

Projekt 2.15 Stamfunktion til tangens

Vi vil finde stamfunktionen til $\tan(x)$, dvs. udregne det ubestemte integral $\int \tan(x) dx$.

Vi anvender definitionen på tangens som:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Skal vi frem til at udnytte substitution, skal udtrykket omskrives til et produkt, hvor den ene faktor er en sammensat funktion, hvis indre funktion kan opfattes som den afledede til den anden funktion. Det er tegnet på, at vi kan få integralet til at gå op.

Øvelse 1.

Opskriv substitutionsmetoden på en form, hvor du umiddelbart kan anvende den.

Giv et selvvalgt eksempel på substitutionsmetoden.

Vi foretager nu omskrivninger, hvor de forklarende bemærkninger er fjernet, dem skal du selv sætte på:

$$\begin{aligned} \int \tan(x) dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \\ &= \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx \\ &= -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) dx \\ &= -\int \frac{1}{u} du && \text{Substituer } \cos(x) = u \text{ samt } -\sin(x) dx = du \\ &= -\ln(|u|) + k \\ &= -\ln(|\cos(x)|) + k && \text{Substituer tilbage } u = \cos(x) \end{aligned}$$

Stamfunktionen til $\tan(x)$ er altså $-\ln(|\cos(x)|)$.

Øvelse 2.

Forklar i alle detaljer, hvad der skete i den omskrivning og i den afsluttende integration.

Øvelse 3.

Hvorfor er der anvendt numerisk tegn om variabelen u og om $\cos(x)$?