**ISBN 9788770668781**



# Projekt 2.11 Arealer for andengradspolynomier – eksperimentér og bevis

## 1. del: Nogle konkrete arealer

Som opvarmning kigger vi på nogle konkrete arealer for andengradspolynomiet $p(x) = -x^2 + x$ .

a) Tegn grafen for andengradspolynomiet og markér *nulpunkterne* $P_0$ og $P_1$ .

b) Grafen for andengradspolynomiet og *x*-aksen afgrænser et område $M_0$ i første kvadrant med arealet $T_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$ .

c) Grafen for andengradspolynomiet har et maksimumspunkt $Q_0$ i første kvadrant (toppunktet for parablen). Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til maksimumspunktet $Q_0$ .

d) Området $M_0$ er indesluttet i et rektangel, hvor to af siderne ligger på koordinatakserne, mens de to sidste sider går gennem henholdsvis maksimumspunktet $Q_0$ og det sidste nulpunkt $P_1$ på *x*-aksen. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet af dette rektangel.

e) Find til slut forholdet *k* mellem arealet af rektanglet og arealet $T_0$ for området $M_0$ .

## 2. del: Nogle tilfældige arealer

Vi kigger derefter på grafen for et vilkårligt andengradspolynomium. Vælg derfor et tilfældigt andengradspolynomium $q(x)$ med heltallige koefficienter mellem -10 og 10. Mange programmer har en kommando noget i retning af randpoly$(x,2)$ , der netop udtrækker et tilfældigt andengradspolynomium.

f) Tegn grafen for dit andengradspolynomium $q(x)$ og vælg et tilfældigt punkt $P_0 = (x_0, q(x_0))$ på parablen. Vælg endnu et tilfældigt punkt $P_1$ på parablen og træk den tilfældige sekant $s_0$ gennem $P_0$ og $P_1$ . Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for sekanten $s_0$ .

g) Grafen for andengradspolynomiet $q$ og sekanten $s_0$ afgrænser et område $M_0$ med arealet $T_0$ . Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$ .

h) Indenfor området $M_0$ ser vi nu på den lodrette forskel mellem grafen for andengradspolynomiet *q* og sekanten $s_0$ . Denne forskel har et maksimum i et grafpunkt $Q_0$ . Bestem såvel grafisk som symbolsk koordinaterne til punktet $Q_0$ såvel som den maksimale forskel $h_0$ .

i) Området $M_0$ er indesluttet i et parallelogram, hvor to af siderne er lodrette og går gennem $P_0$ og $P_1$ . Den tredje side ligger på sekanten og den sidste side går gennem grafpunktet $Q_0$ med den maksimale forskel. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet af dette parallelogram.

j) Find til slut forholdet *k* mellem arealet af parallelogrammet og arealet $T_0$ for området $M_0$ .

k) Sammenhold resultaterne i den første del og anden del af øvelsen. Kommentér!

**Udfordring**: Kan du bevise det fundne resultat? Du kan enten forsøge at føre et rent symbolsk bevis for det generelle andengradspolynomium $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ eller forsøge at argumentere via prototyper, idet du først nøje overveje sammenhængen mellem situationen i første del og anden del og hvordan man kan transformere anden del tilbage til første del.

## 3. del: Flere konkrete arealer

Vi udbygger nu den første del, så i det følgende forudsættes det at du er fortrolig med løsningen af første del. Vi kigger altså igen på grafen for andengradspolynomiet $p(x) = -x^2 + x$. Denne gang ønsker vi at kunne flytte det grundlæggende interval rundt på figuren.

l) Afsæt et frit punkt $P_0(x_0, p(x_0))$ på grafen som du kan flytte rundt med. Afsæt dernæst punktet $P_1(x_0+1, p(x_0+1))$ forskudt stykket 1 i vandret retning i forhold til $P_0$. Træk sekanten $s_0$ gennem $P_0$ og $P_1$. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for sekanten $s_0$.

m) Grafen for andengradspolynomiet $q$ og sekanten $s_0$ afgrænser et område $M_0$ med arealet $T_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$.

n) Træk i punktet $P_0$. Konklusion?

## 4. del: Flere tilfældige arealer

o) Tegn igen grafen for et tilfældigt andengradspolynomium $q(x)$ og vælg et tilfældigt frit punkt $P_0 = (x_0, q(x_0))$ på parablen, som du kan rykke rundt på. Afsæt dernæst punktet $P_1(x_0+h, p(x_0+h))$ forskudt stykket $h$ i vandret retning i forhold til $P_0$. Træk sekanten $s_0$ gennem $P_0$ og $P_1$. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for sekanten $s_0$.

p) Grafen for andengradspolynomiet $q$ og sekanten $s_0$ afgrænser et område $M_0$ med arealet $T_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$.

q) Flyt nu rundt på det frie punkt $P_0$ samtidigt med at du holder tilvæksten $h$, dvs. forskellen mellem x-koordinaterne for $P_1$ og $P_0$ konstant.

r) Hvad sker der med arealet når du rykker rundt på det frie punkt $P_0$? Kan du formulere det som en sætning om arealet for et parabeludsnit?

## 5. del: Flere tilfældige arealer

Vi kigger nu igen på grafen for et vilkårligt andengradspolynomium. Vælg derfor igen et tilfældigt andengradspolynomium $q(x)$ med heltallige koefficienter mellem -10 og 10.

s) Tegn grafen for dit tilfældige andengradspolynomium $q(x)$ og vælg et tilfældigt punkt $P_0 = (x_0, q(x_0))$ på grafen, hvor den eneste restriktion er at $P_0$ *ikke* må være toppunktet $T$ for parablen. Den *vandrette sekant* gennem $P_0$ skærer parablen i endnu et punkt $S_0$. Træk nu sekanten $s_0$ gennem $P_0$, der er parallel med $TS_0$. Den skærer grafen for andengradspolynomiet $q$ i endnu et punkt $P_1$. Grafen for andengradspolynomiet $q(x)$ og sekanten $s_0$ afgrænser et område $M_0$ med arealet $T_0$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_0$.

t) Den vandrette sekant gennem $P_1$ skærer parablen i endnu et punkt $S_1$. Konstruér nu sekanten $s_1$ gennem $P_1$, der er parallel med $TS_1$. Bestem såvel grafisk som symbolsk ligningen for $s_1$.

u) Grafen for andengradspolynomiet afskærer sammen med sekanten $s_1$ et område $M_1$ med arealet $T_1$. Bestem såvel grafisk som symbolsk arealet $T_1$.

v) Find til slut forholdet $k$ mellem arealerne $T_1$ og $T_0$.

**Udfordring**: Kan du bevise det fundne resultat? Du kan enten forsøge at føre et rent symbolsk bevis for det generelle andengradspolynomium $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ eller forsøge at argumentere via prototyper, idet du først nøje overveje sammenhængen mellem situationen i første del og anden del og hvordan man kan transformere anden del tilbage til første del.

**ISBN 9788770668781**


## 6. del: Om en arealfunktion knyttet til andengradspolynomier.

Vi vil nu forsøge at koble alle de foregående øvelser sammen! Vi vender tilbage til andengradspolynomiet $p(x) = -x^2 + x$ .

w) Fastlæg toppunktet $T(x_T, y_T)$ for andengradspolynomiet $p(x)$. Fastlæg *x*-koordinaterne til grafpunkterne $P_0(0,0)$, $P_1(x_1, y_1)$ og $P_2(x_2, y_2)$ konstrueret som i del 5. Hvordan ligger *x*-koordinaterne $x_0, x_1$ og $x_2$ i forhold til toppunktets x-koordinat $x_T$ ? Hvis vi tegnede sekanten $s_2$ gennem $P_2$, hvor ville den så skære grafen? Hvilket areal $T_2$ ville den afsnøre? Kan du nu udfylde tabellen

| Grafpunkt | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x*-koordinat | 0 | 1.5 | | | | | | |
| Areal | | | | | | | | |

x) Kan du køre tabellen baglæns? Hvilken sekant $t_{-1}$ rammer grafen i $P_0$? Hvad bliver *x*-koordinaten til sekantpunktet $P_{-1}$ ? Hvad bliver det tilhørende areal $T_{-1}$ ? Hvad bliver ligningen for variabelsammenhængen mellem *x*-koordinaten og arealet? Tegn grafen og prøv fx om du kan finde den med en passende regression?

Kig nu igen på et tilfældigt andengradspolynomium *q*(*x*):

y) Fastlæg toppunktet $T(x_T, y_T)$ for andengradspolynomiet $q(x)$. Fastlæg *x*-koordinaterne til grafpunkterne $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ og $P_2(x_2, y_2)$, hvor du selv vælger en tilfældig værdi for $x_0$ . Hvordan ligger *x*-koordinaterne $x_0, x_1$ og $x_2$ i forhold til toppunktets x-koordinat $x_T$ ? Hvis vi tegnede sekanten $s_2$ gennem $P_2$, hvor ville den så skære grafen? Hvilket areal $T_2$ ville den afsnøre? Kan du nu udfylde tabellen

| Grafpunkt | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x*-koordinat | | | | | | | | |
| Areal | | | | | | | | |

z) Hvad bliver ligningen for variabelsammenhængen mellem *x*-koordinaten og arealet? Tegn grafen og prøv fx om du kan finde den med en passende regression?

**Udfordring**: Til et vilkårligt andengradspolynomium $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ kan vi nu knytte en arealfunktion $T(x_0)$, der angiver arealet afsnøret af grafen for andengradspolynomiet og tangenten med røringspunkt i $x = x_0$ . Prøv nu at finde forskriften for arealfunktionen *T* ved hjælp af en symbolsk udregning. Prøv herefter at forklare hvorfor denne type funktion netop fører til en sammenhæng mellem arealerne, som svarer til den ovenfor fundne sammenhæng mellem to på hinanden følgende arealer. Det kan være nemmere at se sammenhængen hvis du forskyder koordinatsystemet, så toppunktet for andengradspolynomiet ligger på *y*-aksen, dvs. så *b* = 0.