ISBN 9788770668781

Projekt 1.4 De omvendte trigonometriske funktioner og deres differentialkvotienter

(*De første 4 sider af dette projekt indgår også i projekt 2.22, Integrationsteknik – brug af de omvendte trigonometriske og de omvendte hyperbolske funktioner*)

Indhold

ISBN 9788770668781

De omvendte trigonometriske funktioner

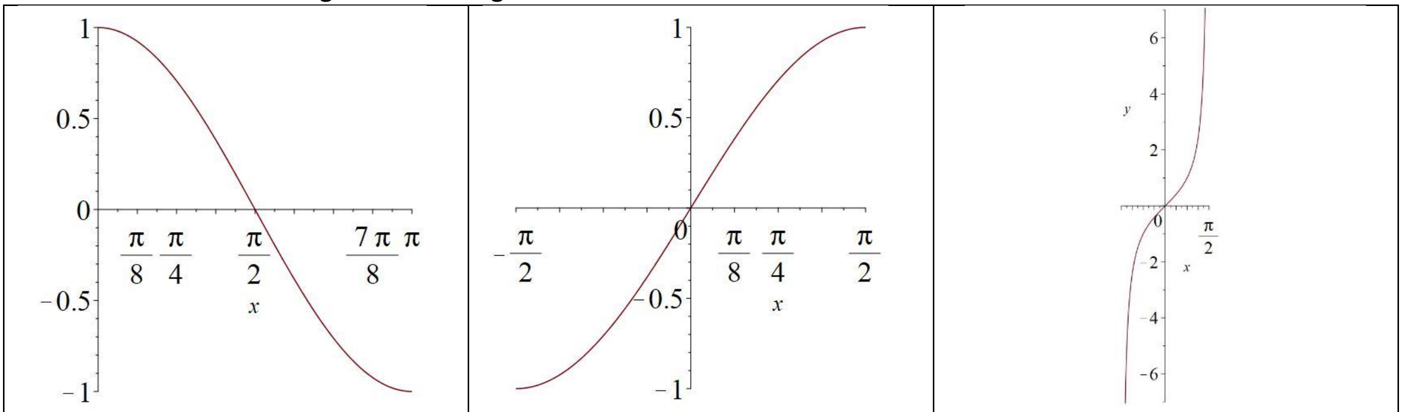
Ved at se på graferne for sinus, cosinus og tangens kan vi let se, at de ikke er globalt monotone, og dermed ikke har omvendte funktioner defineret på alle reelle tal. Men hvis vi skærer definitionsmængderne af, så funktionerne indenfor de valgte områder bliver monotone, så kan vi definere de omvendte funktioner.

For cosinus vælger vi definitionsmængden: $[0;\pi]$

For sinus vælger vi definitionsmængden: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

For tangens vælger vi definitionsmængden: $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

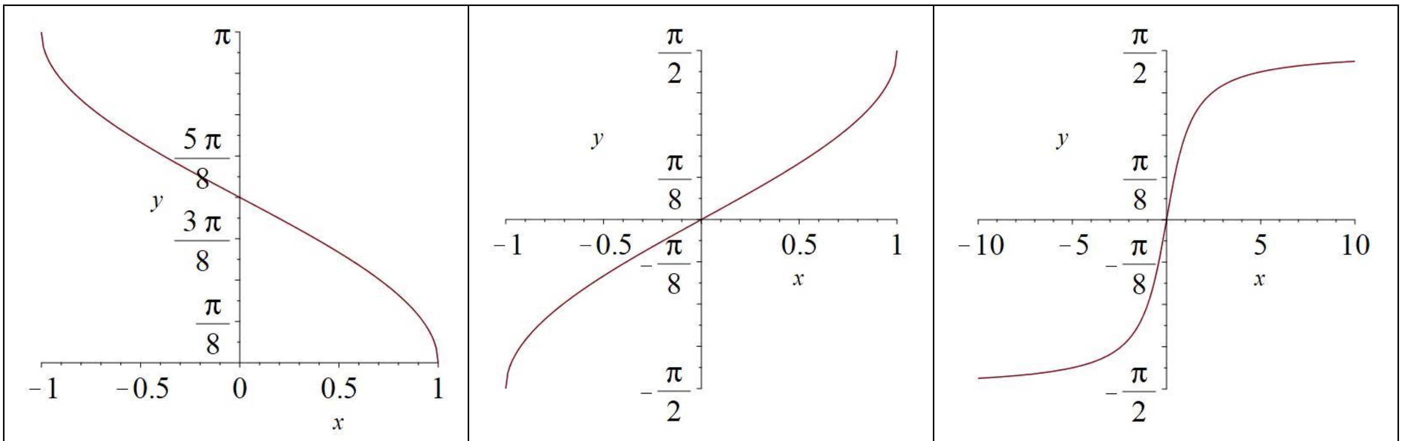
Med disse definitionsmængder bliver de grafiske billeder:



cosinus i $[0;\pi]$ | sinus i $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ | tangens i $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Graferne her bekræfter, at det er monotone funktioner, der dermed har omvendte funktioner.

De grafiske billeder af de omvendte funktioner fremkommer ved at spejle graferne af de oprindelige 'moder-funktioner' i linjen $y = x$. Se her:



arccos i $[-1;1]$ | arcsin i $[-1;1]$ | arctan i et udfsnit af $]-\infty;\infty[$

Vi anvender betegnelserne arccos, arcsin og arctan. Andre steder, fx på lommeregneres tastatur kan man møde betegnelserne $\cos^{-1}, \sin^{-1}$ og $\tan^{-1}$. Det er de samme funktioner.

Øvelse 1.
Tegn selv med i dit værktøjsprogram

ISBN 9788770668781

Differentiation af de trigonometriske funktioner.

I HEM3, kapitel 7 har vi gennemført en analytisk stringent definition af sinus og arcsinus, hvor vi omgår det grundlæggende problem i den traditionelle definition af sinus og cosinus – hvordan fastlægger man længden af en cirkelbue - ved at starte med at definere **arcsin** som længden af en cirkelbue, *beregnet som et integral*, og derefter definerer **sin** som den omvendte funktion til arcsin:

Definition af arcsin og af sin og cos

1. Funktionen arcsin *defineres* som: $\arcsin(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\,,\quad y \in [0;1[$

2. Funktionen sin defineres som den omvendte til arcsin: $\sin(\theta) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = \theta$

3. Funktionen cos defineres ud fra sin: $\cos(x) := \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Bemærkning: Ud fra nr. 3 får vi fx også: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \sin(x)$

Integralregning, der behandles i HEM3 kapitel 2, er i en vis forstand den omvendte regningsart til differentiation: Starter vi med at bestemme et integral af en funktion, og differentierer vi dernæst dette udtryk, så er vi tilbage, hvor vi startede - de to operationer ophæver hinanden.
Ud fra *definitionen* ovenfor får vi derfor:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Vi kan nu ud fra denne formel vise den kendte sætning:

Sætning 1: Differentiation af sinus og cosinus
Funktionerne sin og cos er begge kontinuerte og differentiable, og

$$(\sin(x))' = \cos(x) \text{ og } (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Bevis
Arcsin funktionen er ud fra definitionen som et integral af en kontinuert funktion selv differentiabel og dermed også kontinuert.
Differentiabilitet betyder lokalt lineær. Omvendte funktioner "arver" grafer, der spejles i linjen $y = x$. Derfor er sinus også lokalt lineær, dvs både differentiabel og kontinuert. Cosinus er en sammensat funktion af differentiable funktioner og derfor også selv differentiabel og kontinuert.

Vi udnytter nu samme teknik, som vi anvendte, da vi beviste, hvordan man differentierer $\ln(x)$ i *Hvad er matematik*? 2, kapitel 5B:

$\arcsin(\sin(x)) = x$	Omvendte funktioner ophæver hinanden
$(\arcsin(\sin(x)))' = (x)'$	Når funktionerne er ens, er de afledede ens
$\arcsin'(\sin(x)) \cdot (\sin(x))' = 1$	Reglen for sammensat differentiation
$\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(x))^2}} \cdot (\sin(x))' = 1$	Anvend viden om $\arcsin'(x)$
$\frac{1}{\sqrt{(\cos(x))^2}} \cdot (\sin(x))' = 1$	Anvend "Pythagorasformlen" for cos og sin

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

$\frac{1}{\cos(x)} \cdot (\sin(x))' = 1$ cos(x) er positiv i området fra $-\frac{\pi}{2}$ til $+\frac{\pi}{2}$

$(\sin(x))' = \cos(x)$ Gange igennem med cos(x)

Hvilket var den første formel.

Bemærkning: Hvis man kender formlen for differentiation af den omvendte funktion, kunne man have anvendt den. Men det er faktisk nogenlunde samme argumentation og udregning.

Øvelse 2: Differentiation af cosinus

Udnyt definitionen: $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ og sammensat differentiation til at vise punkt 3.

Øvelse 3: Differentiation af tangens

Udnyt formlen for differentiation af en brøk: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ til at udlede en formel for differentiation af tangens, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Differentiation af de omvendte trigonometriske funktioner.

Sætning 2: Differentiation af de omvendte trigonometriske funktioner

De afledede funktioner for de omvendte trigonometriske funktioner $\sin^{-1}(x)$ og $\cos^{-1}(x)$ er givet ved

$$(\arcsin x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;,\quad (\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \;,\quad (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Bevis:

Den første formel fremgår let af definitionen på arcsin, som vist ovenfor.

Den anden formel om den afledede til arccos kan nu findes med samme teknik, som har givet os den afledede til fx e^x og $\ln(x)$:

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos(x)) &= x && \text{def. på omvendt funktion}\\
(\cos(\arccos(x)))' &= 1 &&\\
\cos'(\arccos(x))\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{sammensat differentiation}\\
-\sin(\arccos(x))\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{vi kender afledede til cos}\\
-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{udnyt } \cos^2(x)+\sin^2(x) =\\
-\sqrt{1-(\cos(\arccos(x)))^2}\cdot\arccos'(x) &= 1 &&\\
-\sqrt{1-(x)^2}\cdot\arccos'(x) &= 1 && \text{def. på omvendte funktioner}
\end{aligned}$$

Ved at dividere over og isolere arccos får vi formlen:

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ISBN 9788770668781

Øvelse 4.
Gør rede for omskrivningerne ovenfor i alle detaljer.

Den afledede til arctan kan findes med samme teknik:

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan(x)) &= x \quad \text{def. på omvendt funktion} \\
\left(\tan(\arctan(x))\right)' &= 1 \\
\tan'(\arctan(x)) \cdot \arctan'(x) &= 1 \quad \text{sammensat differentiation} \\
\left(1+\tan^2(\arctan(x))\right) \cdot \arctan'(x) &= 1 \quad \text{vi kender afledede til tan} \\
\left(1+\left(\tan(\arctan(x))\right)^2\right) \cdot \arctan'(x) &= 1 \\
\left(1+\left(x\right)^2\right) \cdot \arctan'(x) &= 1 \quad \text{def. på omvendte funktioner} \\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Øvelse 5.
Gør rede for omskrivningerne ovenfor i alle detaljer.

Vi sammenfatter resultaterne i følgende udvidelse af vores tabel over afledede funktioner:

Type	**Funktionsudtryk,** $f(x)$	**Afledet funktion,** $f'(x)$
Trigonometriske familie	$f(x)=\arccos(x),\quad x\in\left[-1;1\right]$	$f'(x)=\arccos'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in\left]-1;1\right[$
	$f(x)=\arcsin(x),\quad x\in\left[-1;1\right]$	$f'(x)=\left(\arcsin(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in\left]-1;1\right[$
	$f(x)=\arctan(x)$	$f'(x)=\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

Øvelse 6

a) Gør rede for at der ifølge formlerne for de afledede funktioner må gælde $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\text{konstant}$ og bestem værdien af konstanten.

b) Giv et geometrisk argument for den fundne identitet.

Anvendelse af de omvendte trigonometriske funktioner.

1. Integrationsteknik

De formler, vi fandt i sidste afsnit, må forekomme overraskende for enhver, der ser dem første gang. Det er meget sjældent, at differentiation fører os udenfor den familie af funktioner vi starter i. Vi kender ét eksempel, nemlig differentiation af ln(x). Og nu pludselig alle tre omvendte trigonometriske funktioner. Vi ser præcis det samme med de omvendte hyperbolske funktioner, som er behandlet in projekt 1.12.

Det betyder også, at i integralregning, som er den omvendte regningsart til differentialregning, får de omvendte trigonometriske funktioner nogle spektakulære anvendelser. Dette er emnet for projekt 2.22.

2. Geometrisk modellering - regnbuen

I en geometrisk modellering af lidt mere komplekse situationer, vil de *omvendte trigonometriske funktioner* hyppigt komme på banen. Det har vi fx set i HEM2, kapitel 1 i den indledende historie om regnbuen. Her så vi, hvordan Descartes fastlagde regnbuens placering på himmelbuen ved at finde maksimumspunktet for spredningsvinklen s. Her udledte vi spredningsvinklen som funktion af indfaldsvinklen, og fandt den er givet ved forskriften:

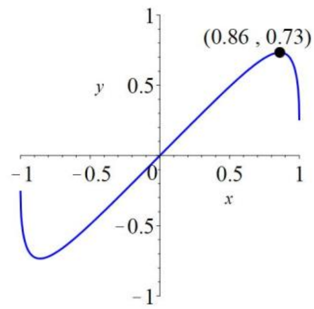
$$s(i) = 4 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{1}{n} \cdot \sin(i)\right) - 2 \cdot i$$

For at kunne anvende differentialregning skifter vi nu til radianer som vinkelmål. Det kan ydermere betale sig at anvende stødparameteren x = sin(i) som uafhængig variabel. Den angiver hvor på radius strålen rammer, hvis den *ikke* blev brudt i regndråben, idet 0 svarer til centrum, 1 til toppunktet (nordpolen) for cirklen og -1 til bundpunktet (sydpolen) for cirklen. Endelig sætter vi brydningsforholdet for overgangen fra luft til vand til $n = \frac{4}{3}$.

Med dette valg af variable ser forskriften nu således ud:

$$s(x) = 4 \cdot \sin^{-1}(\frac{3}{4} \cdot x) - 2 \cdot \sin^{-1}(x)$$

Grafen ser således ud:
Vi skal bestemme maksimumspunktet for grafen ved hjælp af differentialregning. Vi får da brug for sætning 2.



Øvelse 7

a) Vis ved hjælp af sætning 2, at

$$s'(x) = \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{9}{16}x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

For at finde maksimumspunktet skal vi løse ligningen $s'(x) = 0$:

b) Vis, at løsningerne hertil er: $x = \sqrt{\dfrac{20}{27}}$ og $x = -\sqrt{\dfrac{20}{27}}$

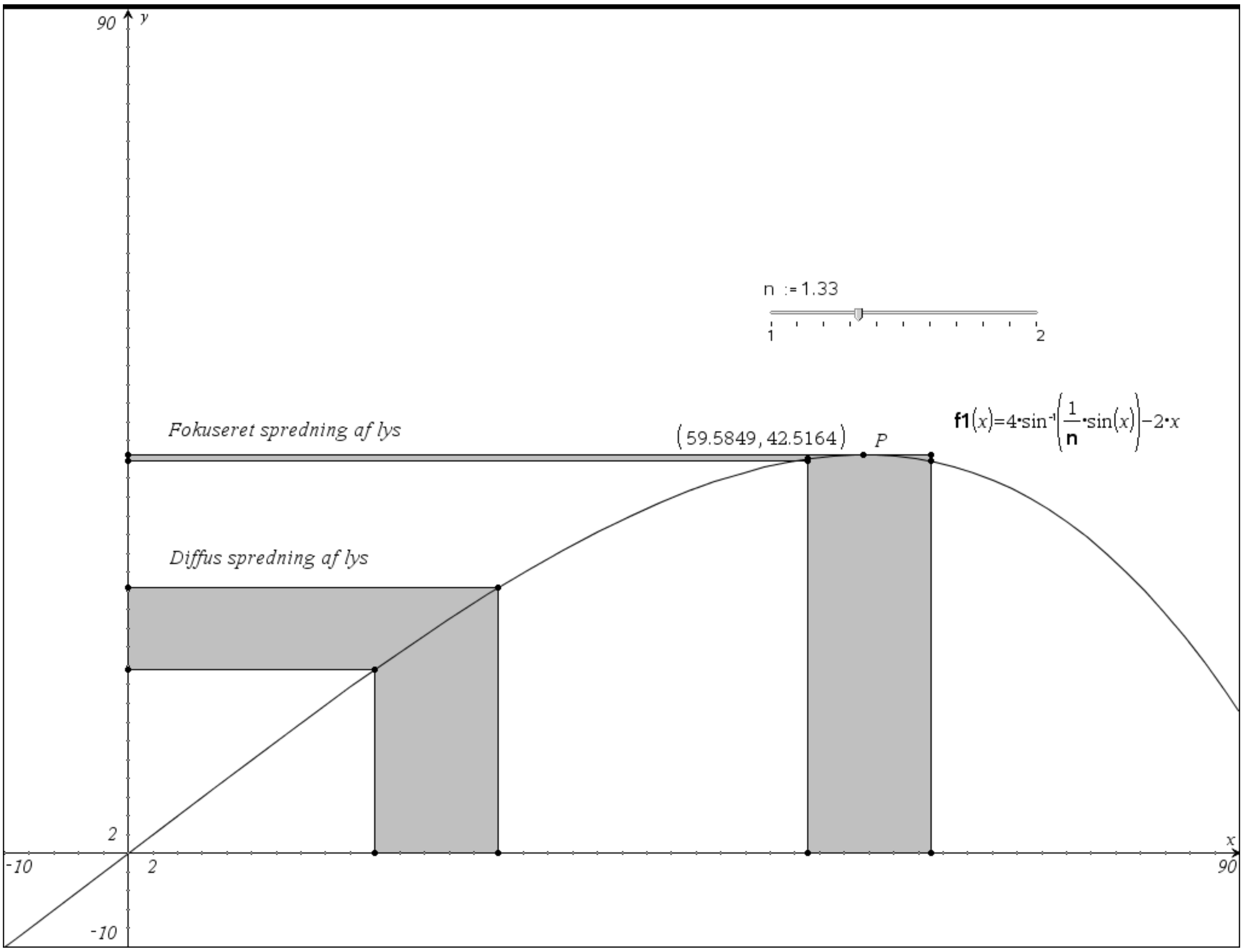
Vi ser altså at den optimale stødparameter er givet ved $x = \sqrt{\dfrac{20}{27}} \approx 0{,}8606$ i fin overensstemmelse med grafen.

c) Vis, at den tilhørende spredningsvinkel er da givet ved $s = 4\sin^{-1}\left(\frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}}\right) - 2 \cdot \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{20}{27}}\right) = 0.7335...$.

Omsæt dette radiantal til gradtal og vis, at vinklen bliver $s = 42.0°$ i fin overensstemmelse med Descartes numeriske undersøgelser af regnbuen.

ISBN 9788770668781

Illustrationen nedenfor giver en geometrisk forklaring på, at vi ved den maksimale vinkel får den største koncentration af lys reflekteret, altså får den lysende regnbue:



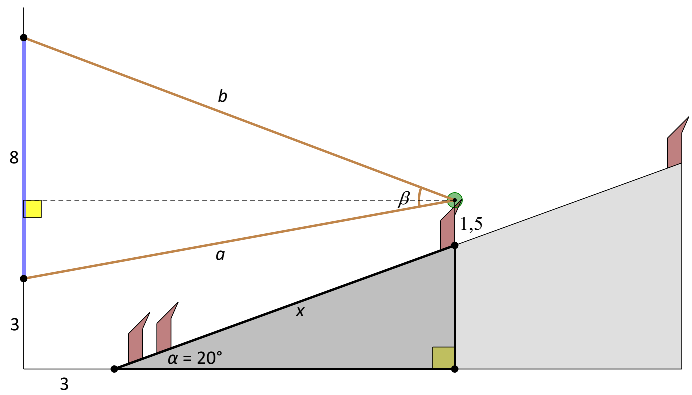
I almindelighed vil en bred vifte af indfaldsvinkler kastes tilbage som en bred vifte af spredt lys, hvilket giver en diffus spredning af lyset som ikke kan ses. Den brede vifte af indfaldsvinkler illustreres med et interval på x-aksen.

Men lige omkring toppunktet vil en tilsvarende bred vifte af indfaldsvinkler blive kastet kastet tilbage i en meget snæver vifte af spredt lys, dvs. der sker en kraftig fokusering af lyset i én bestemt retning. Det er præcis her den lysende effekt, dvs. regnbuen, opstår.

3. Eksempel på geometrisk opgave: Bedst mulige synsvinkel

På figuren ses en model af en biografsal set fra siden, hvor en person sidder på en bestemt række. Lærredet er placeret 3 meter over gulvhøjde, og lærredets højde er 8 meter. Vinklen α mellem sædepodiet og vandret (se figur) er 20°.

Afstanden fra gulvet op til den række personen sidder på er x, hvor $0 \le x \le 20$, da der er 20 rækker som hver optager 1 meter af sædepodiet.



ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Det oplyses, at personen sidder, således at personens øjenhøjde er 1,5 meter over sædepodiet (se figur). Afstanden fra personens øje til lærredets nederste kant er a, og afstanden fra personens øje til lærredets øverste kant er b.

a) Gør rede for, at

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - 8^2}{2 \cdot a \cdot b},$$

hvor $a^2 = (3 + x \cdot \cos(20°))^2 + (9{,}5 - x \cdot \sin(20°))^2$ og $b^2 = (3 + x \cdot \cos(20°))^2 + (x \cdot \sin(20°) - 1{,}5)^2$.

Personen skal sidde på den række, hvor personens synsvinkel β (se figur) er størst.

b) Bestem β udtryk ved x, og bestem x, således at β bliver størst mulig.