ISBN 9788770668781

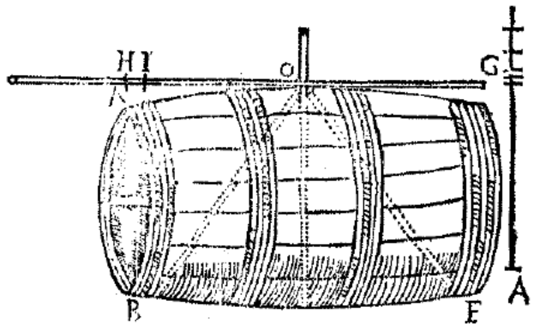
Projekt 2.18 Historisk: Keplers bestemmelse af vintønders rumfang

Kepler fortæller selv om hvordan han i 1613 blev optaget af problemerne med opmåling af vintønder:

"Da jeg i november sidste år havde hjembragt en ny kone til mit hus, var det netop på dette tidspunkt, at en omfattende og lige så fremragende vinhøst blev ført op på utallige pramme langs Donau, og overfloden af denne rigdom blev fordelt til vores Noricum (Østrig), så hele flodbredden i Linz var overstrøet med vintønder, der blev tilbudt til en overkommelig pris. Fordi min pligt som ægtemand og en god familiefader krævede at jeg forsynede mit hus med det nødvendige lager, lod jeg mange tønder hente til mit hus, for at opbevare dem der. Fire dage senere kom nu sælgeren med en målestok (visierrute), som han brugte som det eneste værktøj, for at opmåle alle tønder uden at tage hensyn til deres form eller foretage eventuelle beregninger. Han satte spidsen af jernstangen skævt ned i spunsen af den fulde tønde indtil den nåede bunden af det cirkulære trælåg, som vi i det lokale sprog kalder basen. Når han på denne måde havde fundet begge sider af længden fra toppen af fadrundingen til det laveste punkt i de to cirkulære baser, fandt han på staven det mærke, der svarede til det punkt, hvor denne længde ophørte, og angav antallet af spande vin, der var hældt op i tønden, og satte det fastlagte antal i forhold til prisen.

Det virkede underligt, hvis det skulle være muligt at afgøre rumfanget af en halv tønde alene ud fra den fastlagte linje på tværs af tønden, og jeg var i tvivl om pålideligheden af disse målinger. "

Opmåling af vintønder (*Kilde ukendt*). Vintønden opmåles med en målestok. (*se yderligere:* www.keplerraum.at)



Opmåling af vintønder (*Kilde: Adrianus Metius 1633*). Vintønden opmåles ved at finde længderne *OB* og *OE* fra spunshullet *O* til bundpunkterne *B* og *E*.

Visierrute (1600-tallet, Dresden) i træ med sølvbeslag.
(se yderligere: http://skd-online-collection.skd.museum/de/contents/show?id=50475)

Kepler kastede sig straks over problemet med såvel at finde rumfanget for vintønden teoretisk som at angive praktiske metoder til opmåling af vintønder. Resultatet blev skriftet Stereometria Doliorum Vinarium (rumfangsberegninger for vintønder) fra 1615, som han indledte med et længere supplement til Archimedes, hvor han forenklede Archimedes argumenter for rumfangsberegninger af omdrejningslegemer frembragt af keglesnit. Det lykkedes Kepler at udvide repertoiret for legemer, som man kunne finde rumfanget af. Fx fandt han rumfanget for en torus (badering) og det lykkedes også at finde passende modeller for vintønder, så han kunne håndtere problemet teoretisk.

Ideen med brugen af en visierrute (målestok) kan forklares således: Hvis tønden havde form som en cylinder kunne man have brugt en såkaldt planimetrisk viserrute

© 2019 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 9788770668781

forsynet med en lineær skala til opmåling af afstande og en kvadratisk skala til angivelse af (cirkelformede) arealer. Ved at stikke viserruten lodret ned gennem spunshullet kunne man derfor finde tværsnitsarealet, ved at holde den på langs af tønden kunne man finde tøndens dybde. Produktet af de to giver nu netop cylinderens rumfang: $V = A \cdot h$.

Men de østrigske vintønder måles med et kubisk visier eller et såkaldt diagonalvisier, der angiver rumfanget direkte. Det bygger på det forhold at for to ligedannede vintønder er forholdet mellem rumfangene det samme som kuben (dvs. tredje potens) på forholdet mellem diagonalerne. Det forudsætter at østrigske vintønder bygges i et bestemt forhold mellem højde og bredde. Kepler fandt da at forholdet for østrigske vintønder faktisk er optimalt, jf. projektet Keplers vintønder, B-bogen, kapitel 4.

Vintønder kan i første tilnærmelse modelleres med en cylinder, i anden omgang med to keglestubbe, se figur.

Øvelse 1

a) Gør rede for at den *indskrevne cylinder* med højden *h* frembragt af endefladen med diameteren *d* og den *omskrevne cylinder* frembragt af bugen med diameteren *D* har rumfangene

$$V_{\text{indskreven cylinder}} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \,, \quad V_{\text{omskreven cylinder}} = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot h \,.$$

b) Gør rede for at *de to keglestubbe* tilsammen har rumfanget

$$V_{\text{to keglestubbe}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(D^2 + D \cdot d + d^2 \right) \cdot h$$

Keplers tønderegel fremkommer ved en simpel modifikation af reglen for keglestubbene. De to keglestubbe giver et resultat, der er lidt for lille: Ved at erstatte *d* med *D* i det midterste produkt $D \cdot d$ fås et lidt større rumfang, der ligger mellem de to keglestubbe og den omskrevne cylinder:

Sætning 1: Keplers tønderegel

En vintøndes rumfang er med tilnærmelse givet ved

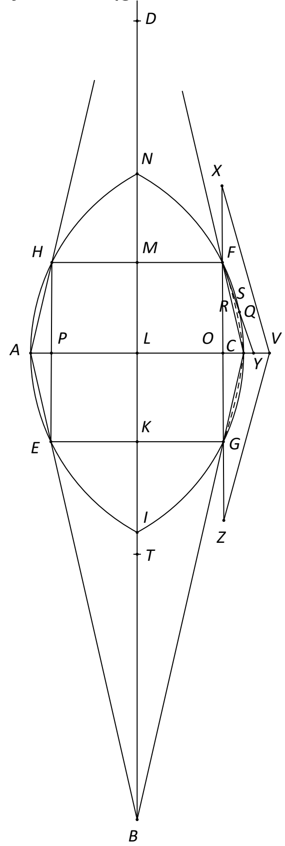
$$V \approx \frac{\pi}{6} \cdot \left(2D^2 + d^2 \right) \cdot h$$

Øvelse 2

For Østrigske vintønder fandt Kepler at der med god tilnærmelse gælder $h = \sqrt{2} \cdot d$.

Gør rede for at rumfanget af den indre cylinder med god tilnærmelse er givet ved $V = 0.60 \cdot s^3$ hvor *s* er længden af visieret (Keplers visierregel).

Opmåling af vintønde med planimetrisk visierrute (*Kilde:Adam-Ries-museum, billede fra vinkælderen bygget ca. 1500*). Annaberg-Buchholz, Tyskland (grænsen mod Tjekkiet).



Keplers figur til modellering af Østrigske vintønder.

Den østrigske vintønde har form som en udbulet cylinder, eller mere præcist: Man kan tænke på den som værende sammensat af to keglestubbe, hvis modsatte ender er skåret i gennem af trælåg, og deres fælles basis, der adskiller de to keglestubbe, udgøres af den største cirkel langs bugen af tønden.

I figuren er *HEFG* cylinderen, *ABC* den ene kegle, og den anden strækker sig tilsvarende fra *AC* til *ND*. Den ene afgrænses af en afstumpet keglespids EBG, den anden afskæres af HF. De to keglestubbe udgøres af AEGC og AHFC, med den fælles grundflade *AC*.

© 2019 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

KOPIERING FORBUDT

ISBN 9788770668781

Men for at få alvor styr på krumningen må Kepler kigge på omdrejningslegemer frembragt af krumme kurver, og her støtter han sig især til den omfattende teori for keglesnit, der var overleveret fra antikken. Men det lykkes ikke for Kepler at finde en generel metode til rumfangsberegninger og han støder flere steder panden imod en mur.

Hvad der gælder for cylindrene og keglestubbene kan også anvendes på en tønde, fordi den kun afviger lidt fra den cylindriske form, ligesom formen af de to keglestubbe afviger endnu mindre, så længe stavene på tønden, som her repræsenteres af kurven CRF kun buer lidt udad.

Øvelse 3
Kepler forfiner også modellen for en vintønde ved at inddrage keglesnit:

> *På fuldstændigt samme måde er den midterste del af enhver tønde frembragt af en cirkelformet udsnit af en citron eller et lodret elliptisk segment eller en parabolsk blomme, men for det meste en hyperbolsk spindel med lige store afskårne stykker fra toppunkterne på begge sider. Grunden til at jeg fremhæver den hyperbolsk spindel er at tønderne fortrinsvis krummer på midten, og at de går over i en kegleflade mod enderne, så at låget lettere kan sluttes til og dermed fæstnes bedre. Dette er faktisk tilfældet for begge hyperblerne og de deraf frembragte spindler idet deres grene gradvist overgår fra krumningen i midten til de retlinjede asymptoteretninger. Det samme gælder i et vist omfang også den parabolske spindel og den elliptiske blomme; tydeligst er det dog ved den hyperbolske spindel, noget mindre ved den elliptiske blomme, om end ikke for enhver omdrejningsellipsoide, kun dem, der er frembragt af et lodret ellipsesegment, hvis akse efter afstumpningen ikke når helt op til brændpunktet; den samme begrænsning gælder for den parabolske spindel. I en oliven, som er frembragt fra et punkt mellem toppene af ellipsesegmentet, finder det modsatte sted, fordi den ud mod enderne bøjer kraftigere end i midten og dermed afviger mere fra tøndefiguren. Alligevel vil jeg ikke benægte, at man nogle gange kan støde på en tønde, der har form som en afskåret oliven, men ikke på grund af en tilsigtet udformning fra håndværkeren, men på grund af en fejl i udførslen.*

Læs beskrivelsen igennem og prøv at illustrere Keplers brug af keglesnit og frugter til at modellere en vintønde. Hvad er fx en citron, en blomme, en oliven? (I sin bog benytter Kepler også æbler og kvæder som modeller for rumlige legemer)

Betydningen af Keplers vintønder er derfor først og fremmest at han stimulerede integralregningens udvikling: Hans udfordringer blev taget op af især de italienske matematikere Cavalieri og Torricelli (elever af Galilei). Først med den generelle metode udviklet af Newton (og uafhængigt heraf af Leibniz) lykkedes det at finde en generel metode til rumfangsberegninger. Samtidigt lykkedes det at systematisere rumfangsformlerne og påvise at et forbløffende stort antal rumfangsberegninger kan føres tilbage til en enkelt universel formel, *prismatoidformlen*.

© 2019 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT