ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 2.16 Fysik: Inertimomenter beregnet ved integralregning

(*Dette projekt er et uddrag fra det store studieretningskapitel: Dorthe Agerkvist og Michael Olesen: Hvad er matematik? 3, kapitel 11, Samarbejde Matematik-Fysik.*)

Ofte vil man i fysik se bort fra et legemes udstrækning, men det kan man ikke altid. For stive legemer bruger man begrebet *inertimoment* i stedet for massen af et stift legeme. I inertimomentet tager man hensyn til både masse og udstrækning, for det har stor betydning, i hvilken afstand massen er placeret i forhold til den akse, man betragter. Inertimomentet I *mht. en bestemt akse* er summen af produkterne af de enkelte massedeles masser og kvadratet på deres afstand fra aksen.

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

Man vil ofte bruge integralregning til at beregne inertimomentet, da man ikke altid kan sige, at massen er i en bestemt afstand. Så skriver man

$$I = \int r^2\, dm$$

Vi vil nu beregne inertimomentet af en stang for en akse gennem midtpunktet, vinkelret på stangen. For at beregne dette for en stang med længde L og masse M for en akse gennem midten af stangen vinkelret på stangen inddeles stangen i små dele med længden dx og massen dm. Massen af den enkelte del kan beregnes som

$$dm = \frac{M}{L} \cdot dx$$

Nu kan vi integrere og finde inertimomentet (*Gør selv rede for hvert trin i omskrivningerne*):

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dm \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \frac{M}{L} \cdot dx \\
&= \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dx \\
&= \frac{M}{L} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} \\
&= \frac{M}{3L} \cdot \left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3 \right) \\
&= \frac{M}{3L} \cdot \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) \\
&= \frac{M}{3L} \cdot \frac{L^3}{4} = \frac{1}{12} ML^2
\end{aligned}$$

Opgave 1	Beregn inertimomentet for en stang med længde L og masse M *mht. en akse, der står vinkelret på stangen, og går gennem et endepunkt*.

Eksempel 1 Som eksempel vil vi nu beregne inertimomentet af en cirkelskive, *mht. aksen gennem centrum, og vinkelret på skiven*. Skiven har massen M og radius R. Nu opdeles skiven i koncentriske cirkelringe med bredden dr. Hvis en af disse cirkelringe rettes ud, vil den næsten være et rektangel med arealet $2\pi \cdot r \cdot dr$, da bredden er dr, og længden er $2\pi \cdot r$. Jo mindre vi vælger dr til at være, jo bedre passer det.
Hvis man skal have massen af cirkelringen, har man brug for masse pr. areal, her kaldet densiteten, ρ. Denne kan findes som massen af skiven divideret med arealet

$$\rho = \frac{M}{\pi \cdot R^2}$$

ISBN 9788770668781

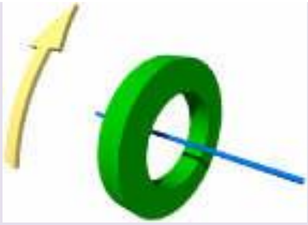
Massen af en cirkelring er så

$$dm = \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = \frac{M}{\pi \cdot R^2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = \frac{2M}{R^2} \cdot r \cdot dr$$

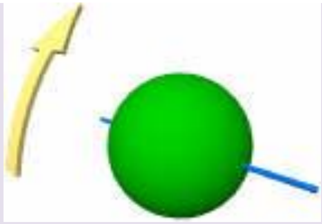
Nu kan inertimomentet beregnes

$$I = \int_0^R r^2\, dm = \int_0^R r^2 \cdot \frac{2M}{R^2} \cdot r \cdot dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \int_0^R r^3\, dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R = \frac{1}{2} MR^2 .$$

Opgave 1 Vis, at en cirkelring med massen *M*, ydre radius R_{ydre} og indre radius R_{indre}, har inertimomentet $\frac{1}{2} M(R_{ydre}^2 + R_{indre}^2)$ *mht. en akse gennem centrum og vinkelret på ringen*.



Opgave 3 Vis, at en kugle med radius R og massen M har inertimomentet $\frac{2}{5} MR^2$ *mht. en akse gennem centrum.*



Øvelse 1 **Translatorisk energi og Rotationsenergi for en kugle der triller**

Når en kugle triller ned ad et skråplan, vil den potentielle energi blive gradvist omdannet til kinetisk energi. Den kinetiske energi vil her have to bidrag, nemlig en translatorisk kinetisk energi (den sædvanlige kinetiske energi) og en rotationsenergi. Der vil altså gælde, at

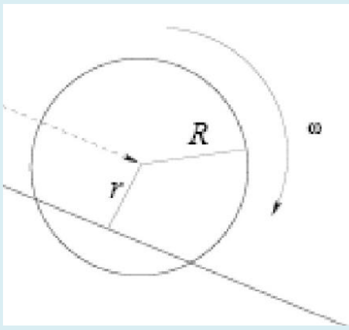
$$E_{pot} = E_{trans} + E_{rot}$$

Kuglens rotations energi kan findes af

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

hvor I er kuglens inertimoment, og ω er kuglens vinkelhastighed. Vinkelhastigheden kan findes ud fra hastigheden v som

$$\omega = \frac{v}{R} .$$



Her er R kuglens radius. Nu indsættes det i formlen for rotationsenergi sammen med en kugles inertimoment

$$I = \frac{2}{5} m \cdot R^2 \ :$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2$$

Lav et skråplan med en vis hældning (ikke for stor) ved at sætte et par bøger under et bord. Bestem hældningen α af bordet.

ISBN 9788770668781

Lad en kugle trille ned ad bordet. Optag en film af kuglen, der triller ned og analyser filmen bagefter, så man får samhørende værdier af tid, sted (både x og y værdi) og hastighed af kuglen.

Beregn derefter E_{pot}, E_{trans} og E_{rot}, og undersøg, om der er energibevarelse. Som nulpunkt kan man vælge, der, hvor kuglen er lavest.

Lav en tilsvarende undersøgelse for to andre hældninger af bordet. Er der forskel på resultatet?

Øvelse 2 **Hvad kommer hurtigst ned, en hul eller en fyldt cylinder?**

Lad en hul og en fyldt cylinder trille ned ad et skråplan. Undersøg hvad der kommer hurtigst ned. Giv en fysisk forklaring på dette.