det vægtede gennemsnit

$$\overline{A} = \tfrac{1}{6} \cdot \left(A_1 + 4 \cdot A_{midt} + A_2 \right)$$

Man skulle nu tro at en så simpel formel ville finde anvendelse alle vegne i ingeniørarbejder mm. hvor man skal vurdere hvor meget jord man skal grave væk, hvor meget tømmer man har fældet osv. Men i praksis er den for indviklet at bruge, netop fordi den kræver kendskab til tværsnitsarealet på midten. I praksis bruger man derfor i stedet den simplere formel

$$V \approx \tfrac{1}{2} \cdot \left(A_1 + A_2\right) \cdot h$$

vel vidende at den i almindelighed er forkert! Til gengæld er den nem at regne på. Skal det være fint slår man så efterfølgende op i en tabel og finder en korrektionsformel for det givne prismatoid. Men da forskellige prismatoider alt efter deres sammensætning har forskellige korrektionsformler er også denne metode ret omstændelig i praksis.

1.3 Simpsons formel

Før matematikværktøjernes tid var det en vigtig del af matematikken at udvikle formler, der kunne lette beregningen af svære problemer – som det fx er at beregne arealer og rumfang. En af disse integralformler, der på et tidspunkt også indgik i gymnasiepensum, er den såkaldte Simpsons formel.

Den version, man lærte i gymnasiet var følgende:

Sætning 3: Simpsons formel
Hvis $f(x)$ er et polynomium af grad højst 2, så er integralet givet ved

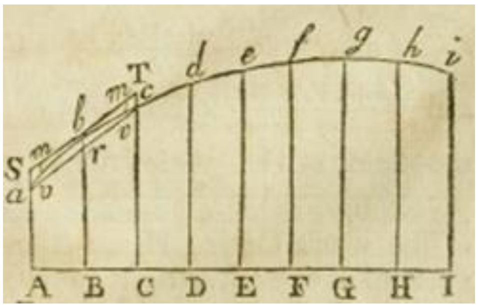
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \tfrac{1}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right) \cdot \left(b - a\right)$$

Formlen findes i Simpsons værk fra 1743, 'Mathematical dissertations on a variety of physical and analytical subjects' (blandede afhandlinger om emner fra fysik og matematik), hvor man også finder hans argumentation for formlen:

Of the AREAS *of* CURVES, &c. *by Approximation.*

PROPOSITION I.

Suppoſing a b c *to be a ſmall Portion of any Curve* a b f i, *and* A a, B b, C c, *three equidiſtant Ordinates; to find an Expreſſion in Terms of thoſe Ordinates, and the common Diſtance* A B, *that ſhall nearly exhibit the included Area* A C c b a A.



Alt dette er behandlet i projekt 7.17 *Historisk: Simpsons formel*.

Øvelse 2.
Argumenter for, at Simpsons formel er et specialtilfælde af Newtons prismatoidformel