ISBN 9788770668781

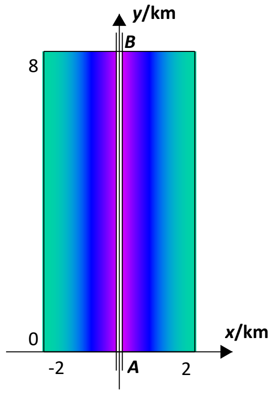
Projekt 2.14 Rektangulær byplanlægning

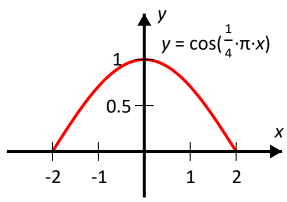
En by er vokset op omkring en hovedlandevej *AB* indenfor et rektangulært område med længden 8 km og bredden 4 km. Den samlede befolkning i byen har de sidste tyve år været 20 000 indbyggere. Befolkningstætheden er størst i midten og aftager ud mod siderne, men der er sket en forskydning i befolkningstætheden i løbet af de 20 år.

For tyve år siden blev det anslået at befolkningstætheden varierede som en cosinusfunktion:

$$\rho(x) = A\cdot\cos(\tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot x) \text{ for } -2 \le x \le 2$$

hvor *x* angiver afstanden til landevejen *AB*. Vi vil bestemme konstanten *A*. Vi bestemmer da den samlede befolkning *P* som en passende sum og går til grænsen, hvor summen erstattes af et integral.





Da befolkningstætheden kun afhænger af afstanden til hovedlandevejen, kan vi opdele byen i *N* ækvidistante striber:

$$x_0 = -2, x_1, \ldots, x_N = 2$$

med bredden:

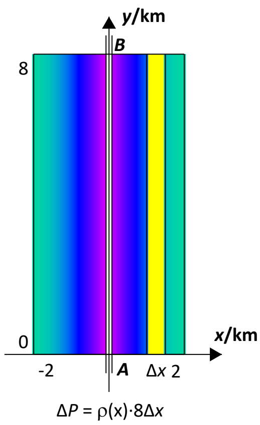
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \tfrac{4}{N}$$

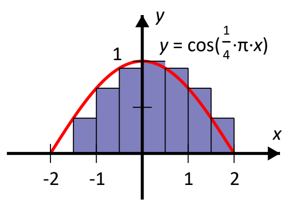
Indenfor en smal stribe er befolkningstætheden tilnærmelsesvis konstant, og vi kan derfor finde antallet af indbyggere ΔP_i indenfor striben som produktet af stribens areal $8\cdot\Delta x$ og befolkningstætheden $\rho(x)$ dvs.:

$$\Delta P_i = \rho(x_i)\cdot 8\cdot\Delta x_i = 8\cdot A\cdot\cos(\tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot x_i)\cdot\Delta x_i$$

Lægger vi bidragene fra striberne sammen fås den samlede befolkning:

$$P \approx \sum_{i=1}^{N}\Delta P_i = \sum_{i=1}^{N} 8\cdot A\cdot\cos(\tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot x_i)\cdot\Delta x_i$$





Gør vi striberne smallere bliver tilnærmelsen bedre og i grænsen, hvor Δx går mod nul, konvergerer middelsummen mod integralet. Den samlede befolkning er derfor givet ved integralet.

$P = \int_{-2}^{2} 8\cdot A\cdot\cos(\tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot x)\,dx$	Regn i radianer
$= 8\cdot A\cdot\int_{-2}^{2}\cos(\tfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot x)\,dx$	Sæt konstant udenfor
$= 8\cdot A\cdot\dfrac{4}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\cdot\pi}^{\frac{1}{2}\cdot\pi}\cos(x)\,dx$	Anvend regel om lineær substitution
$= \dfrac{32}{\pi}\cdot A\cdot\left[\sin(x)\right]_{x=-\frac{1}{2}\cdot\pi}^{x=\frac{1}{2}\cdot\pi}$	Udregn integral
$= \dfrac{32}{\pi}\cdot A\cdot\left(\sin(\tfrac{1}{2}\cdot\pi) - \sin(-\tfrac{1}{2}\cdot\pi)\right)$	Indsæt grænser
$= \dfrac{64}{\pi}\cdot A$	Reducer

Da den samlede befolkning er 20 000 kan vi nu fastlægge parameteren *A*:

$$20000 = \frac{64}{\pi}\cdot A \quad\Rightarrow\quad A = \frac{20000\pi}{64} \approx 981.748$$

For tyve år siden var befolkningstætheden derfor modelleret ved:

$$\rho(x) = 981.75 \cdot \cos(\tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot x)$$

Den maksimale befolkningstæthed er altså 981.75 indbyggere pr. km^2. Hvis vi fx ønsker at finde den afstand til bymidten, der rummer halvdelen af indbyggerne, kan vi tilsvarende finde det ved at løse en ligning:

$$\int_{-x_0}^{x_0} 8 \cdot 981.748 \cdot \cos(\tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot x)\,\mathrm{dx} = 10000$$

og med et værktøjsprogram får vi:

$$\mathrm{solve}(\int_{-x_0}^{x_0} 8 \cdot 981.748 \cdot \cos(\tfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot x)\,\mathrm{dx} = 10000, x_0) \,|\, 0 < x_0 < 2 \quad \% \quad x_0 = 0.6666$$

Halvdelen af indbyggerne boede altså indenfor den midterste tredjedel af byen for tyve år siden.

Øvelse 2.1

I dag skønner byrådet, at befolkningstætheden falder eksponentielt med afstanden til hovedlandevejen og benytter derfor en model af formen:

$$\rho(x) = B \cdot \exp(-|x|)$$

a) Bestem parameteren *B* ved at opstille et integral for den samlede befolkning på 20 000.

b) Hvor stor er den maksimale befolkningstæthed i dag ifølge denne model?

c) Bestem den afstand x_0 til hovedlandevejen hvor indenfor halvdelen af indbyggerne bor i dag.

d) Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver udviklingen i forholdet mellem befolkningstætheden for tyve år siden og befolkningstætheden i dag, og tegn grafen. Kommenter grafens forløb.