ISBN 9788770668781

Projekt 1.5 De hyperbolske funktioners egenskaber

(*En del af dette projekt indgår også i projekt 2.22, Integrationsteknik – brug af de omvendte trigonometriske og de omvendte hyperbolske funktioner*)

Indhold

ISBN 9788770668781

Definitioner

Eksponentialfunktionen e^x anvendes til konstruktion af en ny familie af funktioner: *De hyperbolske funktioner*.
Helt præcist betegnes disse nye funktioner:

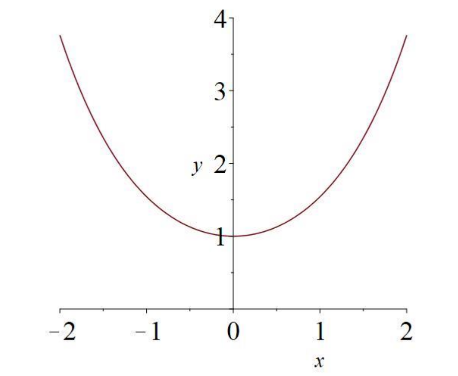
Hyperbolsk cosinus: $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Hyperbolsk sinus: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

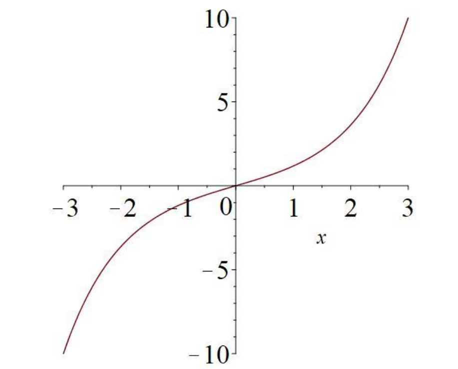
Hyperbolsk tangens: $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Hvorfor de hedder noget med cosinus, sinus og tangens? Og hvorfor hyperbolsk? Det vil vi få nogle svar på, i det følgende.

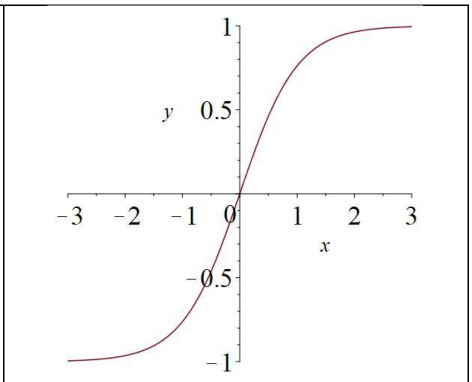
De grafiske billeder af de tre funktioner:



cosh(x)



sinh(x)



tanh(x)

Øvelse 1.
Tegn selv med i dit værktøjsprogram!

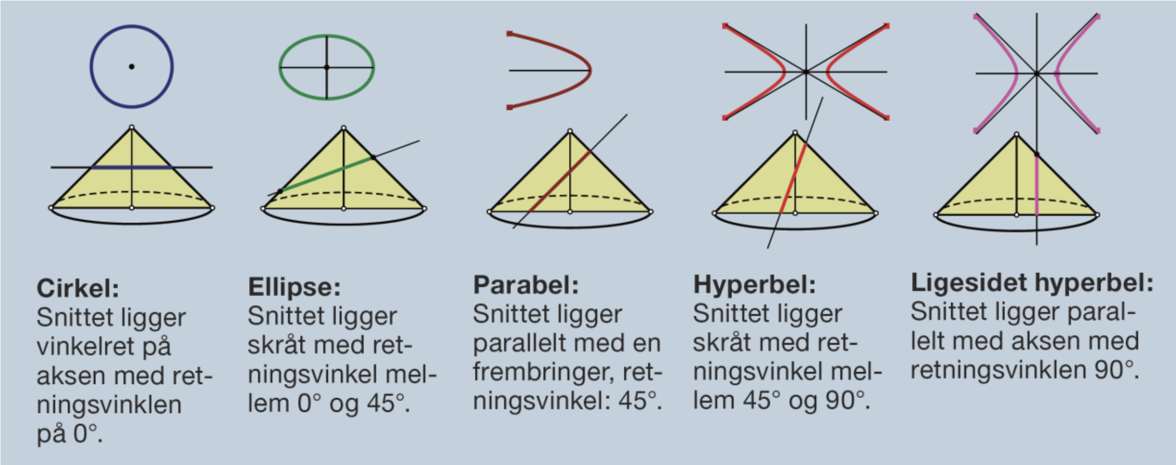
Hyperbolske funktioners geometriske egenskaber

Betegnelsen *hyperbolsk* stammer fra figuren *hyperbel*, der er et af de såkaldte *keglesnit*. Teorien for keglesnit har sin oprindelse i oldtidens græske matematik. Med Alexander den Stores felttog udbredes den græske filosofi og videnskab til hele Middelhavsområdet og Mellemøsten, og det videnskabelige centrum flyttes fra Athen til den nyanlagte Alexandria ved Nilens udmunding. Her oprettes hvad vi idag ville kalde et universitet. Euklid skrev her (omkring 300 f.v.t.) sine 13 bøger, som vi idag kalder Euklids Elementer, og som alle er genfundne. Og en anden af de matematikere, der var ansat her, Apollonius (262 f.v.t – 190 f.v.t) skrev et stort værk i 8 bind om *keglesnit*, hvoraf de 7 bøger er genfundne.

I HEM2, kapitel 7 handler den indledende fortælling om keglesnit og specielt om ellipser. *Keglesnittene* er en fælles betegnelse for de tre kurver ellipsen, hyperblen og parablen, idet en af Apollonius store opdagelser netop var, at disse tre ret forskellige kurver har en fælles oprindelse. De kan fremkomme ved at skære en kegle, evt. en dobbeltkegle med en plan, og den vinkel hvorunder planen skærer keglen, afgør hvilket af keglesnittene, der fremkommer.

En cirkel er en speciel ellipse, så den indgår også. Se illustrationen nedenfor, hentet fra HEM2.

ISBN 9788770668781



Apollonius skrev sine bøger ca 2000 år før koordinatsystemet blev opfundet i 1600-tallet. Så alle definitioner og argumenter er geometriske. Emnet her er ikke et studie af keglesnittene, men specielt at forstå nogle af hyperblens egenskaber, som vi vil genfinde i studiet af de hyperbolske funktioner. Vi vil derfor arbejde med ligninger og i koordinatsystemer.

I analytisk geometri kan man vise, at en h**yperbel** fremstilles ved en ligning af typen:

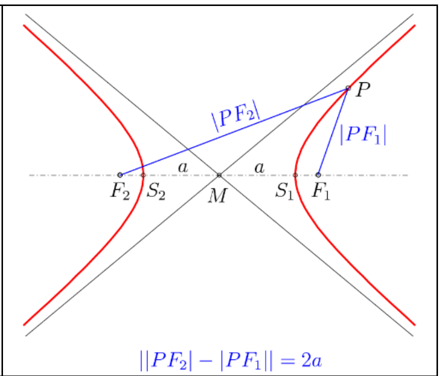
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vi ser slægtskabet med ellipsens ligning, hvor leddene *adderes* i stedet for som her at blive *subtraheret*.

Som for ellipser kalder vi de to parametre *a* og *b* for hyperblens *halvakser*.
Hvis vi indsætter taleksempler for parametrene og tegner den kurve, ligningen fremstiller, får vi en tegning som denne:
De to punkter S_1 og S_2, hvor hyperblen skærer *x*-aksen, kaldes for hyperblens *toppunkter*.

Øvelse 2. Geometrisk tolkning af tallet *a*

Vis, at toppunkterne har koordinaterne $S_1(a,0)$ og $S_2(-a,0)$
Det betyder, at den halve førsteakse a har den geometriske tolkning vi ser her:



Øvelse 3. Hyperblens asymptoter

Betragt hyperblen med ligningen: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Argumenter for, at når *x* bliver meget stor, så vil $y \approx \frac{b}{a} \cdot x$, eller $y \approx -\frac{b}{a} \cdot x$

På illustrationen har vi indtegnet de to linjer $y = \frac{b}{a} \cdot x$ og $y = -\frac{b}{a} \cdot x$. De kaldes for hyperblens *asymptoter*.

Øvelse 4. Geometrisk tolkning af tallet *b*

Tegn linjer gennem toppunkterne S_1 og S_2 og vinkelret på 1.aksen.
Argumenter for at tallet *b* kan tolkes som afstanden fra et toppunkt op til (eller ned til) en af asymptoterne.

Som med ellipser indfører vi et tal, der kaldes for *excentriciteten*, og som er et mål for, hvor "deformeret" kurven er. Excentriciteten kan defineres på flere måder. I bøger om keglesnit vil den normalt blive defineret geometrisk, og dernæst udledes forskellige formler for sammenhængen mellem excentriciteten *e* og parametrene *a* og *b*.

ISBN 9788770668781

For ellipser udledes formlen: $1-e^2=\frac{b^2}{a^2}$, hvoraf vi ser, at for ellipser gælder $0<e<1$.

For hyperbler udledes tilsvarende formlen: $e^2-1=\frac{b^2}{a^2}$, hvoraf vi ser, at for hyperbler gælder $e>1$.
Vi vil her anvende den sidste formel som en *definition af excentriciteten e* (idet vi også kræver *e* er positiv).

Vi definerer nu *brændpunkterne* F_1 og F_2 som de punkter, der har koordinaterne $F_1(ea,0)$ og $F_2(-ea,0)$

En af hyperblens interessante egenskaber er, som angivet på figuren, følgende:

Sætning
Lad *P* være et vilkårligt punkt *P* på grafen for en hyperbel, og lad F_1 og F_2 være hyperblens brændpunkter.
Så gælder: *Differensen* mellem afstandene fra *P* til hvert af de to brændpunkter er konstant og lig med 2*a*, dvs:

$$|PF_2|-|PF_1|=2a$$

Bevis:

1) Vis først, at $\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2+b^2=y^2$

2) Vi udregner de to afstande hver for sig, idet vi udnytter, at *P* ligger på hyperblen:

$$\begin{aligned}|PF_2|^2&=(x+ae)^2+y^2\\&=x^2+a^2\cdot e^2+2xae+y^2\\&=x^2+a^2\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)+2xae+\left(\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2-b^2\right)\\&=\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)\cdot x^2+a^2+2xae\\&=e^2\cdot x^2+a^2+2aex\\&=(ex+a)^2\end{aligned}$$

dvs: $|PF_2|=(ex+a)$

Gør ombyggeligt rede for hvert trin i omskrivningen!

3) Vi udregner tilsvarende:

$$|PF_1|=(ex-a)$$

Gør det selv!

4) Vi udnytter nu 2) og 3):

$$\begin{aligned}|PF_2|-|PF_1|&=(ex+a)-(ex-a)\\&=ex+a-ex+a\\&=2a\end{aligned}$$

som giver det ønskede resultat.

Øvelse 5.

a) Vis formlen: $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

b) Forklar hvad denne ligning har at gøre med ovenstående præsentation af hyperbler at gøre.

c) Hvad er koordinaterne til et punkt på den hyperbel, som beskrives i punkt a)?

Sammenligning af hyperbolske og trigonometriske funktioner

Øvelse 6.
Vi så ovenfor, at $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
Hvordan ser den beslægtede formel med cosinus og sinus ud?

Øvelse 7 Lige og ulige funktioner

a) Vis ved hjælp af enhedscirklen, at $\cos(-x) = \cos(x)$ og $\sin(-x) = -\sin(x)$.

b) Tegn graferne for cos og sin og giv en grafisk fortolkning af formlerne.

c) Vis ved indsættelse, at $\cosh(-x) = \cosh(x)$ og $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

d) Tegn graferne for cosh og sinh og giv en grafisk fortolkning af formlerne.

Funktioner med egenskaber $f(-x) = f(x)$ kaldes *lige* funktioner, og funktioner med egenskaben $f(-x) = -f(x)$ kaldes *ulige* funktioner.

Der dukker mange andre lighedspunkter op mellem de trigonometriske og de hyperbolske funktioner inden for differential- og integralregningen. Det skyldes dybest set, at når vi udvider talområdet fra de reelle tal til de komplekse tal, så bliver eksponentialfunktionerne og de trigonometriske funktioner to sider af samme sag, bare i forskellige verdener. I den komplekse verden, hvor i betyder den imaginære enhed $i = \sqrt{-1}$, kan vi argumentere for, at

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x),$$

samt at der for et komplekst tal $z = x + iy$, hvor x og y er reelle tal, gælder:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

Øvelse 8
Vis, at med denne udvidelse af eksponentialfunktionen gælder:

$$\cos(x) = \frac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin(x) = \frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2i}$$

Dvs: $\cos(x) = \cosh(ix)$ og $\sin(x) = -i \cdot \sinh(ix)$

Øvelse 9. Differentiation af hyperbolske funktioner

Sammenlign hver af de følgende formler med de tilsvarende for cosinus og sinus:
a) Vis, at $\cosh'(x) = \sinh(x)$

b) Vis, at $\sinh'(x) = \cosh(x)$

c) Omskriv $\tanh(x)$ til et produkt: $\tanh(x) = \sinh(x) \cdot \dfrac{1}{\cosh(x)} = \sinh(x) \cdot \left(\cosh(x)\right)^{-1}$, og differentier med brug af produktregel og sammensat differentiation. Kender du brøkreglen, kan du umiddelbart bruge den. Du skal få:
$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$.

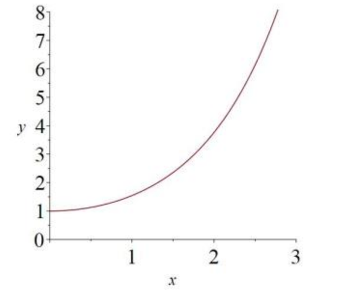
ISBN 9788770668781

De omvendte hyperbolske funktioner og deres afledede funktioner

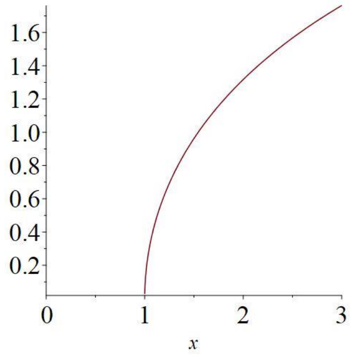
I slægt med de trigonometriske funktioner bliver vi ”inden for familien”, når vi differentierer de hyperbolske funktioner. I projekt 1.5 har vi gennemgået de omvendte trigonometriske funktioner og her fundet, at ved differentiation bevæger vi os ud i en helt anden familie af funktioner. Det samme er tilfældet med de omvendte funktioner til de hyperbolske. Derfor kan disse hjælpe os med at løse flere integraler, vi ellers må give op overfor.

Når vi betragter graferne for de hyperbolske funktioner, så ser vi umiddelbart, at $\sinh(x)$ og $\tanh(x)$ er monotone, så de har omvendte funktioner globalt. Men hyperbolsk cosinus har ikke globalt set en omvendt funktion. Vi er her nødt til at vælge kun at se på positive værdier:

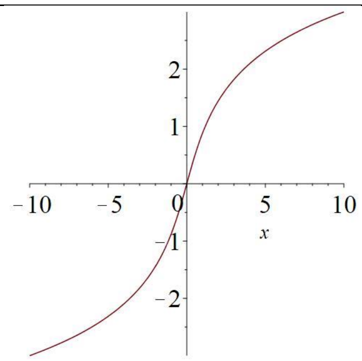
Med denne indskrænkning, så kan vi operere med de omvendte funktioner, som naturligt får betegnelserne: $\operatorname{arccosh}(x)$, $\operatorname{arcsinh}(x)$ og $\operatorname{arctanh}(x)$



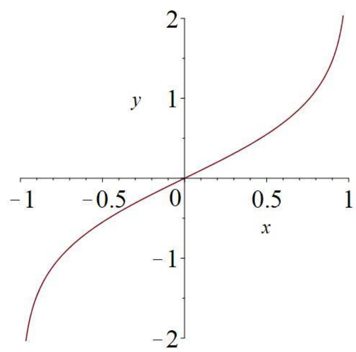
Graferne af de tre ses her – Tegn selv med, og overbevis dig selv om, at graferne fås ved at spejle graferne for de hyperbolske funktioner i linjen $y = x$:



$\operatorname{arccosh}(x)$, som er defineret for $x \geq 1$



$\operatorname{arcsinh}(x)$



$\operatorname{arctanh}(x)$

Øvelse 10. Differentiation af arccosh(x), den omvendte til hyperbolsk cosinus

Vi anvender den efterhånden velkendte teknik, nemlig at udnytte hvad omvendt funktion betyder, samt vores viden om differentiation af cosh:

$$
\begin{aligned}
\cosh(\operatorname{arccosh}(x)) &= x \\
\left(\cosh(\operatorname{arccosh}(x))\right)' &= x' \\
\cosh'(\operatorname{arccosh}(x)) \cdot \operatorname{arccosh}'(x) &= 1 \\
\sinh(\operatorname{arccosh}(x)) \cdot \operatorname{arccosh}'(x) &= 1 \\
\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arccosh}(x)) - 1} \cdot \operatorname{arccosh}'(x) &= 1 \qquad \text{anvend "Pythagoras" for hyperbolske funktioner} \\
\sqrt{\left(\cosh(\operatorname{arccosh}(x))\right)^2 - 1} \cdot \operatorname{arccosh}'(x) &= 1 \\
\sqrt{x^2 - 1} \cdot \operatorname{arccosh}'(x) &= 1 \\
\operatorname{arccosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\ , \quad \text{hvor vi her er nødt til at kræve } x > 1
\end{aligned}
$$

Forklar omhyggeligt alle omskrivninger!

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 11. Differentiation af arcsinh(x), den omvendte til hyperbolsk sinus
Gør følgende omskrivninger færdig så du når frem til konklusionen:

$$\begin{aligned} \sinh(\operatorname{arcsinh}(x)) &= x \\ \left(\sinh(\operatorname{arcsinh}(x))\right)' &= x' \\ \sinh'(\operatorname{arcsinh}(x)) \cdot \operatorname{arcsinh}'(x) &= 1 \\ \cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) \cdot \operatorname{arcsinh}'(x) &= 1 \\ \ldots &= 1 \\ \ldots &= 1 \\ \operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Øvelse 13. Differentiation af arctanh(x), den omvendte til hyperbolsk tangens
Vis med samme teknik, at $\operatorname{arctanh}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, hvor vi som med arccosh må kræve $x > 1$

Listen over afledede funktioner kan ifølge ovenstående nu udvides med:

Type	**Funktionsudtryk,** $f(x)$	**Afledet funktion,** $f'(x)$
Hyperbolske familie	$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$
	$f(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
	$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$
	$f(x) = \operatorname{arccosh}(x),\ x > 1$	$f'(x) = \operatorname{arccosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1$
	$f(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$	$f'(x) = \operatorname{arcsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
	$f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$	$f'(x) = \operatorname{arctanh}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2},\ \ x > 1$

Anvendelser af hyperbolske funktioner

1. Integrationsteknik
De formler, vi fandt i sidste afsnit, må forekomme overraskende for enhver, der ser dem første gang. Det er meget sjældent, at differentiation fører os udenfor den familie af funktioner vi starter i. Vi kender ét eksempel, nemlig differentiation af ln(x). Og nu pludselig alle tre omvendte hyperbolske funktioner. Vi ser præcis det samme med de omvendte trigonometriske funktioner, som er behandlet i projekt 1.5

Det betyder også, at i integralregning, som er den omvendte regningsart til differentialregning, og behandles i HEM3, kapitel 2, får de omvendte hyperbolske funktioner nogle spektakulære anvendelser. Dette er emnet for projekt 2.22.

2. Løsning af anden ordens differentialligninger
I kapitel 6 bevises følgende sætning:

Sætning 1. Løsning af differentialligningen $y'' = k^2 \cdot y$

ISBN 9788770668781

> Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = k^2 \cdot y$, hvor k er et positivt tal, er samtlige funktioner med forskrift:
>
> $$y = c_1 \cdot e^{k \cdot t} + c_2 \cdot e^{-k \cdot t},$$
>
> hvor c_1 og c_2 er konstanter.

Løsningsformlen genkender vi som beslægtet med hyperbolsk cosinus eller hyperbolsk sinus, afhængig af fortegnet for konstanterne. I den generelle formel er konstanterne normalt forskellige, men i et bestemt og meget vigtigt tilfælde af denne differentialligning, som vi ser på nedenfor, ender løsningen med at konstanterne er ens.

Et kabel, der skal bære en hængebro, hænger som udgangspunkt frit mellem sine to ophængningspunkter. Senere ophænges brobanen i kablerne, og derefter følger de parabelbuer. Dette er vist i HEM3, projekt 6.6 og i HEM3, kapitel 11, Samarbejde matematik og fysik, afsnit 8.6. Men: *Hvilken kurve følger kablet før brobanen hænges på*?

For at undersøge det spørgsmål stiller vi det i en mere generel form: Hvis en snor, en kæde eller et kabel, der er uelastisk men fuldkommen bøjeligt, hænger frit mellem to ophængningspunkter, hvilken kurve vil den da følge?
Denne kurve, der naturligt nok kaldes *kædelinjen*, formes af naturens kræfter, og det er derfor ingen selvfølge, at den kan beskrives ved en simpel matematisk formel. Men det kan den, og det er naturligvis en stor hjælp for ingeniører, at de således kan aflure naturen denne optimale konstruktion.
Den endelige løsning på problemet kom i 1691. Jakob Bernouilli (1654 - 1705) havde i sit tidsskrift *Acta Eruditorum* formuleret det som en udfordring - han kunne ikke selv løse det - og der kom faktisk tre løsninger.

frithængende bro som denne

Uafhængigt af hinanden havde Jakobs yngre bror, Johann Bernoulli (1667 - 1748), Gottfried Leibniz (1646 - 1716), og Christian Huygens (1629 - 1695) løst problemet. I dag er Johann anerkendt som den første, der opdagede formlen.

Løsningen findes ved at analysere de kræfter, der virker på kæden, udnytte Newtons love og opstille den anden ordens differentialligning, der beskriver systemet. Det gør vi i kapitel 6. Men selv om vi endnu ikke har lært at løse differentialligninger, så kan vi godt forstå den *formel*, der løser differentialligningen og beskriver kædelinjen.

Og det er ret overraskende, at vi her i beskrivelsen af den kurve naturens kræfter frembringer, fx i et edderkoppespind, møder hyperbolsk cosinus!

Kædelinjen følger grafen for en funktion af typen:

$$f(x) = \tfrac{1}{2 \cdot k} e^{k \cdot x} + \tfrac{1}{2 \cdot k} e^{-k \cdot x} - \tfrac{1}{k} + c$$

hvor kæden er indlagt i et koordinatsystem, der er symmetrisk om det nederste punkt, og hvor parameteren k indeholder information om det fysiske system, kædens masse osv,

Øvelse 14 Kædelinjen beskrevet med hyperbolsk cosinus

a) Vis at med k=1 og c=1 er $f(x) = \tfrac{1}{2 \cdot k} e^{k \cdot x} + \tfrac{1}{2 \cdot k} e^{-k \cdot x} - \tfrac{1}{k} + c$ lig med cosh(x).

b) Tegn grafen for cosh(x)

c) Tegn grafen for $f(x) = \tfrac{1}{2 \cdot k} e^{k \cdot x} + \tfrac{1}{2 \cdot k} e^{-k \cdot x} - \tfrac{1}{k} + c$, idet parametrene k og c indføres med skydere i et værktøjsprogram. Forklar betydningen af de to parametre for grafens udseende.

ISBN 9788770668781

d) Vis $f(x)=\frac{1}{2\cdot k}e^{k\cdot x}+\frac{1}{2\cdot k}e^{-k\cdot x}-\frac{1}{k}+c$ kan skrives $\frac{1}{k}\cosh(k\cdot x)-\frac{1}{k}+c$

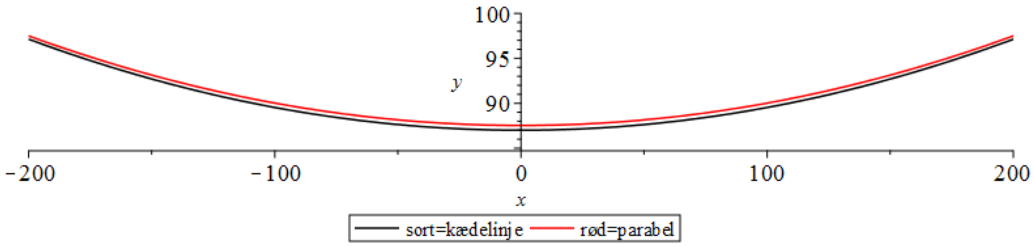
Øvelse 15 Storebæltsbroens kabel før og efter der lægges brobaner på

Storebæltsbroens bærende kabler følger grafen for funktionen $p(x)=0.0002533\cdot x^2+87$, hvis vi indlægger broen i et koordinatsystem med x-aksen langs vandoverfladen og y-aksen langs parablens symmetriakse. Det resultat finder man i HEM3, øvelse 6.14, og det fremgår af facitlisten, der ligger på bogens website.

Før brobanerne blev hængt op fulgte kablet en kædelinje, der er graf for funktionen

$$k(x)=\frac{1}{0.000498}\cosh(0.000498\cdot x)-\frac{1}{0.000498}+87.53$$

a) Tegn graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem. Giv de to grafer forskellig farve
Indret koordinatsystemet ud fra følgende:
Afstanden mellem de store bropiller, pylonerne er 1624 meter.
Pylonerne selv række r 254 meter over havoverfladen.
Parablens laveste punkt er 87 meter over havoverfladen.
Brobanens højeste punkt ligger 75 meter over havet.
(*Hint:* Du skal ikke blive overrasket over, at du ikke kan se forskel)
b) Gør nu både x- og y-intervallerne snævrere, og se forskellen træde frem. Det kan fx se således ud:



c) Undersøg selv områderne omkring pylonernes top