**ISBN 9788770668781**


# Projekt 2.12 Arealer for tredjegradspolynomier - eksperimenter og bevis

## 1. del: Nogle konkrete arealer

Som opvarmning kigger vi på nogle konkrete arealer for tredjegradspolynomiet $p(x) = -x^3 + x^2$.

a) Tegn grafen for tredjegradspolynomiet og markér nulpunkterne $P_0$ og $P_1$.

b) Grafen for tredjegradspolynomiet og *x*-aksen afgrænser et område $M_0$ i første kvadrant med arealet $T_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$.

c) Grafen for tredjegradspolynomiet har et maksimumspunkt $Q_0$ i første kvadrant. Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til maksimumspunktet $Q_0$.

d) Området $M_0$ er indesluttet i et rektangel, hvor to af siderne ligger på koordinatakserne, mens de to sidste sider går henholdsvis gennem maksimumspunktet $Q_0$ og det sidste nulpunkt $P_1$ på *x*-aksen. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet af dette rektangel.

e) Find til slut forholdet *k* mellem arealet af rektanglet og arealet $T_0$ for området $M_0$.

## 2. del: Nogle tilfældige arealer

Vi kigger derefter på grafen for et vilkårligt tredjegradspolynomium. Vælg derfor et tilfældigt tredjegradspolynomium $q(x)$ med heltallige koefficienter mellem -10 og 10. Mange programmer har en kommando noget i retning af randpoly($x$,3), der netop udtrækker et tilfældigt tredjegradspolynomium.

f) Tegn grafen for dit tredjegradspolynomium $q(x)$ og vælg et tilfældigt punkt $P_0 = (x_0, q(x_0))$ på grafen, hvor den eneste restriktion er at $P_0$ *ikke* må være vendepunktet for grafen. Konstruér tangenten $t_0$ til grafen med røringspunkt i $P_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for tangenten $t_0$.

g) Tangenten $t_0$ skærer grafen for tredjegradspolynomiet *q* i endnu et punkt $P_1$. Grafen for tredjegradspolynomiet $q$ og tangenten $t_0$ afgrænser et område $M_0$ med arealet $T_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$.

h) Indenfor området $M_0$ ser vi nu på den lodrette forskel mellem grafen for tredjegradspolynomiet *q* og tangenten $t_0$. Denne forskel har et maksimum i et grafpunkt $Q_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til $Q_0$ såvel som værdien $h_0$ af den maksimale forskel.

i) Området $M_0$ er indesluttet i et parallelogram, hvor to af siderne er lodrette og går gennem $P_0$ henholdsvis $P_1$. Den tredje side ligger på tangenten og den sidste side går gennem grafpunktet $Q_0$ med den maksimale forskel. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet af dette parallelogram.

j) Find til slut forholdet *k* mellem arealet af parallelogrammet og arealet $T_0$ for området $M_0$.

k) Sammenhold resultaterne i den første del og anden del af øvelsen. Kommentér!

**Udfordring**: Kan du bevise det fundne resultat? Du kan enten forsøge at føre et rent symbolsk bevis for det generelle tredjegradspolynomium $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ eller forsøge at argumentere via prototyper, idet du først nøje overveje sammenhængen mellem situationen i første del og anden del og hvordan man kan transformere anden del tilbage til første del.

## 3. del: Flere konkrete arealer

Denne del er en udbygning af første del, så i det følgende forudsættes det, at du er fortrolig med løsningen af første del. Vi kigger altså igen på grafen for tredjegradspolynomiet $p(x) = -x^3 + x^2$.

l) Nulpunkterne for tredjegradspolynomiet kaldes som før $P_0$ og $P_1$.

m) Grafen for tredjegradspolynomiet og *x*-aksen afgrænser som før et område $M_0$ i første kvadrant med arealet $T_0$. Konstruér nu tangenten $t_1$ med røringspunkt i det højre nulpunkt $P_1$ for grafen. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for $t_1$.

n) Tangenten $t_1$ skærer graferne for tredjegradspolynomiet *p* i endnu et grafpunkt $P_2$. Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til $P_2$.

o) Grafen for tredjegradspolynomiet afskærer sammen med tangenten $t_1$ et område $M_1$ med arealet $T_1$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_1$.

p) Find til slut forholdet *k* mellem arealerne $T_1$ og $T_0$.

## 4. del: Flere tilfældige arealer

Vi kigger nu igen på grafen for et vilkårligt tredjegradspolynomium. Vælg derfor igen et tilfældigt tredjegradspolynomium $q(x)$ med heltallige koefficienter mellem -10 og 10.

q) Tegn grafen for dit tilfældige tredjegradspolynomium $q(x)$ og vælg et tilfældigt punkt $P_0 = (x_0, q(x_0))$ på grafen, hvor den eneste restriktion er at $P_0$ *ikke* må være vendepunktet for grafen. Konstruér tangenten $t_0$ til grafen med røringspunkt i $P_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for tangenten $t_0$.

r) Tangenten $t_0$ skærer grafen for tredjegradspolynomiet *q* i endnu et punkt $P_1$. Grafen for tredjegradspolynomiet $q(x)$ og tangenten $t_0$ afgrænser et område $M_0$ med arealet $T_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$.

s) Konstruér nu tangenten $t_1$ med røringspunkt i det højre nulpunkt $P_1$ for grafen. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for $t_1$.

t) Grafen for tredjegradspolynomiet afskærer sammen med tangenten $t_1$ et område $M_1$ med arealet $T_1$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_1$.

u) Find til slut forholdet *k* mellem arealerne $T_1$ og $T_0$.

v) Sammenhold resultaterne i den tredje del og fjerde del af øvelsen. Kommentér!

**Udfordring**: Kan du bevise det fundne resultat? Du kan enten forsøge at føre et rent symbolsk bevis for det generelle tredjegradspolynomium $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ eller forsøge at argumentere via prototyper, idet du først nøje overveje sammenhængen mellem situationen i første del og anden del og hvordan man kan transformere anden del tilbage til første del.

## 5. del: Om en arealfunktion knyttet til tredjegradspolynomier.

Vi vil nu forsøge at koble alle de foregående øvelser sammen! Vi har i flere omgange set på tredjegradspolynomiet $p(x)=-x^3+x^2$.

w) Fastlæg vendepunktet $S(x_S,y_S)$ for tredjegradspolynomiet $p(x)$. Fastlæg *x*-koordinaterne til grafpunkterne $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$ og $P_2(x_2,y_2)$. Hvordan ligger *x*-koordinaterne $x_0,x_1$ og $x_2$ i forhold til vendepunktets x-koordinat $x_S$? Hvis vi tegnede tangenten $t_2$ gennem $P_2$, hvor ville den så skære grafen? Hvilket areal $T_2$ ville den afsnøre? Kan du nu udfylde tabellen

| Grafpunkt | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x*-koordinat | 0 | 1 | | | | | | |
| Areal | | | | | | | | |

x) Kan du køre tabellen baglæns? Hvilken tangent $t_{-1}$ rammer grafen i $P_0$? Hvad bliver x-koordinaten til røringspunktet $P_{-1}$? Hvad bliver det tilhørende areal $T_{-1}$? Hvad bliver ligningen for variabelsammenhængen mellem *x*-koordinaten og arealet? Tegn grafen og prøv fx om du kan finde den med en passende regression?

Kig nu igen på et tilfældigt tredjegradspolynomium *q*(*x*):

y) Fastlæg vendepunktet $S(x_S,y_S)$ for tredjegradspolynomiet $q(x)$. Fastlæg *x*-koordinaterne til grafpunkterne $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$ og $P_2(x_2,y_2)$. Hvordan ligger *x*-koordinaterne $x_0,x_1$ og $x_2$ i forhold til vendepunktets x-koordinat $x_S$? Hvis vi tegnede tangenten $t_2$ gennem $P_2$, hvor ville den så skære grafen? Hvilket areal $T_2$ ville den afsnøre? Kan du nu udfylde tabellen

| Grafpunkt | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x*-koordinat | | | | | | | | |
| Areal | | | | | | | | |

z) Hvad bliver ligningen for variabelsammenhængen mellem *x*-koordinaten og arealet? Tegn grafen og prøv fx om du kan finde den med en passende regression?

**Udfordring**: Til et vilkårligt tredjegradspolynomium $p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ kan vi nu knytte en arealfunktion $T(x_0)$, der angiver arealet afsnøret af grafen for tredjegradspolynomiet og tangenten med røringspunkt i $x=x_0$. Prøv nu at finde forskriften for arealfunktionen *T* ved hjælp af en symbolsk udregning. Prøv herefter at forklare hvorfor denne type funktion netop fører til en sammenhæng mellem arealerne, som svarer til den ovenfor fundne sammenhæng mellem to på hinanden følgende arealer. Det kan være nemmere at se sammenhængen hvis du forskyder koordinatsystemet, så vendepunktet for tredjegradspolynomiet ligger på *y*-aksen, dvs. så *b* = 0.