ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 2.20 Integrationsteknik – partialbrøksmetoden

(*Projekt 2.19 og projekt 2.20 har samme generelle introduktion til hvorfor integration er så meget sværere end differentiation*)

Introduktion

Differentiation er en succeshistorie. Har man lært at differentiere alle de simple funktioner og lært de forskellige regneregler for differentiation, specielt sammensat differentiation, kan man differentiere et hvilket som helst udtryk opbygget af simple funktioner.

Med integration forholder det sig helt anderledes. Man kan godt bestemme stamfunktioner til de helt simple funktioner, og som ved differentialregning har vi regnereglerne for sum, differens og konstantfaktor. Men så er festen stort set også slut. Fx findes der ikke generelle metoder til at integrere sammensatte udtryk på formen:

$$\int \sqrt{f(x)}\, dx$$

Man kunne måske mene, at det er overraskende, al den stund at de to regningsarter: *Differentiation* og *Integration* er "modsatte regningsarter". Dette er godt nok ikke en helt præcis formulering, men udtrykker dog en dyb sammenhæng. Differentialoperatoren virker som navnet siger på mængden af *differentiable funktioner*. Integraloperatoren virker på mængden af kontinuerte funktioner, som vi har bevist i HEM3, kapitel 2, afsnit 4 og i kapitel 7, afsnit 2.4. og det er to meget forskellige mængder – der er langt flere kontinuerte funktioner end differentiable funktioner. Men alligevel: Hvis vi først integrerer en kontinuert funktion *f*, og dernæst differentierer $\int f(x)dx$, så er vi tilbage ved $f(x)$. Hvis omvendt *g* er en differentiabel funktion, og vi først differentierer den, og dernæst integrerer den afledede $\int g'(x)dx$,så er vi normalt ikke tilbage ved $g(x)$. Men "tæt ved" – der er blot en konstant til forskel.

Det virkeligt overraskende i denne sammenhæng er, at de to operationer faktisk ophæver hinanden – Evt. pånær en konstant. Det er overraskende pga. deres helt forskellige udgangspunkt. *Differentiation* drejede sig fra starten af om at bestemme tangenter, tangentligninger og hældningskoefficienter. Det var i 1600-tallet før Newtons og Leibniz tid. Integration drejede fra starten af om at bestemme arealer. Den oprindelse er overleveret i selve integraltegnet, som Leibniz indførte som et symbol for en uendelig sum af uendeligt små størrelse. Og at de to operationer – At bestemme tangentligninger og At udregne arealer – har noget med hinanden at gøre er ikke oplagt.

Det overraskende heri bliver ofte glemt i den måde integralregning indføres på idag, nemlig ud fra stamfunktioner. Ud fra den definition er det jo indlysende, at differentiation og integration er modsatte operationer. Det overraskende ligger her gemt i det, vi kalder *Analysens fundamentalsætning* nemlig at stamfunktioner kan anvendes til at bestemme arealer. I mange beviser for denne sætning bliver det overraskende i sammenhængen gemt i en påstand, der kræver et bevis: Påstanden om at området under grafen for en kontinuert funktion har et areal. Og dette er slet ikke indlysende, men kræver et lidt kompliceret bevis, som kan findes i HEM3, kapitel 7, afsnit 2.4.

I virkeligheden er matematik fyldt med eksempler på, at en funktion har en omvendt funktion, der er langt mere kompleks, end den vi startede med:

- *Division* med fx trecifrede tal er betydeligt vanskeligere end *multiplikation* med trecifrede tal.
- At skrive et stort tal som produkt af *primtalsfaktorer* er betydeligt vanskeligere end at gange primtal sammen og udregne et stort tal.
- At bestemme en forskrift ud fra en graf er betydeligt vanskeligere, end at tegne en graf ud fra en forskrift.

Og integration er betydeligt vanskeligere end differentiation! Med værktøjsprogrammerne kan man indvende, at der ingen forskel er i kompleksiteten. Men har man blot lidt erfaring med at integrere på et værktøj, vil man både have stødt på eksempler, der er vildt mærkelige, og på tilfælde, hvor maskinen giver op. Det sker ikke når man differentierer. Vi vil gerne forstå, hvad der sker her. Hvorfor giver maskinen op? Og hvorfor svarer den med så mærkeligt et

ISBN 9788770668781

udtryk? Derfor: I en stor del af projektet lægger vi det matematiske værktøjsprogram til side for bedre at forstå, hvad der ligger bag værktøjernes algoritmer.

Differentiation af de elementære funktioner og regneregler for differentiation

Vi vil i det følgende tage udgangspunkt i, at integration betyder at bestemme en stamfunktion. Det er normalt let at kontrollere, om vi har løst opgaven korrekt: Man anvender *integrationsprøven*, dvs man differentierer det fundne ubestemte integral og ser, om man får integranden (den funktion man startede med). Derfor skal vi kende alle de elementære differentialkvotienter og regneregler, vi har lært.
Løb oversigten her igennem og vær sikker på, at du har styr på det.

Type	**Funktionsudtryk,** $f(x)$	**Afledet funktion,** $f'(x)$
Polynomier	$f(x)=k$ (k er en konstant)	$f'(x)=0$
	$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
	$f(x)=ax^2+bx+c$	$f'(x)=2ax+b$
	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
Logaritmefunktioner og eksponentialfunktioner	$f(x)=\ln(x),\ \ x>0$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
	$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
	$f(x)=\mathrm{e}^{k\cdot x}$	$f'(x)=k\cdot\mathrm{e}^{k\cdot x}$
	$f(x)=a^x$	$f'(x)=\ln(a)\cdot a^x$
Potensfunktioner	$f(x)=x^a\ ,\ \ x>0$	$f'(x)=a\cdot x^{a-1}$
	$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1},\ \ x\neq 0$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$
	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ \ x>0$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	$f(x)=\cos(x)$	$f(x)'=-\sin(x)$
	$f(x)=\sin(x)$	$f(x)'=\cos(x)$
	$y=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ \ x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$	$y'=\left(\tan(x)\right)'=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$
Regneregler	$y=k\cdot f(x)$	$y'=k\cdot f'(x)$
	$y=f(x)+g(x)$	$y'=f'(x)+g'(x)$
	$y=f(x)-g(x)$	$y'=f'(x)-g'(x)$
	$y=f(a\cdot x+b)$	$y'=a\cdot f'(a\cdot x+b)$
	$s(x)=f(g(x))$	$s'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$
	$y=f(x)\cdot g(x)$	$y'=(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
	$y=\frac{f(x)}{g(x)},\ \ g(x)\neq 0$	$y'=\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

ISBN 9788770668781

De to gulede formler mangler normalt i sådan en oversigt, da de ikke er en del af pensum idag. Men de er nyttige at have ved hånden i det følgende. Formlerne er vist i HEM2, projekt 5.8.

Integration ved substitution udvider dramatisk mængden af funktioner, vi kan integrere

Ud fra ovenstående tabel kunne vi opstille en tilsvarende over integration af de elementære funktioner. En sådan tabel findes i de fleste lærebøger – i HEM3 findes den på side 99. Den indgår også i formelsamlingen til stx studentereksamen.

Øvelse 2: Integration af de elementære funktioner
Prøv selv, uden at slå op, at opstille en tabel over integration af de elementære funktioner.

Men havde vi kun adgang til disse tabeller ovenfor, var vi ilde stedt. Det er sjældent vi får funktioner serveret i en så ren form. Hvad med følgende integraler:

a) $\int \frac{1}{x+3} dx$ b) $\int \sin(5x+7) dx$ c) $\int (2x-3)^7 dx$ d) $\int \frac{3}{x} dx$ e) $\int 4 \cdot e^{0.2x-1} dx$

De klares forholdsvis let ved brug af *regnereglerne* for integration:
Reglen om *konstantfaktor* tager vi i brug som det første ved d) og e), hvor 3 og 4 sættes udenfor integraltegnet.
Reglen om *integration ved substitution* anvendes ved alle 5, fx ved b)

Eksempel: Integration ved substitution af $\int \sin(5x+7) dx$

Vi definerer den nye variabel:	$t = 5x+7$
Vi udregner differentialerne:	$dt = 5dx$, hvoraf: $dx = \frac{1}{5} dt$
Vi substituerer:	$\int \sin(5x+7) dx = \int \sin(t) \cdot \frac{1}{5} dt, \quad t = 5x+7$
Vi udregner det nye integral:	$\int \sin(t) \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \cdot \int \sin(t) dt = \frac{1}{5} \cdot (-\cos(t)) = -\frac{1}{5} \cdot \cos(t)$
Vi substituerer tilbage:	$-\frac{1}{5} \cdot \cos(t) = -\frac{1}{5} \cdot \cos(5x+7)$

Konklusion:

$$\int \sin(5x+7) dx = -\frac{1}{5} \cdot \cos(5x+7)$$

Øvelse 3: Integration ved substitution
Bestem de øvrige 4 integraler ved substitution. Regn selv i hånden og brug værktøjsprogrammet som facitliste.

Man lærer hurtigt at løse sådanne integraler "i hovedet". Og selvfølgelig er der også meget mere komplicerede integraler, der kan løses med substitution. Men der er også mange, der ikke kan. Se på følgende:

a) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ b) $\int \frac{1}{x^2-x-6} dx$ c) $\int \sqrt{e^x}\, dx$ d) $\int \sqrt{\ln(x)}\, dx$

e) $\int \frac{1}{x^3-2x^2-5x+6} dx$ f) $\int \sqrt{(x^2-x-6)}\, dx$ g) $\int \sqrt{\sin(x)}\, dx$ h) $\int \frac{x+5}{x^2-x+6} dx$

Øvelse 4: Integraler på værktøjsprogrammet
a) Prøv at bestemme de 8 integraler med dit værktøjsprogram.

b) Der er ét af disse integraler, du faktisk kan løse med det du allerede har lært. Kan du se hvilket? (*Hint: Du skal yderligere bruge dit kendskab til potensreglerne*).
c) Der er ét af integralerne, hvor værktøjsprogrammerne giver op. Hvilket?

Men de fleste af integralerne kan et værktøjsprogram faktisk klare. Der er flere ting, der springer i øjnene, når vi ser på løsningen til disse 8 integraler.

- Vi møder funktionstyper, vi aldrig har hørt om før. Det er jo spændende, ikke mindst, hvis man tror vi har mødt det meste inden for funktionernes verden. Det er fx tilfældet i g), hvor der kommer såkaldte elliptiske integraler på banen. Vi har flere steder i Hvad er matematik? mødt tilsvarende nye familier af funktioner. Fx har vi i HEM3, kapitel 7 i den indledende fortælling mødt *Fresnel-funktioner*, som opstår ud af analysen af motorvejsudfletninger. Vi vil lade dette hvile her og koncentrere os om de næste to:
- I disse integraler og tilsvarende, man selv kunne prøve at opstille, optræder hyppigt arcsin, arccos og arctan, der er de omvendte funktioner til sin, cos og tan. Hvad har de trigonometriske funktioner at gøre med polynomielle udtryk, som vi jo startede med? Det ser vi nærmere på i projekt 2.19, hvor vi dykker ned i begrebet *omvendt substitution*.
- Mens der ikke ser ud til at være noget overordnet mønster i integraler af typen $\int \sqrt{f(x)}\, dx$, så er der måske et mønster i integraler af polynomiumsbrøker. Det ser vi nærmere på nedenfor.

Polynomiumsbrøker og partialbrøks-metoden

Lad os først se nærmere på de tre polynomiumsbrøker i eksemplerne ovenfor. I Øvelse 4 anvendte vi et værktøjsprogram og fik:

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-6}\,dx = -\frac{\ln(x+2)}{5}+\frac{\ln(x-3)}{5}$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx = \frac{\ln(x-3)}{10}-\frac{\ln(x-1)}{6}+\frac{\ln(x+2)}{15}$

h) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-x+6}\,dx = \frac{\ln(x^2-x+6)}{2}+\frac{11}{\sqrt{23}}\cdot \arctan\left(\frac{(2\cdot x-1)}{\sqrt{23}}\right)$, (*bemærk:* $\frac{\sqrt{23}}{23}=\frac{1}{\sqrt{23}}$)

Vi lægger selvfølgelig mærke til, at ln indgår i stort omfang. Hvad er forklaringen på det? Vi ved, at der er en sammenhæng mellem de simpleste polynomiumsbrøker og ln, som fx undersøgt i forlængelse af øvelse 2:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+3}\,dx &= \int \frac{1}{t}dt,\ \ t=x+3\\ &=\ln(t),\ \ t=x+3\\ &=\ln(x+3)\end{aligned}$$

Kunne vi substituere eller omskrive et udtryk som $\frac{1}{x^2-x-6}$, således at vi havde førstegradspolynomier, så kan vi åbenbart håndtere det. Vi har (måske) en vis erfaring med at addere brøker med forskellige nævnere: Vi finder en fælles nævner og sætter på fælles brøkstreg. Det gælde for tal og for symbolske udtryk:

- Fælles nævner for $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{7}$ er $5\cdot 7$. Vi adderer derfor således: $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{1\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{5\cdot 1}{5\cdot 7}=\frac{7}{35}+\frac{5}{35}=\frac{12}{35}$. Læst baglæns, betyder det også, at $\frac{12}{35}$ kan skrives som en sum af 5.-dele og 7.-dele. Hvor kom 5 og 7 fra? Ud fra *faktoriseringen* af $35=5\cdot 7$

- Fællesnævner for $\frac{1}{x+3}$ og $\frac{1}{x-5}$ er $(x+3)\cdot(x-5)$. Vi adderer derfor således: $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-5}=\frac{1\cdot(x-5)}{(x+3)\cdot(x-5)}+\frac{(x+3)\cdot 1}{(x+3)\cdot(x-5)}=\frac{x-5}{x^2-2x-15}+\frac{x+3}{x^2-2x-15}=\frac{x-5+x+3}{x^2-2x-15}=\frac{2x-2}{x^2-2x-15}$. Det betyder også, at $\frac{2x-2}{x^2-2x-15}$ kan skrives som en sum af $(x+3)$'te dele og $(x-5)$'te dele. Dvs som en sum af et tal ganget på $\frac{1}{x+3}$ og et andet tal ganget på $\frac{1}{x-5}$. Her var disse tal bare et-taller, men det var fordi vi startede med dem. Hvor kom $(x+3)$ og $(x-5)$ fra? Ud fra faktoriseringen: $x^2-2x-15=(x+3)\cdot(x-5)$

Læg mærke til, at faktoriseringen også fortæller, at tallene -3 og 5 er *rødder* i andengradspolynomiet! Det kan ses af løsningsformlen, men det ses lettest af nulreglen:

$$x^2-2x-15=0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-5)=0 \Leftrightarrow (x+3)=0 \;\; eller \;\; (x-5)=0,$$

hvoraf vi ser, at andengradspolynomiet har rødderne $x=-3,\ x=5$

Når man har lært substitution, er det let at se, at integralet af $\frac{2x-2}{x^2-2x-15}$ kan klares med en simpel substitution: $t=2x-2$. Men nu var det jo heller ikke dette integral, der nærmest er konstrueret til at blive løst med substitution. Det var integralet af $\frac{1}{x^2-2x-15}$. Kan vi også klare det?

Vi har stadig faktoriseringen: $x^2-2x-15=(x+3)\cdot(x-5)$, så det er nærliggende at undersøge, om også dette kan skrives som en sum af et tal ganget på $\frac{1}{x+3}$ og et andet tal ganget på $\frac{1}{x-5}$. Dvs. findes der tal *a* og *b* så:

$$\frac{1}{x^2-2x-15}=a\cdot\frac{1}{x+3}+b\cdot\frac{1}{x-5}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-5}$$

Vi sætter højre side på fælles brøkstreg:

$$\frac{1}{x^2-2x-15}=\frac{a\cdot(x-5)}{(x+3)\cdot(x-5)}+\frac{b\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-5)}$$

$$\frac{1}{x^2-2x-15}=\frac{a\cdot x-5a}{x^2-2x-15}+\frac{b\cdot x+3b}{x^2-2x-15}$$

$$\frac{1}{x^2-2x-15}=\frac{a\cdot x-5a+bx+3b}{x^2-2x-15}$$

$$\frac{1}{x^2-2x-15}=\frac{(a+b)\cdot x-5a+3b}{x^2-2x-15}$$

(*Vi har flere steder udnyttet, at faktorernes orden er ligegyldig, eller sagt med algebra-sprog: multiplikation er kommutativ* - $4\cdot 7=7\cdot 4$)

Når de to brøker er ens, må tælleren være lig med 1:

$$(a+b)\cdot x-5a+3b=1$$

$$(a+b)\cdot x-5a+3b=0\cdot x+1$$

Her står, at to førstegradspolynomier er ens. Betragter vi det grafisk som, lineære funktioner, er det klart, at så må både hældningskoefficienter og konstantled være ens, dvs.:

$$a+b=0 \;\; og \;\; -5a+3b=1$$

Øvelse 5

Løs de to ligninger med to ubekendte i hånden.

Du skal få: $a=-\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{8}$

Konklusion: $\frac{1}{x^2-2x-15}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-5}$

ISBN 9788770668781

Øvelse 6: Integralet af en polynomiumsbrøk

a) Vis nu, at $\int \frac{1}{x^2-2x-15}dx = -\frac{\ln(x+3)}{8}+\frac{\ln(x-5)}{8}$

Det er den teknik, der her er demonstreret til løsning af integraler af visse polynomiumsbrøker, der kaldes for partialbrøks-metoden. Det var en vigtig teknik at kunne beherske før værktøjernes tid. Idag giver den først og fremmest en større indsigt i de resultater, som værktøjerne giver.

Øvelse 7: Definitionsmængden

Det er klart, at vi har problemer med definitionsmængden her. Dels har andengradspolynomiet to rødder, hvor vi ville komme til at dividerer med 0. Og dels ved vi, at funktionen ln kun er defineret for positive værdier. Det problem løser vi, ved at dele op i intervaller adskilt af nulpunkterne. Først ser vi på det mest simple tilfælde:

a) Argumenter for, at

For $x<0$ gælder $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x)$

(*hint*: Du kan enten foretage en substitution $t=-x$, eller du kan blot anvende integrationsprøven)

b) Argumenter for, at vi kan skrive:

For $x \neq 0$ gælder der: $\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|)$

c) Tegn en fortegnslinje for andengradspolynomiet $x^2-2x-15$, dvs marker på en tallinje, hvor funktionsværdierne er negative, hvor de er 0 og hvor de er positive.

d) Opskriv nu løsningen fra øvelse 6 opdelt på de tre fortegns-intervaller og uden brug af numerisk tegn.

e) Opskriv løsningen med brug af numerisk tegn.

Øvelse 8

Bestem følgende integraler med partialbrøksmetoden:

a) $\int \frac{1}{x^2-x-6}\,dx$

b) $\int \frac{5}{2x^2-3x-2}\,dx$

(*Hint til b:* Bestem først rødder i polynomiet og faktorisér det. Du kan herefter vælge at skrive faktoriseringen på formen $c\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, men det er ikke sværere at partialbrøksopsplitte faktorer, hvor koefficienten foran x er et tal forskelligt fra 1. I de afsluttende integraler skal man huske at anvende en substitution)

Indtil nu har vi se på polynomiumsbrøker, hvor tælleren blot er et reelt tal. Men hvad nu hvis opgaven er at bestemme følgende integral:

$$\int \frac{x+2}{x^2-x-6}\,dx$$

Hvis vi lige "glemmer", hvad vi har lært om partialbrøker, og alene trækker på de gængse regler, så vil vi givetvis her tænke i baner som substitution. Godt nok passer det ikke perfekt, men det ligner:

Lad os prøve at sætte $t=x^2-x-6$. Så er $dt=(2x-1)dx$.

Det er ikke lige det, som står i tælleren. Men vi kan komme i nærheden, ved at foretage nogle omskrivninger:

$$\begin{aligned} x+2 &= \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(x+2) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(2x+4) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(2x-1+1+4) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(2x-1+5) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(2x-1)+\tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

ISBN 9788770668781

Lad os prøve at sætte dette ind i integralet:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-x-6}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-1)+\frac{5}{2}}{x^2-x-6}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{(2x-1)}{x^2-x-6}+\frac{\frac{5}{2}}{x^2-x-6}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{(2x-1)}{x^2-x-6}\,dx+\tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{\frac{5}{2}}{x^2-x-6}\,dx\end{aligned}$$

Læg mærke til, at den type omskrivninger vi foretog ovenfor altid kan gennemføres, når tæller er førstegrads og nævner andengradspolynomier.

Men hvad så herfra?

Det første integral klares nu med en substitution: $t=x^2-x-6$, $dt=(2x-1)dx$, så vi får:

$$\int \frac{(2x-1)}{x^2-x-6}\,dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln(t)=\ln(x^2-x-6)$$

Det andet integral har vi klaret i øvelse 8:

$$\int \frac{1}{x^2-x-6}\,dx=-\frac{\ln(x+2)}{5}+\frac{\ln(x-3)}{5}\,,$$

så samlet får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-x-6}\,dx &= \tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{(2x-1)}{x^2-x-6}\,dx+\tfrac{1}{2}\cdot\int \frac{\frac{5}{2}}{x^2-x-6}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\ln(x^2-x-6)+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\cdot\left(-\frac{\ln(x+2)}{5}+\frac{\ln(x-3)}{5}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\ln(x^2-x-6)+\tfrac{1}{4}\cdot\left(-\ln(x+2)+\ln(x-3)\right)\end{aligned}$$

Øvelse 9

Gør nøje rede for alle omskrivninger, der førte frem til den sidste konklusion

Øvelse 10

Bestem følgende integraler

a) $\displaystyle\int \frac{-3x+1}{2x^2-3x-2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{0.5x^2-3x+7}\,dx$

Polynomier af højere orden

Hvad gør man med polynomier af højere orden? Hvis dette har reelle rødder, kan man igen faktorisere. vis fx et tredjegradspolynomium har tre reelle rødder kan man skrive det som et produkt af førstegradspolynomier, helt på samme vis som for andengradspolynomier.

Eksempel. Faktorisere tredjegradspolynomier

Betragt polynomiet $p(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Tegnes grafen man indtryk af, at der er rødder i -2, 1 og 3. Ved at gøre prøve, kan man se, at det stemmer.

Man kunne også bestemme rødder ved at anvende en solve-kommando, og bestemme disse tre rødder.

Endelig kunne man anvende en særlig regel, der er et særtilfælde af "Eisensteins sætning", og som siger, at hvis der er heltallige rødder i et polynomium med koefficienten 1 til den højeste potens, så vil en sådan rod gå op i konstantleddet, som her er 6. De mulige rødder er derfor $\pm1,\pm2,\pm3$ *og* ±6 . Ved at gøre prøve finder man de tre nævnte.

Så gælder det for tredjegrads som for andengradspolynomier, at vi kan faktorisere:

$$x^3-2x^2-5x+6=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$$

(*Bemærk: Mange programmer har indbyggede værktøjer, der klarer faktoriseringen med en enkelt kommando. Fx kan man i Maple blot skrive* $factor\left(x^3-2x^2-5x+6\right)$, *og programmet vil svare med faktoriseringen.*)

Kan man nu foretage samme opsplitning i partialbrøker som med andengradspolynomier? Dvs. kan man skrive:

$$\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-3}\,,\ \text{(naturligvis med } x\neq -2, 1, 3\text{)}$$

Det kan man, det er et lidt større arbejde, men grundlæggende det samme: At sætte på fælles brøkstreg.

Øvelse 11

(*Vi vil i det følgende ikke hver gang gøre opmærksom på definitionsmængder – det vil forløbe ligesom i øvelse 7*)

a) Gennemfør arbejdet med at sætte på fælles brøkstreg, og vis:

$$\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}=\frac{(a+b+c)\cdot x^2+(c-b-4a)\cdot x+(3a-6b-2c)}{x^3-2x^2-5x+6}$$

b) Den første tæller kan også opfattes som et andengradspolynomium, nemlig $0\cdot x^2+0\cdot x+1$. To andengradspolynomier er ens, når koefficienterne er ens, så vi får ligningssystemet:

$$\begin{aligned} a+b+c&=0\\ c-b-4a&=0\\ 3a-6b-2c&=1 \end{aligned}$$

Løs dette ligningssystem i hånden, fx ved at anvende ligning 1 og ligning 2 til at skaffe *b* af vejen, og ligeledes anvende ligning 1 og ligning 3 til at skaffe *b* af vejen. Så har du to ligninger med de to ubekendte *a* og *c*. Løs så dette system, og anvend løsningerne til at bestemme *b* fx ud fra den første ligning, $a+b+c=0$

Du skal i sidste ende få: $a=\frac{1}{15}$, $b=-\frac{1}{6}$, $c=\frac{1}{10}$

c) Argumenter for, at vi nu har vist:

$$\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}=a\cdot\frac{1}{x+2}+b\cdot\frac{1}{x-1}+c\cdot\frac{1}{x-3}=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x+2}+\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-3}$$

d) Vis nu, at

$$\int\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx=\frac{\ln(x-3)}{10}-\frac{\ln(x-1)}{6}+\frac{\ln(x+2)}{15}$$

eller helt korrekt, når vi tager hensyn til definitionsmængden:

$$\int\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}\,dx=\frac{\ln|x-3|}{10}-\frac{\ln|x-1|}{6}+\frac{\ln|x+2|}{15},\ x\neq -2, 1, 3$$

Øvelse 12

Bestem integralet:

$$\int\frac{1}{x^3+4x^2-5x}\,dx$$

Alle polynomier ovenfor har haft rødder, så vi kunne faktorisere. Det er jo ikke nær altid tilfældet. Hvad gør vi så?

Anvendelse af algebraens fundamentalsætning.

Hvis vi arbejder i de komplekse tal, så har alle polynomier rødder. Et andengradspolynomium har altid 2 rødder (evt. er der en dobbeltrod), tredjegradspolynomier har altid 3 rødder (evt. er der en dobbelt eller en trippelrod). Det er ret svært at forestille sig grafer i denne verden, da det kræver et 4 dimensionalt koordinatsystem. Men det kan man bevise. Det kaldes algebraens fundamentalsætning. Det betyder, at hvis vi også udvidede definitionen af den naturlige logaritmefunktion til komplekse tal, så ville alle integraler af formen

$$\int \frac{1}{p(x)}\,dx$$

kunne løses og udtrykkes som en sum af logaritmefunktioner, som vi så ovenfor.

Men der gælder mere end det: Hvis et kompleks tal som $1+2i$ er en rod i polynomiet $p(x)$, så er også tallet $1-2i$ en rod, hvor *i* er den såkaldte imaginære enhed, der opfylder $i^2=-1$. Man skriver af og til dette tal som: $i=\sqrt{-1}$.
Det betyder, at i faktoriseringen af $p(x)$ indgår både

$$(x-(1+i)) \text{ og } (x-(1-i)),\ \text{så vi har:} \quad p(x)=\ldots(x-(1+i))\cdot(x-(1-i))\ldots \qquad (*)$$

Hvis vi nu ganger de to parenteser sammen, får vi:

$$\begin{aligned}(x-(1+i))\cdot(x-(1-i)) &= ((x-1)-i)\cdot((x-1)+i)\\ &= (x-1)^2-i^2\\ &= (x^2-2x+1-(-1))\\ &= (x^2-2x+2)\end{aligned}$$

Vi bemærker, at dette andengradspolynomium naturligvis ikke har reelle rødder, da det jo har rødderne $1+2i$ og $1-2i$. Vi kan også se, at diskriminanten er -4.

Men ved at gange de to parenteser sammen, bliver (*) til:

$$p(x)=\ldots(x^2-2x+2)\ldots$$

hvor prikkerne står for faktorer af typen $(x-\alpha)$, hvor α er rod i polynomiet.
Enten er α er et almindeligt reelt tal eller et komplekst tal. Og er det et komplekst tal kan det åbenbart parres sammen med et andet og resultere i et andengradspolynomium. Det betyder følgende:

Sætning. Faktorisering af polynomier
Lad $p(x)$ være et vilkårligt polynomium. Så kan $p(x)$ faktoriseres i et produkt af førstegradpolynomier samt andengradspolynomier med negativ diskriminant.

Vi så ovenfor i øvelse 9, at hvis et tredjegradspolynomium $p(x)$, er faktoriseret, så kan vi foretage en partialbrøksopsplitning af $\frac{1}{p(x)}$. Det samme er tilfældet med polynomier af højere grad, der er faktoriseret, og med samme teknik. Det bliver naturligvis noget mere heftige udregninger, hvor man i praksis vil tage værktøjsprogrammer i brug.

Hvis polynomiet $p(x)$ som ovenfor indeholder faktoren (x^2-2x+2), så vil partialbrøksopsplitningen af $\frac{1}{p(x)}$ indeholde et led af typen $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2-2x+2)}$.

Det udestående problem mht integration af polynomiumsbrøker er nu at bestemme integraler af typen:

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx,\ \text{hvor diskriminanten er negativ.}$$

Eksempel: Når polynomiet i nævneren har negativ diskriminant.
Lad os som eksempel se på:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}\,dx$$

Vi anvender først den teknik, vi gennemgik i optakten til øvelse 9:
Udgangspunktet er, at vi vil forsøge med en substitution: $t=x^2-2x+5$, og dermed $dt=(2x-2)dx$.
Det sidste udtryk begrunder de følgende omskrivninger:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2-2x+5}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x-2+8}{x^2-2x+5}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{8}{x^2-2x+5}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+\tfrac{1}{2}\int \frac{8}{x^2-2x+5}dx\end{aligned}$$

Det første integral klares nu med substitutionen: $t=x^2-2x+5,\quad dt=(2x-2)dx$

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx=\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t}dx=\tfrac{1}{2}\ln(t)=\tfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)$$

Det andet integral kan jo ikke partialbrøksopsplittes. Vi prøver i stedet at udnytte vores viden om differentiation af de omvendte trigonometriske funktioner, specielt:

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

(Dette er vist i projekt 2.22 om *omvendt substitution*)

Vi omskriver nævneren med den samme teknik som anvendes ved cirkelomskrivninger:

$$\begin{aligned}x^2-2x+5 &= (x-1)^2-1+5 \\ &= (x-1)^2+4 \\ &= 4\cdot\left(\tfrac{1}{4}\cdot(x-1)^2+1\right) \\ &= 4\cdot\left((\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2})^2+1\right)\end{aligned}$$

Gør selv omhygeligt rede for hvert trin i omskrivningen!

Vi indsætter:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int \frac{8}{x^2-2x+5}dx &= \tfrac{1}{2}\int \frac{8}{4\cdot\left((\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2})^2+1\right)}dx \\ &= \int \frac{1}{\left((\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2})^2+1\right)}dx\end{aligned}$$

Vi foretager nu en substitution: $t=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2},\ dt=\tfrac{1}{2}dx,\ \text{dvs}: dx=2dt$

$$\int \frac{1}{\left((\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2})^2+1\right)}dx=\int \frac{2}{\left(t^2+1\right)}dt=2\arctan(t)=2\arctan(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2})$$

Samlet konklusion:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx=\tfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+2\arctan(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2})$$

Øvelse 12

a) Gå omhyggeligt ovenstående omskrivninger igennem, tag et rent stykke papir og prøv selv at gennemgå hvordan integralet bestemmes.

b) Bestem efter samme opskrift $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+6}dx$