L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 2.13: Arealer for fjerdegradspolynomier - eksperimenter og bevis

Bemærkning: I de følgende øvelser ser vi på skæring mellem graferne for andengradspolynomier og fjerdegradspolynomier. Vi får herunder brug for det *approksimerende andengradspolynomium* til et punkt på en graf for en differentiabel funktion. Det er det andegradspolynomium, der går gennem grafpunktet i samme retning som grafen, dvs. med den samme tangent og som har den samme hulhed i grafpunktet, dvs. den samme værdi af den anden afledede. Der findes en kommando i CAS-værktøjer, typisk kaldet noget i retning af $taylor(q(x), x, 2, x_0)$ for *taylorpolynomiet* af anden grad, der automatisk udregner forskriften for dette polynomium. Du kan læse mere om taylorpolynomier i et projekt i A-bogen.

1. del: Nogle konkrete arealer

Som opvarmning kigger vi på nogle konkrete arealer for fjerdegradspolynomiet $p(x) = -x^4 + x^3$.

a) Tegn grafen for fjerdegradspolynomiet og markér nulpunkterne P_0 og P_1.

b) Grafen for fjerdegradspolynomiet og x-aksen afgrænser et område M_0 i første kvadrant med arealet T_0. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet T_0.

c) Grafen for fjerdegradspolynomiet har et maksimumspunkt Q_0 i første kvadrant. Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til maksimumspunktet Q_0.

d) Området M_0 er indesluttet i et rektangel, hvor to af siderne ligger på koordinatakserne, mens de to sidste sider går henholdsvis gennem maksimumspunktet Q_0 og det sidste nulpunkt P_1 på x-aksen. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet af dette rektangel.

e) Find til slut forholdet k mellem arealet af rektanglet og arealet T_0 for området M_0.

2. del: Nogle tilfældige arealer

Vi kigger derefter på grafen for et vilkårligt fjerdegradspolynomium. Vælg derfor et tilfældigt fjerdegradspolynomium $q(x)$ med heltallige koefficienter mellem -10 og 10. Mange programmer har en kommando noget i retning af randpoly$(x,4)$, der netop udtrækker et tilfældigt fjerdegradspolynomium.

f) Tegn grafen for dit fjerdegradspolynomium $q(x)$ og vælg et tilfældigt punkt $P_0 = (x_0, q(x_0))$ på grafen, hvor den eneste restriktion er at P_0 *ikke* må være aksepunktet (med $x = -\dfrac{b}{4a}$) for grafen til fjerdegradspolynomiet. Konstruér det approksimerende andengradspolynomium t_0 til grafen med røringspunkt i P_0 Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for andengradspolynomiet t_0.

g) Grafen for det approksimerende andengradspolynomium t_0 skærer grafen for fjerdegradspolynomiet q i endnu et punkt P_1. Graferne for fjerdegradspolynomiet q og det approksimerende andengradspolynomium t_0 afgrænser et område M_0 med arealet T_0. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet T_0.

h) Indenfor området M_0 ser vi nu på den lodrette forskel mellem grafen for fjerdegradspolynomiet q og det approksimerende andengradspolynomium t_0. Denne forskel har et maksimum i et grafpunkt Q_0 for fjerdegradspolynomiet og et grafpunkt R_0 for andengradspolynomiet. Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til Q_0 og R_0 såvel som værdien h_0 af den maksimale forskel.

i) Området M_0 er indesluttet i et parallelogram, hvor to af siderne er lodrette og går gennem P_0 henholdsvis P_1. Den tredje side ligger på tangenten til andengradspolynomiet i R_0 og den sidste side ligger på tangenten til fjerdegradspolynomiet i Q_0. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet af dette parallelogram.

j) Find til slut forholdet k mellem arealet af parallelogrammet og arealet T_0 for området M_0.

k) Sammenhold resultaterne i den første del og anden del af øvelsen. Kommentér!

Udfordring: Kan du bevise det fundne resultat? Du kan enten forsøge at føre et rent symbolsk bevis for det generelle fjerdegradspolynomium $p(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$ eller forsøge at argumentere via prototyper, idet du først nøje overveje sammenhængen mellem situationen i første del og anden del og hvordan man kan transformere anden del tilbage til første del.

3. del: Flere konkrete arealer

Denne del er en udbygning af første del, så i det følgende forudsættes det, at du er fortrolig med løsningen af første del . Vi kigger altså igen på grafen for fjerdegradspolynomiet $p(x)=-x^4+x^3$.

l) Nulpunkterne for fjerdegradspolynomiet kaldes som før P_0 og P_1.

m) Grafen for fjerdegradspolynomiet og *x*-aksen afgrænser som før et område M_0 i første kvadrant med arealet T_0. Bestem nu det approksimerende andengradspolynomium t_1 med røringspunkt i det højre nulpunkt P_1 for grafen.

n) Grafen for det approksimerende andengradspolynomium t_1 skærer grafen for fjerdegradspolynomiet *p* i endnu et grafpunkt P_2. Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til P_2.

o) Grafen for fjerdegradspolynomiet afskærer sammen med grafen for det approksimerende andengradspolynomium t_1 et område M_1 med arealet T_1. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet T_1.

p) Find til slut forholdet *k* mellem arealerne T_1 og T_0.

4. del: Flere tilfældige arealer

Vi kigger nu igen på grafen for et vilkårligt fjerdegradspolynomium. Vælg derfor igen et tilfældigt fjerdegradspolynomium $q(x)$ med heltallige koefficienter mellem -10 og 10.

q) Tegn grafen for dit tilfældige fjerdegradspolynomium $q(x)$ og vælg et tilfældigt punkt $P_0=(x_0,q(x_0))$ på grafen, hvor den eneste restriktion er at P_0 *ikke* må være aksepunktet for grafen til fjerdegradspolynomiet. Konstruér det approksimerende andengradspolynomium t_0 til grafen for fjerdegradspolynomiet med røringspunkt i P_0. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for det approksimerende andengradspolynomium t_0.

r) Grafen for det approksimerende andengradspolynomium t_0 skærer grafen for fjerdegradspolynomiet *q* i endnu et punkt P_1. Graferne for fjerdegradspolynomiet $q(x)$ og det approksimerende andengradspolynomium t_0 afgrænser et område M_0 med arealet T_0. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet T_0.

s) Konstruér nu det approksimerende andengradspolynomium t_1 med røringspunkt i det højre nulpunkt P_1 for grafen. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for t_1.

t) Graferne for fjerdegradspolynomiet $q(x)$ og det approksimerende andengradspolynomium t_1 afskærer et område M_1 med arealet T_1. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet T_1.

u) Find til slut forholdet *k* mellem arealerne T_1 og T_0.

v) Sammenhold resultaterne i den tredje del og fjerde del af øvelsen. Kommentér!

Udfordring: Kan du bevise det fundne resultat? Du kan enten forsøge at føre et rent symbolsk bevis for det generelle fjerdegradspolynomium $p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ eller forsøge at argumentere via prototyper, idet du først nøje overveje sammenhængen mellem situationen i første del og anden del og hvordan man kan transformere anden del tilbage til første del.

ISBN 9788770668781

5. del: Om en arealfunktion knyttet til fjerdegradspolynomier.

Vi vil nu forsøge at koble alle de foregående øvelser sammen! Vi har i flere omgange set på fjerdegradspolynomiet $p(x) = -x^4 + x^3$.

w) Fastlæg aksepunktet $A(x_A = -\frac{b}{4a}, y_A)$ for fjerdegradspolynomiet $p(x)$. Fastlæg *x*-koordinaterne til grafpunkterne $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ og $P_2(x_2, y_2)$. Hvordan ligger *x*-koordinaterne x_0, x_1 og x_2 i forhold til aksepunktets x-koordinat x_A? Hvis vi tegnede grafen for det approksimerende andengradspolynomium t_2 gennem P_2, hvor ville den så skære grafen? Hvilket areal T_2 ville den afsnøre? Kan du nu udfylde tabellen

Grafpunkt	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	…
x-koordinat	0	1						
Areal								

x) Kan du køre tabellen baglæns? Hvilket approksimerende andengradspolynomium t_{-1} rammer grafen i P_0? Hvad bliver x-koordinaten til røringspunktet P_{-1}? Hvad bliver det tilhørende areal T_{-1}? Hvad bliver ligningen for variabelsammenhængen mellem *x*-koordinaten og arealet? Tegn grafen og prøv fx om du kan finde den med en passende regression?

Kig nu igen på et tilfældigt fjerdegradspolynomium *q*(*x*):

y) Fastlæg aksepunktet $A(x_A = -\frac{b}{4a}, y_A)$ for fjerdegradspolynomiet $q(x)$. Fastlæg *x*-koordinaterne til grafpunkterne $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ og $P_2(x_2, y_2)$, hvor du selv vælger en tilfældig værdi for x_0. Hvordan ligger *x*-koordinaterne x_0, x_1 og x_2 i forhold til aksepunktets x-koordinat x_A? Hvis vi tegnede det approksimerende andengradspolynomium t_2 gennem P_2, hvor ville den så skære grafen? Hvilket areal T_2 ville den afsnøre? Kan du nu udfylde tabellen

Grafpunkt	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	…
x-koordinat								
Areal								

z) Hvad bliver ligningen for variabelsammenhængen mellem *x*-koordinaten og arealet? Tegn grafen og prøv fx om du kan finde den med en passende regression?

Udfordring: Til et vilkårligt fjerdegradspolynomium $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ kan vi nu knytte en arealfunktion $T(x_0)$, der angiver arealet afsnøret af grafen for fjerdegradspolynomiet og det approksimerende andengradspolynomium med røringspunkt i $x = x_0$. Prøv nu at finde forskriften for arealfunktionen *T* ved hjælp af en symbolsk udregning. Prøv herefter at forklare hvorfor denne type funktion netop fører til en sammenhæng mellem arealerne, som svarer til den ovenfor fundne sammenhæng mellem to på hinanden følgende arealer. Det kan være nemmere at se sammenhængen hvis du forskyder koordinatsystemet, så aksepunktet for fjerdegradspolynomiet ligger på *y*-aksen, dvs. så *b* = 0.