ISBN 9788770668781

Projekt 2.21 Ægyptisk matematik - Pyramidestub og cirkelareal

Projektet er delt i to små projekter, der kan laves uafhængigt af hinanden. Der afsættes fx 1-2 timer til vejledning med efterfølgende skriftlig aflevering.

Indhold

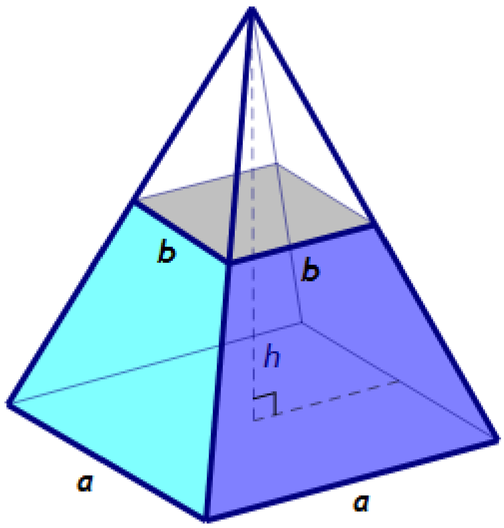
ISBN 9788770668781

Rumfanget af en pyramidestub

Problem nr.14 i Moskvapapyrus handler som nævnt om beregning af rumfanget af en pyramidestub. Vi vil i dette projekt sammenligne deres opskrift med den moderne formel og diskutere, hvordan de kan være nået frem til deres viden.


Moderne metode

Skitsér en pyramide med kvadratisk grundflade som vist nedenfor, hvor sidelængden kaldes *a*, og højden kaldes *h*.



Det følgende bygger på, at vi ved, at rumfanget af en pyramide er:

$$V_{pyramide} = \tfrac{1}{3} h \cdot a^2$$

En pyramidestub er en pyramide, hvor vi stykket *h* oppe har skåret den øverste del af med et vandret snit, således at der her er en ny mindre kvadratisk grundflade. Højden af pyramidestubben er altså *h*. Hvis vi kalder sidelængden i det lille øverste kvadrat for *b*, så gælder der, at rumfanget af en pyramidestub er:

$$V_{stub} = \tfrac{1}{3} h \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Denne formel kan vi få af pyramideformlen på følgende måde (tegn med):

1. Træk linjer lodret ned fra hjørnerne i *b*-kvadratet. Herved får vi en kasse inde i pyramidestubben med grundflade *b* og højde *h*. Rumfanget er: $V_{kasse} = h \cdot b^2$
2. Tegn en skitse af pyramidens bund, hvor *b*-kvadratet er tegnet op inden i *a*-kvadratet. Forlæng alle siderne i *b*-kvadratet ud til pyramidens sider. Dette giver i hvert hjørne af pyramidens bund et lille kvadrat. Argumenter for, at disse har sidelængden:

   $$s = \frac{(a-b)}{2}$$

ISBN 9788770668781

3. Trækkes linjer fra hjørnet i dette lille kvadrat op til det hjørnet på pyramidestubbens øverste flade får vi en (skæv) pyramide. Rumfanget af denne udregnes efter formel 1 med sidelængden s. Argumentér for, at det samlede rumfang af de fire små pyramider bliver: $V_{4skæve} = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{(a-b)^2}{2^2} = \frac{1}{3}\cdot h\cdot(a-b)^2$

4. Den resterende del af rumfanget af pyramidestubbe er de fire halve "kasser" ved hver af pyramidens fire sideflader, med grundflade bestemt af henholdsvis b og $\frac{(a-b)}{2}$, og højde h. Argumenter for at det samlede rumfang af disse fire halve kasser kan beregnes ved: $V_{4halvekasser} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot h\cdot b\cdot\left(\frac{(a-b)}{2}\right) = h\cdot b\cdot(a-b)$

5. Rumfanget af pyramidestubben kan nu bestemmes ved:
$$V_{stub} = V_{kasse} + V_{4skæve} + V_{4halvekasser}$$
Vis, at denne sum netop kan reduceres til den søgte formel.

Ægyptisk metode

Problem 14 i Moskvapapyrus indeholder følgende:

6 høj og grundfladen har siden 4, mens topstykket har siden 2, så skal du kvadrere de 4, det bliver 16; du skal gange de 2 med de 4, det er 8; du skal kvadrere de 2, det er 4. Nu skal du lægge 16, 8 og 4 sammen, det er 28. Nu skal du tage en tredjedel af de 6, det er 2. Du skal gange de 28 med de 2, resultatet er 56. Det er sandelig rumfanget af pyramidestubben!

Kontroller, at denne opskrift giver formlen for en pyramidestub.
Selv om vi kun har en beregning, hvor der udnyttes et taleksempel, så er der generel enighed om, at det er et udtryk for, at de har kendt metoden til at beregne rumfanget af en pyramidestub.

Kommentarer til den ægyptiske beregning

Skitsér en overskåret pyramide med målene fra den ægyptiske tekst, hvor bredden af toppen er netop halvt så stor som bredden af grundfladen.
Hvad må højden have været for den oprindelige pyramide?
En pyramides rumfang er givet ved formlen:
$$V = \tfrac{1}{3}\times G\times h$$
hvor G er grundfladens areal, og h er højden af pyramiden.
Hvad bliver så rumfanget af den oprindelige pyramide, toppen af pyramiden og pyramidestubben?
Hvordan passer det med den ægyptiske formel for pyramidestubbens rumfang?

Hvorfor er formlen for pyramidestubbens rumfang (den ægyptiske formel) smartere end fremgangsmåden beskrevet ovenfor, når man vil finde rumfanget af en pyramidestub?

Arealet af en cirkel

Moderne metode

Omkreds O af en cirkel med radius r beregnes ud fra formlen:
$$O = 2\pi\cdot r$$
Arealet A af en cirkel med radius r beregnes ud fra formlen:
$$A = \pi\cdot r^2$$
π er et såkaldt irrationalt tal, hvor vi skulle have uendeligt mange decimaler med, før det er helt præcis. Det kan vi naturligvis ikke, og derfor er alle beregninger hvor π indgår tilnærmede beregninger.

ISBN 9788770668781

Et eksempel på en sådan tilnærmet beregning af π er tallet $\frac{22}{7}$, der er 3,14285714285714... .
Et sted i Bibelen foretages en udregning af hvor stort et bestemt kar er, hvoraf man kan slutte, at de, der skrev teksten, troede π er 3. Det har fået bestemte kristne fundamentalister til at foreslå, at det bliver vedtaget ved lov, at π er 3.
Lommeregneren og forskellige programmer giver normalt π med op til 13-14 decimaler. Undersøg dit eget værktøj.
I dag kender man π med flere milliarder decimaler, men det er stadig ikke præcis π. De første 30 er:

3,14159265358979323846264338327 9

Ifølge Guiness Rekordbog kan den kinesiske student Lu Chao recitere 67890 cifre af π!

Ægyptisk metode

Problem 50 i Rhind papyrus lyder:

En rund mark har diameteren 9 khet. Hvor stort er arealet? Fjern 1/9 af diameteren, nemlig stykket 1. Resten er 8. Gange 8 med 8, det giver 64. Derfor rummer marken et areal på 64 setat.

Dette er en sproglig beskrivelse som vi kan prøve at udtrykke som formel.
Lad *d* betegne diameteren af en cirkel.
Når vi fjerner 1/9, så får vi resten:

$$(d - \tfrac{d}{9})$$

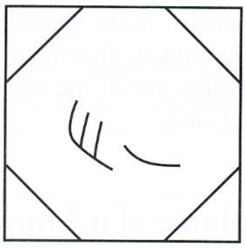
Den ægyptiske formel for arealet af en cirkel med diameter *d* er så:

$$A = (d - \tfrac{d}{9})^2 = (\tfrac{8d}{9})^2$$

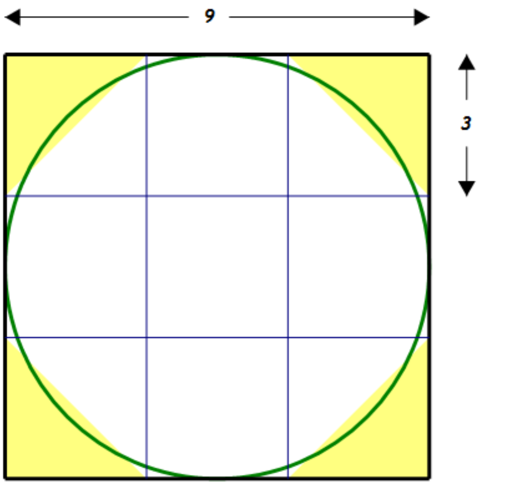
Sammenlign med den moderne formel og angiv den ægyptiske værdi af π.

Kommentarer til den ægyptiske beregning

Vi ved ikke hvordan de kan være nået frem til denne formel, men måske er der en anvisning i et foregående problem, nemlig nr. 48, hvor der er tegnet et kvadrat med de fire hjørner skåret af, så der fremkommer en 8-kant.



Inde i denne figur er skrevet tallet 9, som vi antager, er sidelængden.
Konstruer en figur svarende til den nedenfor, hvor siderne deles i tre og de hjørner, vi skærer af, er små retvinklede trekanter med sidelængder 3.



Vis, at arealet af denne figur er 63.
Det er således en teori, at 8-kanten med areal 63 er opfattet som en første tilnærmelse til cirklen, der er blevet vurderet som en smule større, altså 64.
Bestem cirklen areal ved moderne metoder og sammenlign med grækernes anslåede værdi.