ISBN 9788770668781

Projekt 2.19 Integrationsteknik – brug af de omvendte trigonometriske og de omvendte hyperbolske funktioner

(*Projekt 2.19 og projekt 2.20 har samme generelle introduktion til, hvorfor integration er så meget sværere end differentiation*)

Indhold

ISBN 9788770668781

Introduktion
Differentiation er en succeshistorie. Har man lært at differentiere alle de simple funktioner og lært de forskellige regneregler for differentiation, specielt sammensat differentiation, kan man differentiere et hvilket som helst udtryk opbygget af simple funktioner.

Med integration forholder det sig helt anderledes. Man kan godt bestemme stamfunktioner til de helt simple funktioner, og som ved differentialregning har vi regnereglerne for sum, differens og konstantfaktor. Men så er festen stort set også slut. Fx findes der ikke generelle metoder til at integrere sammensatte udtryk på formen:

$$\int \sqrt{f(x)}\, dx$$

Man kunne måske mene, at det er overraskende, al den stund at de to regningsarter: *Differentiation* og *Integration* er "modsatte regningsarter". Dette er godt nok ikke en helt præcis formulering, men udtrykker dog en dyb sammenhæng. Differentialoperatoren virker som navnet siger på mængden af *differentiable funktioner*. Integraloperatoren virker på mængden af kontinuerte funktioner, som vi har bevist i HEM3, kapitel 2, afsnit 4 og i kapitel 7, afsnit 2.4. og det er to meget forskellige mængder – der er langt flere kontinuerte funktioner end differentiable funktioner. Men alligevel: Hvis vi først integrerer en kontinuert funktion *f*, og dernæst differentierer $\int f(x)dx$, så er vi tilbage ved $f(x)$. Hvis omvendt *g* er en differentiabel funktion, og vi først differentierer den, og dernæst integrerer den afledede $\int g'(x)dx$,så er vi normalt ikke tilbage ved $g(x)$. Men "tæt ved" – der er blot en konstant til forskel.

Det virkeligt overraskende i denne sammenhæng er, at de to operationer faktisk ophæver hinanden – Evt. pånær en konstant. Det er overraskende pga. deres helt forskellige udgangspunkt. *Differentiation* drejede sig fra starten af om at bestemme tangenter, tangentligninger og hældningskoefficienter. Det var i 1600-tallet før Newtons og Leibniz tid. Integration drejede fra starten af om at bestemme arealer. Den oprindelse er overleveret i selve integraltegnet, som Leibniz indførte som et symbol for en uendelig sum af uendeligt små størrelse. Og at de to operationer – At bestemme tangentligninger og At udregne arealer – har noget med hinanden at gøre er ikke oplagt.

Det overraskende heri bliver ofte glemt i den måde integralregning indføres på idag, nemlig ud fra stamfunktioner. Ud fra den definition er det jo indlysende, at differentiation og integration er modsatte operationer. Det overraskende ligger her gemt i det, vi kalder *Analysens fundamentalsætning* nemlig at stamfunktioner kan anvendes til at bestemme arealer. I mange beviser for denne sætning bliver det overraskende i sammenhængen gemt i en påstand, der kræver et bevis: Påstanden om at området under grafen for en kontinuert funktion har et areal. Og dette er slet ikke indlysende, men kræver et lidt kompliceret bevis, som kan findes i HEM3, kapitel 7, afsnit 2.4.

I virkeligheden er matematik fyldt med eksempler på, at en funktion har en omvendt funktion, der er langt mere kompleks, end den vi startede med:

- *Division* med fx trecifrede tal er betydeligt vanskeligere end *multiplikation* med trecifrede tal.
- At skrive et stort tal som produkt af *primtalsfaktorer* er betydeligt vanskeligere end at gange primtal sammen og udregne et stort tal.
- At bestemme en forskrift ud fra en graf er betydeligt vanskeligere, end at tegne en graf ud fra en forskrift.

Og integration er betydeligt vanskeligere end differentiation! Med værktøjsprogrammerne kan man indvende, at der ingen forskel er i kompleksiteten. Men har man blot lidt erfaring med at integrere på et værktøj, vil man både have stødt på eksempler, der er vildt mærkelige, og på tilfælde, hvor maskinen giver op. Det sker ikke når man differentierer. Vi vil gerne forstå, hvad der sker her. Hvorfor giver maskinen op? Og hvorfor svarer den med så mærkeligt et udtryk? Derfor: I en stor del af projektet lægger vi det matematiske værktøjsprogram til side for bedre at forstå, hvad der ligger bag værktøjernes algoritmer.

Differentiation af de elementære funktioner og regneregler for differentiation
Vi vil i det følgende tage udgangspunkt i, at integration betyder at bestemme en stamfunktion. Det er normalt let at kontrollere, om vi har løst opgaven korrekt: Man anvender *integrationsprøven*, dvs man differentierer det fundne

ubestemte integral og ser, om man får integranden (den funktion man startede med). Derfor skal vi kende alle de elementære differentialkvotienter og regneregler, vi har lært.
Løb oversigten her igennem og vær sikker på, at du har styr på det.

Type	**Funktionsudtryk,** $f(x)$	**Afledet funktion,** $f'(x)$
Polynomier	$f(x)=k$ (k er en konstant)	$f'(x)=0$
	$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
	$f(x)=ax^2+bx+c$	$f'(x)=2ax+b$
	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
Logaritmefunktioner og eksponentialfunktioner	$f(x)=\ln(x),\ \ x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
	$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
	$f(x)=\mathrm{e}^{k\cdot x}$	$f'(x)=k\cdot \mathrm{e}^{k\cdot x}$
	$f(x)=a^x$	$f'(x)=\ln(a)\cdot a^x$
Potensfunktioner	$f(x)=x^a\ ,\ \ x>0$	$f'(x)=a\cdot x^{a-1}$
	$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1},\ \ x\neq 0$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}=-x^{-2}$
	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ \ x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	$f(x)=\cos(x)$	$f(x)'=-\sin(x)$
	$f(x)=\sin(x)$	$f(x)'=\cos(x)$
	$y=\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)},\ \ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$	$y'=\left(\tan(x)\right)'=\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$
Regneregler	$y=k\cdot f(x)$	$y'=k\cdot f'(x)$
	$y=f(x)+g(x)$	$y'=f'(x)+g'(x)$
	$y=f(x)-g(x)$	$y'=f'(x)-g'(x)$
	$y=f(a\cdot x+b)$	$y'=a\cdot f'(a\cdot x+b)$
	$s(x)=f(g(x))$	$s'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$
	$y=f(x)\cdot g(x)$	$y'=(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
	$y=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ \ g(x)\neq 0$	$y'=\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

De to gulede formler mangler normalt i sådan en oversigt, da de ikke er en del af pensum idag. Men de er nyttige at have ved hånden i det følgende. Formlerne er vist i HEM2, projekt 5.8. Prøv selv at vise en af formlerne for differentiation af tangens ud fra brøkreglen.

ISBN 9788770668781

Integration ved substitution udvider dramatisk mængden af funktioner, vi kan integrere

Ud fra ovenstående tabel kunne vi opstille en tilsvarende over integration af de elementære funktioner. En sådan tabel findes i de fleste lærebøger – i HEM3 findes den på side 99. Den indgår også i formelsamlingen til stx studentereksamen.

Øvelse 1: Integration af de elementære funktioner
Prøv selv, uden at slå op, at opstille en tabel over integration af de elementære funktioner.

Funktionen tangens volder nok lidt problemer – dens afledede funktion fører tilsyneladende over i en anden verden. Men reglen om *integration ved substitution* kan faktisk anvendes til at bestemme dette integral:

Øvelse 2. Integration af tangens

Den grundlæggende ide er, at omskrive tangens til et produkt, hvor den ene faktor er en sammensat funktion, hvis indre funktion $\cos(x)$ indgår i stamfunktionen til den anden faktor $\sin(x)$ i produktet. Det er tegnet på, at vi kan få integralet til at gå op. I det følgende er de forklarende bemærkninger fjernet, dem skal du selv sætte på:

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x)\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{u}du \qquad \text{Substituer } \cos(x) = u \text{ samt } -\sin(x)dx = du$$

$$= -\ln(|u|) + k$$

$$= -\ln(|\cos(x)|) + k \qquad \text{Substituer tilbage } u = \cos(x)$$

Konklusion: Stamfunktionen til $\tan(x)$ er altså $-\ln(|\cos(x)|)$.

Hvorfor har vi anvendt numerisk tegn om variablen u?

Vi kan altså opstille en integraltabel, parallelt til differentiationstabellen. Men havde vi kun adgang til disse tabeller ovenfor, var vi ilde stedt. Det er sjældent vi får funktioner serveret i en så ren form. Hvad med følgende integraler:

a) $\int \frac{1}{x+3}dx$ b) $\int \sin(5x+7)dx$ c) $\int (2x-3)^7 dx$ d) $\int \frac{3}{x}dx$ e) $\int 4 \cdot e^{0.2x-1}\,dx$

De klares forholdsvis let ved brug af *regnereglerne* for integration:
Reglen om *konstantfaktor* tager vi i brug som det første ved d) og e), hvor 3 og 4 sættes udenfor integraltegnet.
Reglen om *integration ved substitution* anvendes ved alle 5, fx ved b):

Eksempel: Integration ved substitution af $\int \sin(5x+7)dx$

Vi definerer den nye variabel: $t = 5x+7$

Vi udregner differentialerne: $dt = 5dx$, hvoraf: $dx = \frac{1}{5}dt$

Vi substituerer: $\int \sin(5x+7)dx = \int \sin(t) \cdot \frac{1}{5}dt, \quad t = 5x+7$

Vi udregner det nye integral: $\int \sin(t) \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5} \cdot \int \sin(t)dt = \frac{1}{5} \cdot (-\cos(t)) = -\frac{1}{5} \cdot \cos(t)$

Vi substituerer tilbage: $-\frac{1}{5} \cdot \cos(t) = -\frac{1}{5} \cdot \cos(5x+7)$

Konklusion: $\int \sin(5x+7)dx = -\frac{1}{5} \cdot \cos(5x+7)$

Øvelse 3: Integration ved substitution
Bestem de øvrige 4 integraler ved substitution. Regn selv i hånden og brug værktøjsprogrammet som facitliste.

Man lærer hurtigt at løse sådanne integraler "i hovedet". Og selvfølgelig er der også meget mere komplicerede integraler, der kan løses med substitution. Men der er også mange, der ikke kan. Se på følgende:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ b) $\int \frac{1}{x^2-x-6}dx$ c) $\int \sqrt{e^x}\,dx$ d) $\int \sqrt{\ln(x)}\,dx$

e) $\int \frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ f) $\int \sqrt{(x^2-x-6)}\,dx$ g) $\int \sqrt{\sin(x)}\,dx$ h) $\int \frac{x+5}{x^2-x+6}dx$

Øvelse 4: Integraler på værktøjsprogrammet
a) Prøv at bestemme de 8 integraler med dit værktøjsprogram.
b) Der er ét af disse integraler, du faktisk kan løse med det du allerede har lært. Kan du se hvilket?
(*Hint: Du skal yderligere bruge dit kendskab til potensreglerne*).
c) Der er ét af integralerne, hvor værktøjsprogrammerne giver op. Hvilket?

Men de fleste af integralerne kan et værktøjsprogram faktisk klare. Der er flere ting, der springer i øjnene, når vi ser på løsningen til disse 8 integraler.

- Vi møder funktionstyper, vi aldrig har hørt om før. Det er jo spændende, ikke mindst, hvis man tror vi har mødt det meste inden for funktionernes verden. Det er fx tilfældet i g), hvor der kommer såkaldte elliptiske integraler på banen. Vi har flere steder i Hvad er matematik? mødt tilsvarende nye familier af funktioner. Fx har vi i HEM3, kapitel 7 i den indledende fortælling mødt *Fresnel-funktioner*, som opstår ud af analysen af motorvejsudfletninger. Vi vil lade dette hvile her og koncentrere os om de næste to:
- I disse integraler og tilsvarende, man selv kunne prøve at opstille, optræder hyppigt arcsin, arccos og arctan, der er de omvendte funktioner til sin, cos og tan. Hvad har de trigonometriske funktioner at gøre med polynomielle udtryk, som vi jo startede med? Det ser vi nærmere på nedenfor, hvor vi dykker ned i begrebet *omvendt substitution*.
- Mens der ikke ser ud til at være noget overordnet mønster i integraler af typen $\int \sqrt{f(x)}\,dx$, så er der måske et mønster i integraler af polynomiumsbrøker. Det ser vi nærmere på i projekt 2.20.

De omvendte trigonometriske funktioner og deres differentialkvotienter

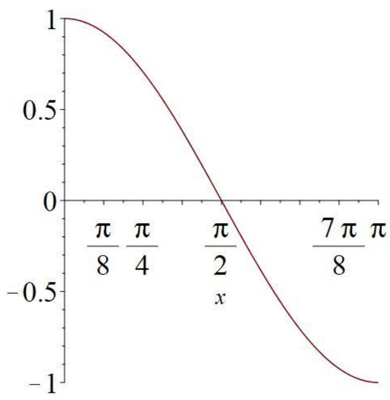
Ved at se på graferne for sinus, cosinus og tangens kan vi let se, at de ikke er globalt monotone, og dermed ikke har omvendte funktioner defineret på alle reelle tal. Men hvis vi skærer definitionsmængderne af, så funktionerne indenfor de valgte områder bliver monotone, så kan vi definere de omvendte funktioner.

For cosinus vælger vi definitionsmængden: $[0;\pi]$

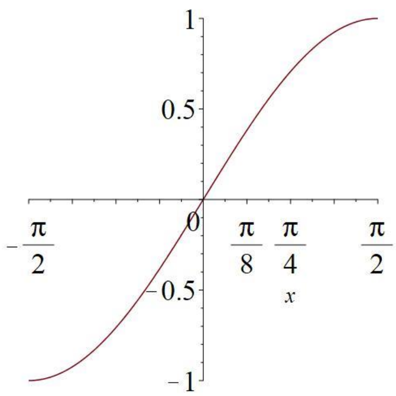
For sinus vælger vi definitionsmængden: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

For tangens vælger vi definitionsmængden: $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

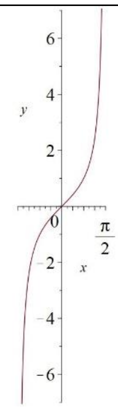
Med disse definitionsmængder bliver de grafiske billeder:



cosinus i $[0;\pi]$



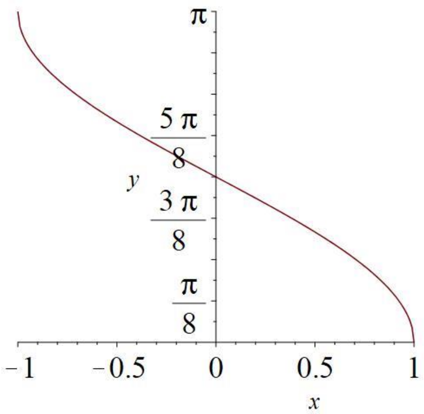
sinus i $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$



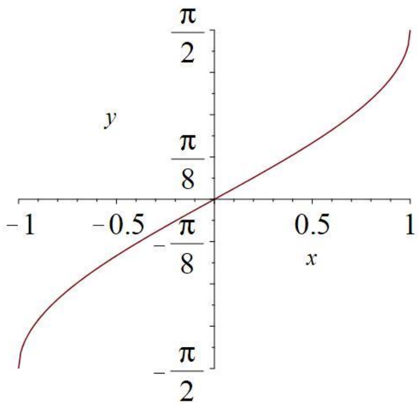
tangens i $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Graferne her bekræfter, at det er monotone funktioner, der dermed har omvendte funktioner.

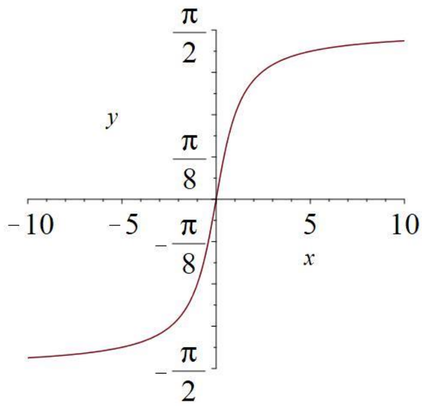
De grafiske billeder af de omvendte funktioner fremkommer ved at spejle graferne af de oprindelige 'moder-funktioner' i linjen $y = x$. Se her:



arccos i $[-1;1]$



arcsin i $[-1;1]$



arctan i et udfsnit af $]-\infty;\infty[$

Øvelse 5.
Tegn selv med i dit værktøjsprogram

I HEM3, kapitel 7 har vi gennemført en analytisk stringent definition af sinus og arcsinus, hvor vi omgår det grundlæggende problem i den traditionelle definition af sinus og cosinus – hvordan fastlægger man længden af en cirkelbue - ved at starte med at definere arcsin som længden af en cirkelbue, beregnet som et integral, og derefter definerer sin som den omvendte funktion.
Pr definition har vi derfor:

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ud fra dette får vi de formler vi kender: $\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$ og $\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$

Den afledede til arccos kan nu findes med samme teknik, som har givet os den afledede til fx e^x :

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos(x)) &= x && \text{def. på omvendt funktion}\\
\left(\cos(\arccos(x))\right)' &= 1\\
\cos'(\arccos(x))\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{sammensat differentiation}\\
-\sin(\arccos(x))\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{vi kender afledede til cos}\\
-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{udnyt } \cos^2(x)+\sin^2(x)=1\\
-\sqrt{1-\left(\cos(\arccos(x))\right)^2}\cdot\arccos'(x) &= 1\\
-\sqrt{1-\left(x\right)^2}\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{def. på omvendte funktioner}\\
\arccos'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Øvelse 6.
Gør rede for omskrivningerne ovenfor i alle detaljer.

Den afledede til arctan kan nu findes med samme teknik:

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan(x)) &= x && \text{def. på omvendt funktion}\\
\left(\tan(\arctan(x))\right)' &= 1\\
\tan'(\arctan(x))\cdot\arctan'(x) &= 1 && \text{sammensat differentiation}\\
\left(1+\tan^2(\arctan(x))\right)\cdot\arctan'(x) &= 1 && \text{vi kender afledede til tan}\\
\left(1+\left(\tan(\arctan(x))\right)^2\right)\cdot\arctan'(x) &= 1\\
\left(1+\left(x\right)^2\right)\cdot\arctan'(x) &= 1 && \text{def. på omvendte funktioner}\\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Øvelse 7.
Gør rede for omskrivningerne ovenfor i alle detaljer.

Eksempel. Hvorfor kaldes integration med brug af formlerne for arctan’(x) mv for omvendt substitution?

Når vi kender formlerne som udledt ovenfor, så anvender vi naturligvis dem umiddelbart. Men hvis man ikke har dem present, eller hvis man vil demonstrere, hvordan de kommer på banen, så er fremgangsmåden i at løse sådan et integral som følger:

Vi ønsker at udregne: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Når vi kender listen over afledede funktioner, så er det nærliggende at overveje, om det mon har noget med tangens at gøre – selvom det er lidt sært at tangens skulle have noget med polynomielle udtryk at gøre. Men vi ved, at

$$\left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x),$$

så i stedet for at erstatte $1+x^2$ med en variabel t, så vælger vi i stedet at erstatte x med $\tan(t)$. Det er dette skridt, der kaldes *omvendt substitution*.

$x=\tan(t)$ dvs: $t=\arctan(x)$

$dx=(1+\tan^2(t))dt$

ISBN 9788770668781

Vi substituerer nu i integralet:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\left(\tan(t)\right)^2}\cdot(1+\tan^2(t))dt\ , \qquad \text{hvor}\quad t=\arctan(x)$$
$$= \int 1dt$$
$$= t+c\ , \qquad \text{hvor } c \text{ er en konstant}$$
$$= \arctan(x)+c\ , \qquad \text{hvor vi har substitueret tilbage}$$

Eksempel: Manipuler en forskrift, og anvend substitution

Vi ønsker at udregne: $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{3-2\cdot x^2}}dx$

Integranden er i slægt med den afledede af arcsin. Men hvordan omskriver vi, så vi får ”den rene form” frem?
Først sættes 4 udenfor integralet:

$$\int \frac{4}{\sqrt{3-2\cdot x^2}}dx = 4\cdot\int \frac{1}{\sqrt{3-2\cdot x^2}}dx$$

Så sættes 3 udenfor parentes under kvadratroden:

$$4\cdot\int \frac{1}{\sqrt{3-2\cdot x^2}}dx = 4\cdot\int \frac{1}{\sqrt{3\cdot(1-\frac{2}{3}\cdot x^2)}}dx$$

Så udnyttes en af potensreglerne – idet kvadratrod jo er en potens (opløfte i $\frac{1}{2}$) – og kvadratroden deles op:

$$4\cdot\int \frac{1}{\sqrt{3\cdot(1-\frac{2}{3}\cdot x^2)}}dx = 4\cdot\int \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{3}\cdot x^2}}dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\cdot x^2}}dx$$

Kontroller selv udregningerne!
Nu er vi tæt på målet, idet vi omskriver med brug af endnu en potensregel:

$$\tfrac{2}{3}\cdot x^2 = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot x\right)^2$$

Herefter kan vi substituere:

$$t=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot x$$
$$dt=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot dx\,,\quad \text{hvoraf}\quad dx=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot dt$$

Vi indsætter, bruger vores viden om arcsin, integrerer og substituerer tilbage:

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\cdot x^2}}dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot x\right)^2}}dx$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot dt$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot(\arcsin(t)+c)\ , \qquad \text{hvor } c \text{ er en konstant}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\left(\arcsin\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot x\right)+c\right)\ , \quad \text{hvor vi har substitueret tilbage}$$

Forklar selv i detaljer alle udregningerne!

Øvelse 8. Udregn integraler

Anvend substitution til at løse følgende integraler:

a) Bestem integralet: $\displaystyle\int \frac{5}{4+3x^2}dx$

ISBN 9788770668781

b) Bestem integralet: $\int \frac{c}{b+a\cdot x^2}dx$

c) Bestem integralet: $\int \frac{10}{\sqrt{7-3\cdot x^2}}dx$

c) Bestem integralet: $\int \frac{k}{\sqrt{m-c\cdot x^2}}dx$

De hyperbolske funktioner og de afledede af dem.

Vi fik ovenfor udvidet repertoiret af udtryk, som vi kan integrere en smule. Men der er jo uendeligt mange muligheder med forskellige andre potenser, og det viser sig hurtigt, at der heller ikke er noget system i disse, så man kan ikke ud fra en viden om de to typer af funktionsudtryk, vi nu kan integrere, slutte sig til noget om følgende:

a) $\int \frac{1}{1+x^5}\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^5}}dx$

Prøv selv at løse disse med et værktøjsprogram – det kan lade sig gøre, men kun ved at indføre nye funktionstyper.

Men vi kan dog udvide repertoiret en smule mere på grundlag af de funktioner vi kender.
Eksponentialfunktionen e^x anvendes til konstruktion af en ny familie af funktioner: *De hyperbolske funktioner*.
Helt præcist betegnes disse nye funktioner:

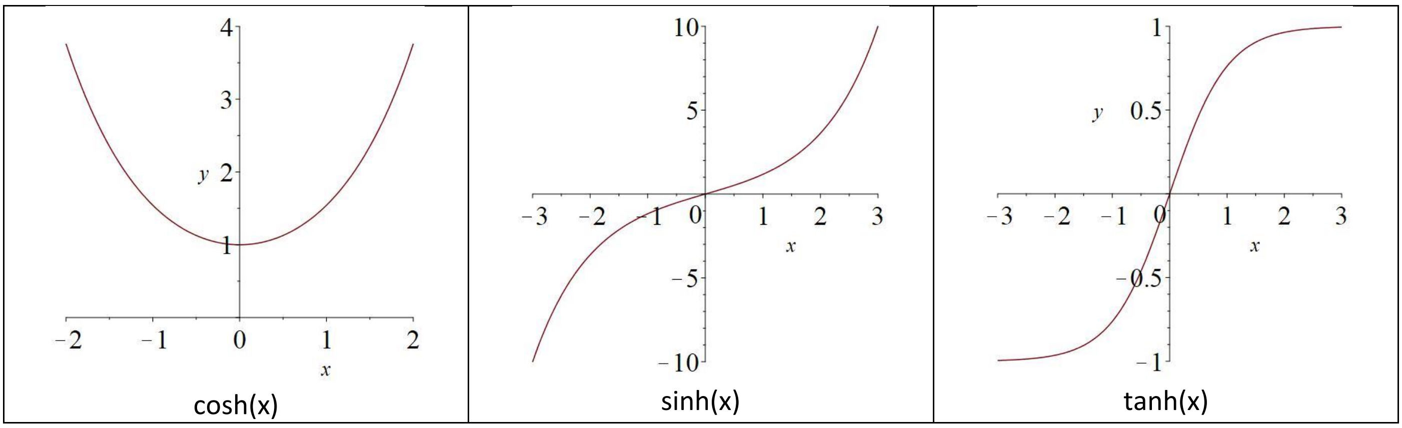
Hyperbolsk cosinus: $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Hyperbolsk sinus: $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Hyperbolsk tangens: $\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Hvorfor de hedder noget med cosinus, sinus og tangens? Det vil vi få nogle svar på, i det følgende.

De grafiske billeder af de tre funktioner:



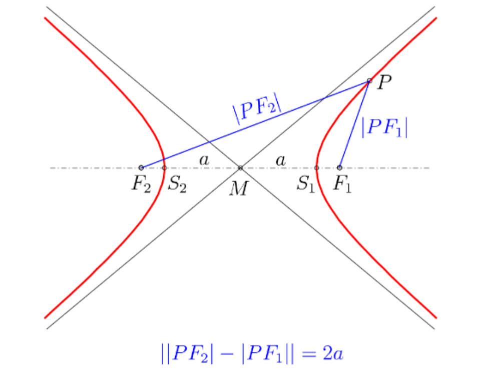
cosh(x) sinh(x) tanh(x)

Øvelse 9. Hyperbolske funktioners geometriske egenskaber

a) Vis formlen: $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

ISBN 9788770668781

b) En Hyperbels ligning i analytisk geometri er: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,
hvor toppunkterne S_1 og S_2 har koordinaterne $(\pm a,0)$,
og brændpunkterne F_1 og F_2 har koordinaterne $(\pm c,0)$, hvor $c^2=a^2+b^2$.
En af hyperblens interessante egenskaber er, som angivet på figuren, at *differensen* mellem afstanden fra et punkt *P* på grafen til de to brændpunkter er konstant.
Forklar hvad dette har med ligningen i punkt a) at gøre, og som forklarer det mærkelige navn: hyperbolske funktioner.
Forklar specielt, hvad koordinaterne til et punkt på den hyperbel, som beskrives i punkt a), er.



Vi møder hyperbolsk cosinus i naturen – og i ingeniørvidenskaberne – som en matematisk model for *kædelinjer*, den geometriske eller grafiske form, som en bøjelig og homogen kæde følger, når den hænges frit op i to endepunkter og lader tyngdekraften bestemme formen. Det er vist i HEM3, kapitel 6,afsnit 3.1.
Det er også den form bærende kabler på en hængebro som Storebæltsbroen følger, før man hænger brobanerne på. Derefter følger de parabelbuer. Dette er vist i HEM3, projekt 6.6 og i HEM3, kapitel 11, Samarbejde matematik og fysik, afsnit 8.6.

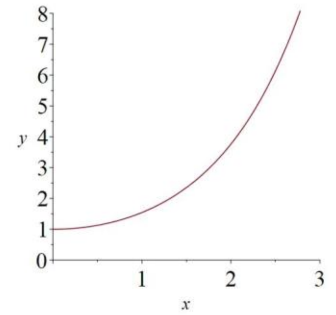
Øvelse 10. Differentiation af hyperbolske funktioner

Formlen i øvelse 9 viser et vist slægtskab til den trigonometriske udgave af Pythagoras læresætning:
$\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$. Der er flere slægtskaber:
a) Vis, at $\cosh'(x)=\sinh(x)$
b) Vis, at $\sinh'(x)=\cosh(x)$
c) Omskriv $\tanh(x)$ til et produkt: $\tanh(x)=\sinh(x)\cdot\frac{1}{\cosh(x)}=\sinh(x)\cdot(\cosh(x))^{-1}$, og differentier med brug af produktregel og sammensat differentiation. Kender du brøkreglen, kan du umiddelbart bruge den. Du skal få:
$\tanh'(x)=1-\tanh^2(x)$

De omvendte hyperbolske funktioner

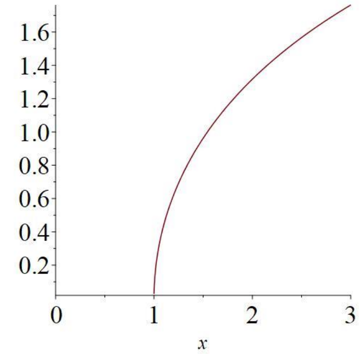
Det viser sig, at de hyperbolske funktioner kan hjælpe os med flere integraler, hvis vi tager deres omvendte funktioner med ind på banen.
Når vi betragter graferne ovenfor, så ser vi umiddelbart, at $\sinh(x)$ og $\tanh(x)$ er monotone, så de har omvendte funktioner globalt. Men hyperbolsk cosinus har ikke: Vi er nødt til at vælge kun at se på positive værdier:

Med denne indskrænkning, så kan vi operere med de omvendte funktioner, som naturligt får betegnelserne: arccosh(x), arcsinh(x) og arctanh(x)

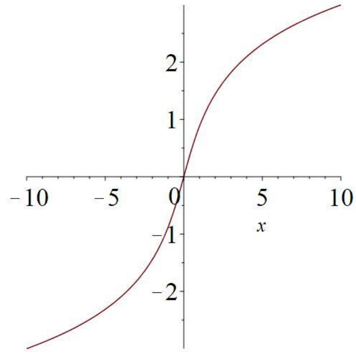


Graferne af de tre ses her – Tegn selv med, og overbevis dig selv om, at graferne fås ved at spejle graferne for de hyperbolske funktioner i linjen $y=x$:

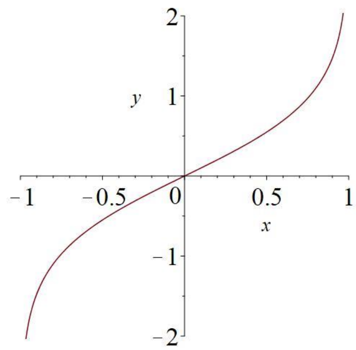
ISBN 9788770668781



arccosh(x), som er defineret for $x \geq 1$



arcsinh(x)



arctanh(x)

Øvelse 11. Differentiation af arccosh(x), den omvendte til hyperbolsk cosinus

Vi anvender den efterhånden velkendte teknik, nemlig at udnytte hvad omvendt funktion betyder, samt vores viden om differentiation af cosh:

$$\cosh(\operatorname{arccosh}(x)) = x$$

$$\left(\cosh(\operatorname{arccosh}(x))\right)' = x'$$

$$\cosh'(\operatorname{arccosh}(x)) \cdot \operatorname{arccosh}'(x) = 1$$

$$\sinh(\operatorname{arccosh}(x)) \cdot \operatorname{arccosh}'(x) = 1$$

$$\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arccosh}(x)) - 1} \cdot \operatorname{arccosh}'(x) = 1 \qquad \text{anvend "Pythagoras" for hyperbolske funktioner}$$

$$\sqrt{\left(\cosh(\operatorname{arccosh}(x))\right)^2 - 1} \cdot \operatorname{arccosh}'(x) = 1$$

$$\sqrt{x^2 - 1} \cdot \operatorname{arccosh}'(x) = 1$$

$$\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{hvor vi her er nødt til at kræve } x > 1$$

Forklar omhyggeligt alle omskrivninger!

Øvelse 12. Differentiation af arcsinh(x), den omvendte til hyperbolsk sinus

Gør følgende omskrivninger færdig så du når frem til konklusionen:

$$\sinh(\operatorname{arcsinh}(x)) = x$$

$$\left(\sinh(\operatorname{arcsinh}(x))\right)' = x'$$

$$\sinh'(\operatorname{arcsinh}(x)) \cdot \operatorname{arcsinh}'(x) = 1$$

$$\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) \cdot \operatorname{arcsinh}'(x) = 1$$

$$\ldots = 1$$

$$\ldots = 1$$

$$\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Øvelse 13. Differentiation af arctanh(x), den omvendte til hyperbolsk tangens

Vis med samme teknik, at $\operatorname{arctanh}'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$, hvor vi som med arccosh må kræve $x > 1$

Listen over afledede funktioner fra s. 2 kan ifølge ovenstående nu udvides med:

Type	**Funktionsudtryk,** $f(x)$	**Afledet funktion,** $f'(x)$
Trigonometriske familie	$f(x) = \arccos(x), \quad x \in [-1;1]$	$f'(x) = \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in]-1;1[$
	$f(x) = \arcsin(x), \quad x \in [-1;1]$	$f'(x) = (\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in]-1;1[$
	$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
Hyperbolske familie	$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$
	$f(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
	$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$
	$f(x) = \operatorname{arccosh}(x), \ x > 1$	$f'(x) = \operatorname{arccosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1$
	$f(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$	$f'(x) = \operatorname{arcsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$	$f'(x) = \operatorname{arctanh}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad x > 1$

Vi får således udvidet repertoiret af funktionsudtryk, der kan integreres eksakt. Kombineret med substitution, kan vi som vi så i afsnittet om trigonometriske funktioner nu løse opgaver som disse:

Øvelse 14: Integration vha. omvendte hyperbolske funktioner

Bestem følgende integraler ved egne udregninger og kontroller facit med dit værktøjsprogram:

a) $\int \dfrac{10}{1-5x^2}dx$ b) $\int \dfrac{2}{\sqrt{4x^2-7}}dx$ c) $\int \dfrac{a}{\sqrt{bx^2+c}}dx$, hvor a, b, c er positive