ISBN 9788770668781

Projekt 2.1 Kvadrering af polygoner

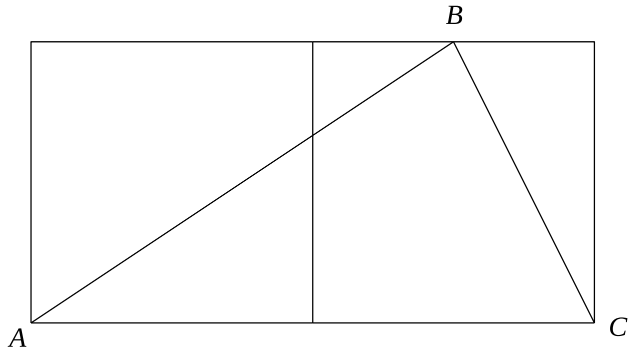
De græske matematikeres bestræbelser på at løse *cirklens kvadratur*, dvs at konstruere et kvadrat med samme areal som en given cirkel, blev fra første færd bestyrket af, at man kunne kvadrere "hvad som helst" andet. Det vil vi her demonstrere gennem en række øvelse.

At kvadrere en polygon (mangekant) vil sige at finde et kvadrat med samme areal.
Vi når frem til denne teknik gennem en række skridt.

TRIN 1

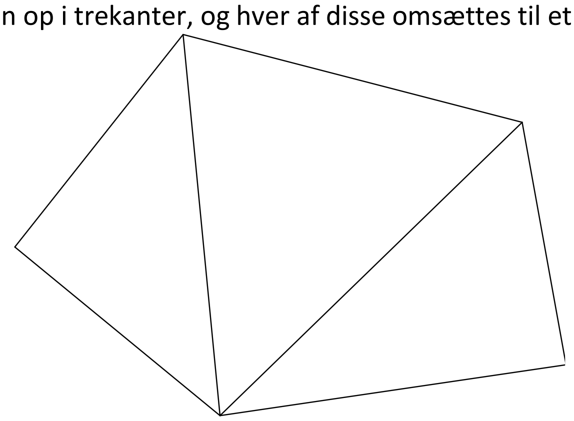
Øvelse 1

Se på figuren og argumenter for, hvorledes man kan finde et rektangel med samme areal som trekant ABC:

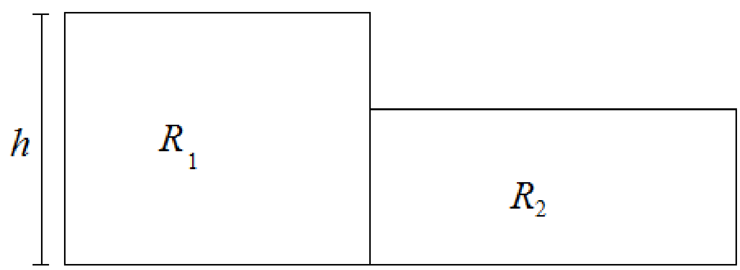


TRIN 2

Har vi givet en polygon, splittes den op i trekanter, og hver af disse omsættes til et rektangel:



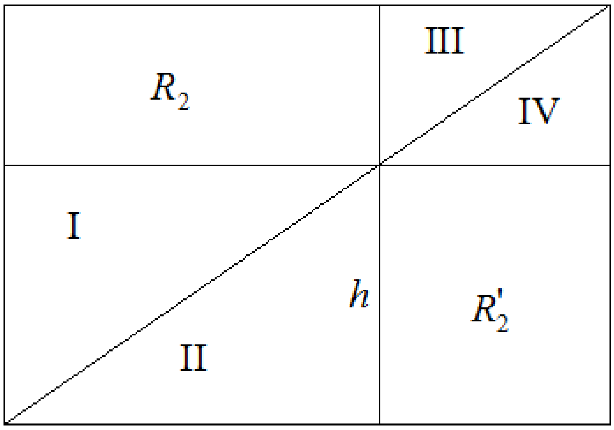
Derved får vi flere rektangler. Disse skal så stykkes sammen, dvs. gives en fælles højde. Det sker lettest på følgende måde: Givet rektanglerne R_1 og R_2 :



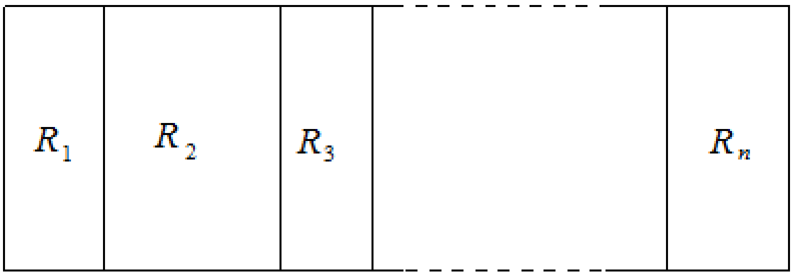
Øvelse 2

R_2 skal omformes til et med højden *h*. Argumenter for at dette kan ske ved hjælp af følgende figur:

ISBN 9788770668781



Har alle rektangler nu fået samme højde, stykkes de sammen til ét ved blot at sætte dem i forlængelse af hinanden:



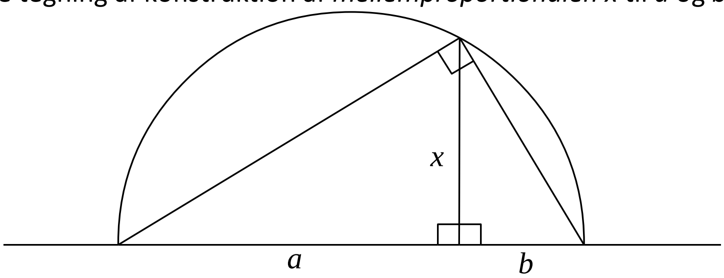
dvs. polygonens areal er lig med rektanglets areal.

TRIN 3

Vi mangler nu at omforme et rektangel til et kvadrat

Øvelse 3

Udnyt følgende tegning af konstruktion af *mellemproportionalen* x til a og b:



til at argumentere for, at der må gælde: $\frac{x}{b} = \frac{a}{x}$ eller $x^2 = a \cdot b$.

Konklusion på øvelsen: Et rektangel med siderne a og b kan omformes til et kvadrat med samme areal ved hjælp af konstruktion af mellemproportionalen.

Øvelse 4

Et rektangel har siderne 2 og 5, dvs arealet $2 \cdot 5 = 10$. Konstruer et kvadrat med samme areal, dvs konstruer et kvadrat med en sidelængde x, så $x^2 = 2 \cdot 5$.

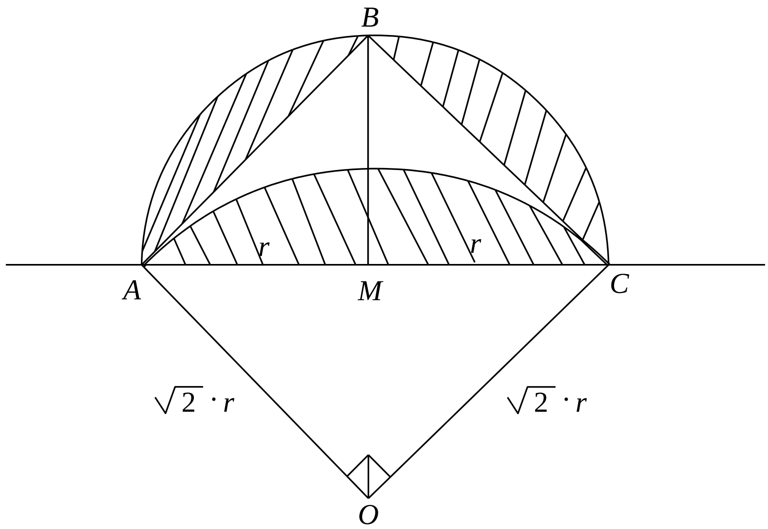
Bemærk, at du herved har konstrueret $\sqrt{10}$.

ISBN 9788770668781

Øvelse 5

Fastlæg en enhed. Konstruer dernæst linjestykker med længder $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$ og $\sqrt{15}$

En cirkel kan tilnærmes med polygoner – laves flere og flere kanter, kan vi komme tættere og tættere på cirkelbuen. Så man kunne måske derfor tro, at også cirklen kan kvadreres.
Det lykkedes tidligt for matematikeren Hippokrates (ca. 430 f.Kr.) at kvadrere visse *halvmåner*, dvs. figurer afgrænset af to cirkelbuer. Det gøres som følger. Vi tegner en halvmåne afgrænset yderst af en halvcirkel med radius *r* og centrum *M* og inderst af en bue fra en cirkel med radius $r\cdot\sqrt{2}$ og centrum *O*:



Øvelse 6

Vis, at siderne i trekant *AOC* opfylder Pythagoras' læresætning. Derfor er $\angle O = 90^\circ$.

Øvelse 7

I halvcirklen tegnes en ligebenet, retvinklet trekant *ABC*.
a) Argumenter for, at cirkelafsnittene over *AB* og *BC* (de skraverede) er ligedannede med cirkelafsnittet over *AC*.
b) Argumenter for, at når radius ganges op med $\sqrt{2}$ (fra *r* til $r\cdot\sqrt{2}$), så ganges *arealet* op med $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ c)
Argumenter endelig for, at det / / / / skraverede er lig med det \ \ \ \ skraverede, dvs at *halvmånens* areal lig med arealet af *trekant ABC*.

En trekant kan kvadreres! Altså kan halvmånen kvadreres. Det måtte naturligt nok bestyrke troen på, at *cirkler* kan kvadreres.

Men ak nej – man forsøgte gennem mange århundreder uden held. Den historie har vi fortalt i indledningen til kapitel 2 i *Hvad er matematik*? 3, og den suppleres af fortællingen om tal og uendelighed , specielt om de transcendente tal i indledning til kapitel 7 i *Hvad er matematik*? 3. Tallet π er transcendent, hvilket betyder, at det iikke er rod i noget polynomium med heltallige koefficienter. Og så kan man vise, det ikike kan konstrueres med passer og lineal.

Selv om dette først blev endeligt bevist i 1882, så var der i århundreder før ret stor enighed blandt matematikere om, at det ikke kunne lade sig gøre. Alligevel blev amatører ved med at indsende "løsninger" til universiteter og akademier, så det til sidst blev det franske akademi for meget.

ISBN 9788770668781

Jesper Lützen skriver i indledningen til sin bog *Cirklens kvadratur, vinklens tredeling, og terningens fordobling – Fra oldtidens geometri til moderne algebra*, 1993, side 6:

> Cirkelkvadratører og vinkeltredelere har i århundreder forpestet livet for sig selv og for de matematikere, som de har betroet deres epokegørende opdagelser tiI. Allerede i 1775 blev det for meget for den højeste franske videnskabelige institution I'Académie des Sciences, så det bekendtgjorde at det ikke længere ville bedømme cirkelkvadraturer, vinkeltredelinger, terningefordoblinger eller evighedsmaskiner. Akademiets sekretær, matematikeren Condorcet, skrev i begrundelsen for denne beslutning blandt andet:
>
> *"Der går et udbredt rygte om, at regeringerne har udlovet en betragtelig belønning til den, som får løst cirklens kvadratur, og at dette problem er genstand for de mest berømte matematikeres undersøgelser; I tillid til disse rygter opgiver en masse mennesker, mange flere en man tror, deres nyttige arbejde for at hengive sig til udforskningen af dette problem, ofte uden af forstå det, og altid uden at have den nødvendige viden ti at gennemføre løsningen med succes... . Mange har det uheld at tro, at det er lykkedes, de benægter de argumenter, hvormed matematikerne bestrider deres løsninger, ofte kan de ikke forstå dem, og de ender med at beskylde dem for misundelse og uærlighed. Af og til udarter deres påståelighed til sandt galskab; men man betragter det næppe som sådan hvis den fikse ide, der udgør galskaben, ikke støder an mod accepterede meninger, hvis den ikke har indflydelse på livsførelsen, hvis den ikke forstyrrer samfundets orden. Kvadratørernes galskab har altså for dem selv ingen anden ulempe end tabet af tid, der ofte kunne være nyttig for deres familie, men desværre begrænses galskaben sjældent til et enkelt område, og vanen at snakke ufornuftigt bider sig fast og breder sig, lige som vanen at ræsonnere rigtigt; det er det, der er sket med mere end én kvadratør."*
> *(Histoire de 1'Academie 1775 s. 67)*
>
> Denne beskrivelse er desværre stadig rigtig.
> Hvor det i dag mest er amatører, der beskæftiger sig med de tre klassiske problemer, har de tidligere været placeret centralt i den matematiske forskning. En historisk gennemgang af disse tre problemer vil derfor føre os igennem et bredt spektrum af matematikkens historie.

I *Hvad er matematik*? 1, kapitel 10 er problemet vedrørende *terningens fordobling* gennemgået især med brug af geometriske metoder, og i *Hvad er matematik*? 3, kapitel 0, projekt 0.7 er problemet vedrørende *vinklens tredeling* udtømmende behandlet med en kombination af geometriske og algebraiske metoder.