

Projekt 2.17 Fysik: Potentiell energi af en homogen kugle

(Dette projekt er et uddrag fra det store studieretningskapitel: Dorthe Agerkvist og Michael Olesen: Hvad er matematik? 3, kapitel 11, Samarbejde Matematik-Fysik.)

Solen blev dannet ved sammentrækning af en gigantisk gassky. Under sammentrækningen mistede skyen potentiell energi, hvoraf halvdelen blev udstrålet som varmestråling, mens den anden halvdel gik til at varme gassen op.

Vi vil nu bruge udtrykket for den potentielle energi for en genstand i et tyngdefelt til at beregne den potentielle energi af denne gassky. For at forsimple udregningerne antager vi, at kuglen er homogen; dvs. at den har samme densitet overalt.

Vi vil altså forestille os et legeme med massen M og radius R , der overalt har den konstante densitet $\rho = M/V$ givet ved:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}.$$

Massen af legemet kan altså skrives som $M = \rho \cdot \frac{4\pi}{3}R^3$, og da densiteten jo er konstant, er massen indenfor en radius

r tilsvarende givet ved $m(r) = \rho \cdot \frac{4\pi}{3}r^3$.

Figuren viser en kugleskal med tykkelse dr i afstanden r fra centrum af legemet. Massen af kugleskallen er $dm = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$.

Man kan vise, at hvis massen er symmetrisk fordelt (hvilket jo specielt er tilfældet for en homogen kugle), så er det kun massen $m(r)$ indenfor radius r der påvirker en genstand i denne afstand. Tilsvarende er det kun denne masse, der er relevant for den potentielle energi.

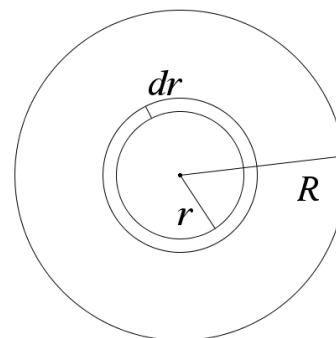
Kugleskallens potentielle energi er altså

$$dE_{\text{pot}} = -G \frac{m(r)dm}{r}.$$

Den samlede potentielle energi får man ved at integrere udtrykket ud til radius af legemet R (Gør selv omhyggeligt rede for hvert trin i omskrivningen):

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \int_0^R -G \frac{m(r)dm}{r} \\ &= \int_0^R -G \frac{\rho \cdot \frac{4\pi}{3}r^3 \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{r} \\ &= \int_0^R -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot r^4 dr \\ &= -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R \\ &= -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot \frac{1}{5} R^5 \end{aligned}$$

Vi omskriver nu det sidste udtryk, idet vi gerne vil have indført massen M (se ovenfor)



$$E_{\text{pot}} = -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot \frac{1}{5} R^5$$

$$= -\frac{3}{5} G \frac{\frac{4\pi}{3} \rho R^3 \cdot \frac{4\pi}{3} \rho R^3}{R}$$

$$= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Opgave 1 Solen dannes ud fra en enorm gassky, der over en lang periode trækker sig sammen. Antag, at gasskyen falder sammen til en homogen kugle med Solens masse og radius.

- Beregn den frigivne potentielle energi under sammentrækningen af gasskyen.
- Hvor længe kan gasskyen lyse med Solens lysstyrke, hvis al energien skal komme fra gravitationel potentiel energi?

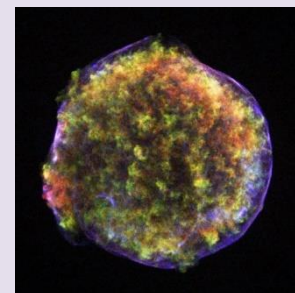
Opgave 2 Kæmpestjerner dør med maner! De ender deres dage i en enorm eksplosion kaldet en *supernova*. I denne eksplosion slynges størstedelen af stjernens masse ud i det interstellare rum, mens kernen falder sammen til et sort hul eller en neutronstjerne. Neutronstjerner er supermassive objekter, der næsten udelukkende består af neutroner. Man kan forestille sig en enorm atomkerne bestående af omkring 10^{57} neutroner.

Antag, at der dannes en neutronstjerne med en radius på 10 km og en masse på 1,4 gange Solens masse.

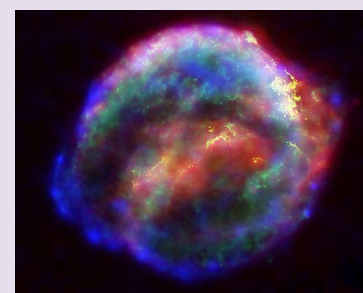
- Beregn den frigivne potentielle energi.

Supernovaens energi udsendes i løbet af nogle måneder.

- Beregn, hvor meget energi Solen udsender på et år.
- Giv et overslag af hvor mange stjerner af Solens type, der skal til for i løbet af et år at udsende den samme energi som en supernova. Sammenlign med, at man regner med, at vores galakse Mælkevejen består af ca. 200 mia. stjerner.



Tycho Brahes *Stella Nova*
opdaget 1572



Keplers supernova
opdaget 1604

Opgave 3 Den nydannede Jord antages at have været så varm, at den i mange millioner år var flydende.

- Beregn, hvor meget potentiel energi der blev frigivet, da Jorden blev dannet.

Halvdelen af den potentielle energi udsendes som varmestråling, mens resten går til opvarmning af Jorden. Antag at ca. en tredjedel af Jorden er jern, mens resten består af klippe (granit eller basalt).

- Vil det være nok til at opvarme Jorden til smeltepunktet?