ISBN 9788770668781

Projekt 1.3a Fourier Analyse – Opsplitning af en sammensat lyd

(*Dette projekt indgår i HEM3, kapitel 11, Studieretningskapitlet om fagligt samarbejde mellem matematik og fysik. Du kan finde en lidt anden gennemgang af Fourieranalyse og musik i HEM3, kapitel 15, Studieretningskapitlet om fagligt samarbejde mellem matematik og musik.*
I Fourieranalyse opsplittes et lydbillede i alle dets enkelte elementer i form af sinus og cosinussvingninger. I projektet gives en grundig gennemgang af teorien bag. Det er også vigtigt at afprøve teorien på en række praktiske eksempler, dels de berømte klassikere som firkantbølger og savtakfunktioner, og dels på samplede data, hvor vi ikke kender noget funktionsudtryk bag disse, men ønsker at frembringe en modelfunktion. Dette kræver regnekraft og er gennemført i værktøjsprogrammet Maple i projekt 1.3b.
Endelig foreslås det, at et projekt starter med, at man ser en lille filmisk præsentation af ideen i fouriertransformationer. Filmen der varer ca 5 minutter ligger som projekt 1.3c)

Indhold

1. Opsplitning af en kompleks lyd i en sum af sinussvingninger

Der er blevet eksperimenteret med lyd, så længe der har været mennesker. Og man har givetvis tidligt opdaget, at der er nogle præcise sammenhænge mellem de toner, vi synes klinger harmonisk sammen, og de tilsvarende længder på de svingende strenge, eller på de hule rør, vi blæser i.
Vi har overleveringer om sådanne eksperimenter fra de første matematiske samfund. For 2500 år siden opdagede pythagoræerne nogle af disse simple sammenhænge mellem en grundtones bølgelængde, og bølgelængderne af overtonerne, der alle er $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ eller $\frac{1}{n}$ af grundtonens bølgelængde. Eller udtrykt med frekvenserne: Frekvenserne af overtonerne er alle 2, 3, 4, .. eller n gange så store som grundtonens frekvens.

Slår vi én tone an, frembringes samtidig en række overtoner. Og når et helt orkester med en række forskellige instrumenter spiller sammen, så frembringes godt nok et komplekst lydbillede – men et lydbillede, vi kan opfatte som en sammensætning af, eller en sum af en lang række rene sinussvingninger. Musikken bages altså billedligt talt af alle disse ingredienser.

Man kan godt forstå, hvordan man kan bage en kage ud fra en opskrift. Opskriften er her partituret, og vi så i sidste afsnit, hvordan man lægger to forskellige sinussvingninger sammen. Kan man lægge to sammen, så kan man også lægge flere sammen og få et mere komplekst lydbillede. Men kan man også gå den anden vej - lave opskriften, når man har kagen?

Hvis man optager lyden af et stykke orkestermusik, og ser på den grafiske fremstilling heraf, så ser det på den ene side voldsomt kompliceret ud, men på den anden side ved vi jo, at det er frembragt af en lang række enkelt-instrumenter. Så i det tilfælde, hvor vi ved, at lydbilledet er frembragt som en sum af en masse rene svingninger, så er det ikke en helt vild tanke, at man måske kan finde ud af, hvad denne lyd er sammensat af! Rent teoretisk kunne man selvfølgelig godt forestille sig, at to *forskellige* summer af rene svingninger kunne frembringe det samme lydbillede. Men det strider mod vores erfaring med lyd og musik – ethvert lydbillede er resultat af en unik kombination af rene svingninger.

Og hvis det er tilfældet for lyd, så er det en nærliggende tanke, at det gælder for alle svingningsfænomener, at komplekse svingninger kan opfattes som en sum af rene svingninger – det kan være fænomener som tidevandsbevægelser, røntgenstråling fra fjerne stjerner, himmellegemernes bevægelser mm. Det sidste eksempel var allerede et tema for astronomerne i det gamle Babylon, der havde til opgave at forudsige himmellegemernes bevægelser, og dertil søgte at opløse fx månens komplicerede bevægelse i en sum af nogle simple bevægelser. Den samme bestræbelse ser vi hos antikkens store astronom Ptolemaios. De prøvede sig frem ud fra den tilgængelige empiri.
Men vi skal frem til 1800 tallet før problemet finder sin teoretiske afklaring, først og fremmest gennem det arbejde den franske matematiker og fysiker Joseph Fourier (1768–1830) udførte. Fourier studerede egentlig varmeteori og specielt hvordan varme udbreder sig gennem et medie. I 1807 udgiver han værket *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides,* og I årene efter udvikler han en helt ny matematisk teori, der kunne hjælpe ham i hans studier. Han fremlægger sin nye teori i 1822 i værket *Théorie analytique de la chaleur, eller* i engelsk oversættelse: *The Analytical Theory of Heat*, og det skulle vise sig, at den nye teori kunne anvendes langt ud over sin oprindelse i varmeteorien

Fouriers teori forklarer dels, hvordan en sammensat svingning / tone kan beskrives ved en sum af trigonometriske funktioner med hver sin frekvens og amplitude. Den laveste frekvens, der optræder, er grundfrekvensen, som svarer til grundtonen. Grundtonens overtoner har frekvenser, der alle er et helt tal gange grundfrekvensen. Og han angiver en metode til at bestemme disse rene svingninger og deres amplituder. ***Dette vil vi fordybe os i, i det følgende***.

Men hans teori er meget mere radikal. Fourier påstår i sit værk, at enhver funktion, kontinuert eller diskontinuert, kan skrives som en sum af trigonometriske funktioner med hver sin frekvens og amplitude. Dvs. denne opslutning i rene svingninger er ikke forbeholdt svingningsfænomener! Det var et ekstremt overraskende resultat, at alt kan skrives som en sum af sinus og cosinus funktioner. Det er faktisk heller ikke korrekt i sin generelle form, men på Fouriers tid er de funktioner, man arbejder med og i det hele taget forestiller sig ganske pæne – og for dem gælder det! Få år senere, i 1829 lykkes det den tyske matematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) at vise, under hvilke (ret generelle) betingelser påstanden gælder. Ideen i dette bevis er, at man for en given funktion opskriver dennes *Fourierrække*, som angivet i sætningen nedenfor, og så beviser, at denne konvergerer med funktionen.

Sætning: Fourierrækken for en funktion
Givet en funktion $f(t)$, der er defineret på et lukket interval $[0;T]$, og som er integrabel her. Hvis der om $f(t)$ gælder, at funktionen har højst endeligt mange lokale ekstrema, og højst endeligt mange diskontinuitetspunkter, så findes der koefficienter a_n og b_n, så $f(t)$ kan skrives:

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\cdot t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\cdot t\right)$$

Koefficienterne beregnes således:

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\cdot t\right)dt\ , \quad \text{for } n = 0,1,2...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot n\cdot t\right)dt\ , \quad \text{for } n = 1,2...$$

Bemærkning 1: Der er ikke mange funktioner, man kan komme på, som ikke opfylder betingelserne. Men Dirichlet gav et eksempel på en, som siden er blevet kaldt Dirichlets funktion: Det er funktionen, der antager værdierne 1 i alle rationale x-værdier og 0 i de irrationale.
Bemærkning 2: Lighedstegnet i formlen betyder, at de endelige summer op til N af højresidens udtryk konvergerer mod $f(t)$, når $N \to \infty$. Men definitionen af konvergens er ikke så ligetil her.

Læg mærke til, at funktionen er defineret i et begrænset og lukket interval $[0;T]$. En almindelig funktion er jo ikke periodisk som sin og cos er det. Men vi forestiller os så, at funktionen kunne udvides til alle tal ved blot at gentage den for hvert interval af længde T. Det ville jo så være en periodisk funktion.

Den matematiske disciplin, hvor vi udregner og opstiller fourierrækken for en given funktion, kaldes for *Fourieranalyse*. Amplituderne for de enkelte svingninger a_n og b_n kaldes for *Fourierkoefficienterne*

Den generelle version af sætningen er ganske svær at bevise, og beviset kræver kendskab til en del videregående matematik. ***Vi vil i stedet i det følgende betragte den specielle situation, hvor vi antager, at vi ved, at en given funktion $s(t)$ er en sum af rene svingninger. Under denne antagelse vi så udlede formlerne for Fourierkoefficienterne.***

Den første overvejelse drejer sig om følgende: Hvorfor kan vi ikke nøjes med at se på en sum af sinussvingninger? Hvorfor er vi nødt til også at inddrage cosinus?

Hvis alle toner blev anslået synkront, dvs startede præcis samtidig, så kunne vi beskrive lydbølgen for en sammensat tone, som en sum af sinusfunktioner. Lydstyrken $s(t)$ til tidspunktet t ville kunne beskrives ved en funktion af typen:

$$s(t) = c_0\cdot\sin(2\pi\cdot f_0\cdot t) + c_1\cdot\sin(2\pi\cdot f_1\cdot t) + \cdots c_n\cdot\sin(2\pi\cdot f_n\cdot t) + ...$$

hvor c_n betegner amplituden og f_n betegner frekvensen. Det første led svarer til grundtonen, det næste til 1. overtone, det tredje til 2. overtone osv.

Men dette udtryk tager ikke hensyn til at nogle toner i et lydbillede ikke starter samtidigt, så derfor må vi igennem en lidt kompliceret omskrivning. Resultatet lander dog i noget forbløffende simpelt, nemlig den ovenstående sum, kompletteret med cosinusfunktioner:

$$s(t) = a_0 + a_1\cdot\cos(2\pi\cdot f_1\cdot t) + b_1\cdot\sin(2\pi\cdot f_1\cdot t) + \cdots a_n\cdot\cos(2\pi\cdot f_n\cdot t) + b_n\cdot\sin(2\pi\cdot f_n\cdot t) + ...$$

For at gøre udtrykket lidt simplere at se på, indfører vi et nyt begreb, som kaldes *vinkelhastighed* og betegnes ω. Vinkelhastigheden hænger sammen med *perioden* T :

ISBN 9788770668781

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

dvs. den fortæller noget om, hvor mange perioder svingningen når at gennemføre inden for tidsrummet 2π, dvs. hvis perioden er 2π, så er vinkelhastigheden netop 1.

Sammenhængen mellem frekvensen f og perioden T er: $T = \frac{1}{f}$.

Udnyt dette i formlen for ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot f$$

Dvs. vinkelhastigheden er proportional med frekvensen, med proportionalitetskonstant 2π. Det betyder, at når vi ganger frekvensen med en faktor k, så bliver vinkelhastigheden også k gange større:

$$\omega_K = 2\pi \cdot (k \cdot f) = k \cdot (2\pi \cdot f) = k \cdot \omega$$

Denne egenskab får vi brug for, fordi vi vil se på en tones grundtone og overtoner, hvor overtonernes frekvenser jo netop er et helt antal gange større end grundfrekvensen.

Det er denne sammenhæng vi vil udnytte i det følgende, dvs. vi omskriver $s(t)$ til:

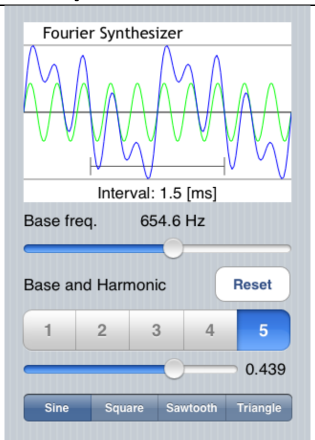
$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + \cdots a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) + \ldots$$

2. Præsentation af Fourieranalyse

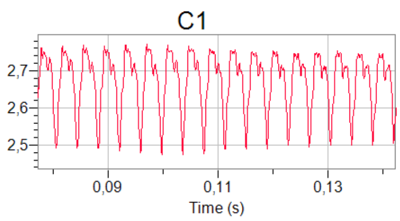
Fourier Analyse er i dag indbygget som en automatisk proces i mange lydbehandlingsprogrammer, hvor den betegnes FFT, der betyder *Fast Fourier Transformation*. Hvis vi får informationer om amplitude og periode for en given lydbølge, der er sammensat af en række toner, så kan vi opstille et matematisk udtryk, der beskriver lydbølgen – vi kan bestemme en forskrift for den funktion $s(t)$, som har lydbølgen som graf.

Med et lydbehandlingsprogram kan vi altså bestemme de indgående toners frekvenser og deres amplituder. Amplituderne kaldes også for Fourierkoefficienterne – det er disse værdier Fourier Analysen giver os.

Eksempel: Fast Fourier analyse på smartphones



Der findes i dag applikationer til smartphones, som kan afspille lyden af en bestemt tone (bestemt grundfrekvens) og dens overtoner (helt tal gange grundfrekvens). Brug fx søgeordet ”Fourier”. Programmet kan både samle (synthesize) og opsplitte (analyze) lydbilleder. På illustrationen har vi samlet forskellige rene toner til et lydbillede. Vi vil nu gå den anden vej og analysere tonen C. Vi kalder her tonen for C1, fordi vi betragter første oktav. Først ser vi på lydbilledet af tonen som funktion af tid. Lydbilledet vil være forskelligt for forskellige instrumenter, da de har forskellige overtoner, men det er i denne sammenhæng ligegyldigt. Med lidt fantasi kan vi godt forestille os, dette billede er en sum af rene sinussvingninger



Programmet kan nu give os, hvad det er for svingninger den er sammensat af. dvs angive de relevante frekvenser og amplituder, så vi kan opskrive formlen. Dette kaldes *fourierspektret*.

Øvelse 1 Bestem Fourierspektret af tonen C ved Fast Fourier Transformation

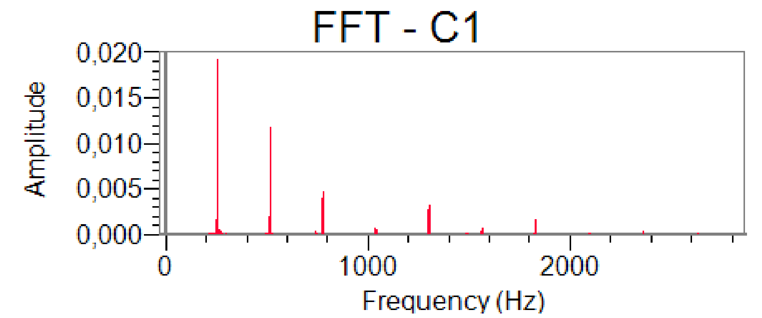
Afprøv en sådan applikation fx på tonen C og få vist Fourierspektret.

Hvilke frekvenser har overtonerne?

ISBN 9788770668781

Lad os sige, vi har fået følgende FFT-spektrum af tonen C, som stadig betegnes C1:
(FFT betyder *Fast Fourier Transformation*).

Her ser vi, hvordan et computerprogram ved Fourier Analyse "opløser" tonens bestanddele i først grundtonen og derefter alle dens overtoner. Sammen med frekvensen kan vi aflæse hver tones amplitude.



Grundtonens frekvens er 261,2 Hz, og vi kan aflæse grundtonens amplitude til 0,019, mens overtonernes amplituder er:

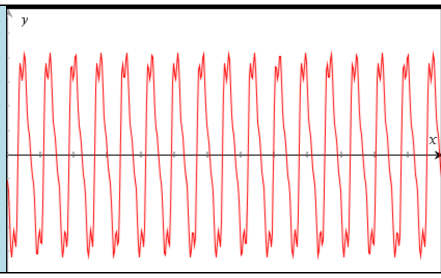
1. overtone	2. overtone	3. overtone	4. overtone	5. overtone	6. overtone
0,012	0,005	0,001	0,003	0,001	0,002

Vi kan således opbygge den lydfunktion, der beskriver denne tone:

$$s(t) = 0{,}019 \cdot \sin(2\pi \cdot 261{,}2 \cdot t) + 0{,}012 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 261{,}2 \cdot t) + 0{,}005 \cdot \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 261{,}2 \cdot t) + 0{,}001 \cdot \sin(2\pi \cdot 4 \cdot 261{,}2 \cdot t) + \ldots$$

Øvelse 2 Fouriersyntese

Tegn grafen og se, at vi får et billede, der ligner det, vi så ovenfor for tonen C



Hvor kom amplituderne knyttet til hver af frekvenserne fra? Det vil vi nu dykke ned i.

3. Beregning af Fourierkoefficienterne – indledende overvejelser om symmetri

Vi tager nu fat på den teoretiske undersøgelse af Fourierkoefficienterne. Det kan virke lidt underligt, at vi begynder med at undersøge og regne på middelværdier af en funktion. Men det viser sig, at i beregningen af middelværdier af bestemte funktioner, så falder koefficienterne i udtrykket:

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + \cdots a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) + \ldots$$

ud på nærmest magisk vis.

Vi starter med noget indledende teori.

Definition: Middelværdi for en funktion
Middelværdien for en kontinuert funktion s over intervallet $[a; b]$ er bestemt ved integralet:

$$s_{middel} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b s(t)\,dt$$

Om middelværdier gælder følgende sætning, som vi får brug for.

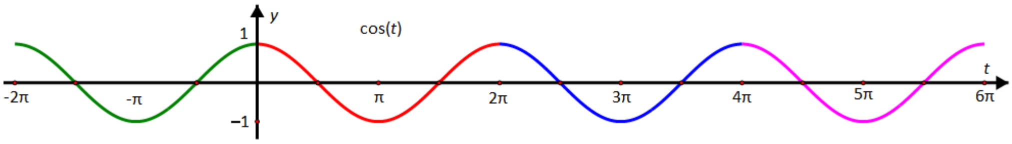
Sætning: Middelværdien for en sum af funktioner
Middelværdien for en sum af funktioner er summen af middelværdierne, dvs. hvis $s(t) = s_0(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + \ldots$, så er middelværdien for s:

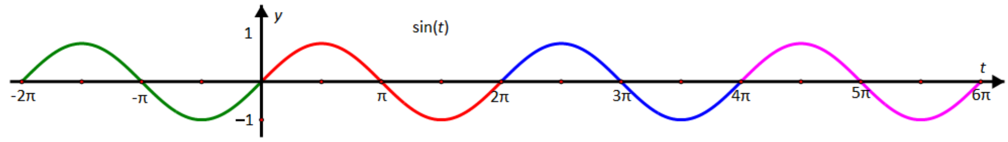
$$s_{middel} = s_{0\,middel} + s_{1\,middel} + s_{2\,middel} + s_{3\,middel} + \ldots$$

ISBN 9788770668781

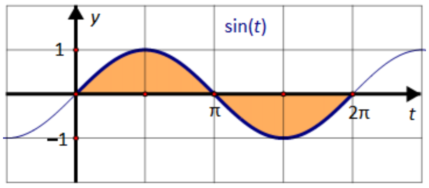
Sætningen følger let af regnereglerne for integralregning.

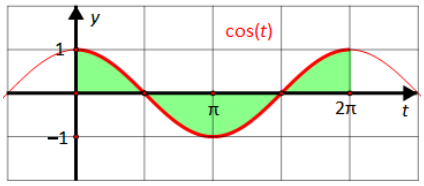
Vi har brug for at vide lidt mere om cosinus- og sinusfunktionernes egenskaber, inden vi fortsætter.
Når vi ser på de graferne for de to funktioner, er det klart, at de er periodiske med en periode på 2π :





Vi ser også at cosinusfunktionen er symmetrisk omkring *y*-aksen, mens sinusfunktionen er symmetrisk omkring (0,0). Ser vi nu i første omgang på én periode $[0;2\pi]$, så afgrænser graferne hver især sammen med førsteaksen nogle områder som vist på figurerne:





Pga. symmetriegenskaberne, så er arealet af områderne under og over førsteaksen for hver af de to funktioner lige store.

Vi ved at, at integralet af en negativ funktion er negativt, og da sinusfunktionen er positiv i første halvdel af intervallet og negativ i anden halvdel af intervallet og i øvrigt symmetrisk i sin form, så betyder det ved brug af indskudssætningen, at

$$\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt = 0$$

og dermed at

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt = 0$$

På tilsvarende vis kan vi konkludere, at

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt = 0$$

Øvelse 3

a) Tegn graferne for funktionerne $p(t) = \cos(n \cdot t)$ og $q(t) = \sin(n \cdot t)$, hvor *n* er et helt tal, idet du definerer *n* ved en skyder, der kun kan antage heltallige værdier.

b) Argumentér ud fra graferne for, at der på lignende vis må gælde, at

$$\int_0^{2\pi} \sin(n \cdot t)\,dt = 0 \qquad \text{og} \qquad \int_0^{2\pi} \cos(n \cdot t)\,dt = 0$$

c) Beregn også integralerne med dit værktøjsprogram.

ISBN 9788770668781

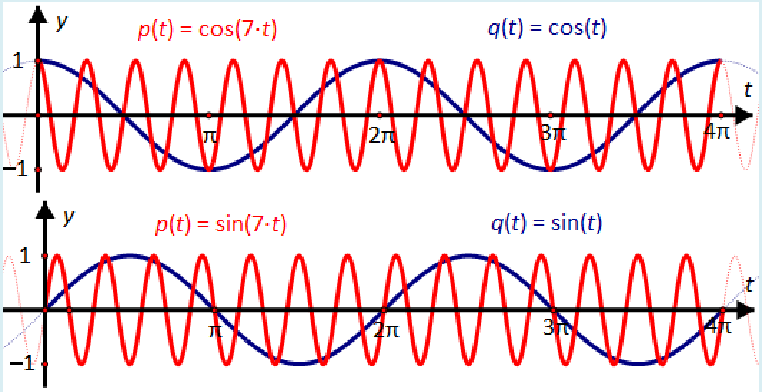
Øvelse 4 Ser vi nu på middelværdierne af cosinus- og sinusfunktionerne $\cos(n\cdot t)$ og $\sin(n\cdot t)$, hvor n er et helt tal, i intervallet $[0;2\pi]$, så må der ligesom ovenfor gælde, at

$$\sin_{middel} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\sin(n\cdot t)dt = 0 \quad \text{og} \quad \cos_{middel} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(n\cdot t)dt = 0$$

Tilsvarende vil vi kunne argumentere, hvis vi ser på cosinus- og sinusfunktioner over et helt antal perioder m, dvs. der må gælde, at

$$\int_0^{m\cdot 2\pi}\sin(n\cdot t)dt = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{m\cdot 2\pi}\cos(n\cdot t)dt = 0$$

Øvelse 5 Argumentér ud fra graferne for, at middelværdien for $\cos(7\cdot t)$ og $\sin(7\cdot t)$ må være nul.



Argumentér ud fra graferne for, at

$$\int_0^{2\cdot 2\pi}\sin(7\cdot t)dt = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{2\cdot 2\pi}\cos(7\cdot t)dt = 0$$

4. Beregning af Fourierkoefficienterne for $s(t)$

Vi vender nu tilbage og ser på $s(t)$ over én periode, dvs. fra $t=0$ til $t=T$, hvor T betegner perioden for s:

$$s(t) = a_0 + a_1\cdot\cos(\omega\cdot t) + b_1\cdot\sin(\omega\cdot t) + a_2\cdot\cos(2\omega\cdot t) + b_2\cdot\sin(2\omega\cdot t) + ... + ... + ...$$

Vi beregner middelværdien for funktionen over intervallet $[0;T]$ ved

$$s_{\text{middel}} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T s(t)dt$$

og denne middelværdi må jo være den samme som middelværdien af højresiden i udtrykket for $s(t)$, dvs.

$$\frac{1}{T}\cdot\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T (a_0 + a_1\cdot\cos(\omega\cdot t) + b_1\cdot\sin(\omega\cdot t) + a_2\cdot\cos(2\omega\cdot t) + b_2\cdot\sin(2\omega\cdot t) + ... + ... + ..)dt$$

Da a_0 er konstant, så er middelværdien blot a_0 selv.

Ifølge sætningen ovenfor er middelværdien af en sum, det samme som summen af alle middelværdierne for hvert led, dvs. vi skal altså bestemme middelværdierne for hvert led for sig:

$$\frac{1}{T}\cdot\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T a_0\,dt + \frac{1}{T}\cdot\int_0^T (a_1\cdot\cos(\omega\cdot t) + b_1\cdot\sin(\omega\cdot t))dt + \frac{1}{T}\cdot\int_0^T (a_2\cdot\cos(2\omega\cdot t) + b_2\cdot\sin(2\omega\cdot t))dt + ...$$

Vi har lige set, at middelværdien for cosinus- og sinusfunktionen over et helt antal perioder er nul. Dvs. middelværdien for hver af de to funktioner i hvert af de harmoniske led vil blive nul i intervallet $[0;T]$, og dermed er middelværdien for summen af alle de harmoniske led også nul – altså er der kun konstantleddet a_0 tilbage:

$$\frac{1}{T}\cdot\int_0^T s(t)\,dt = a_0 + \frac{1}{T}\cdot\int_0^T a_1\cdot\cos(\omega\cdot t)\,dt + \frac{1}{T}\cdot\int_0^T b_1\cdot\sin(\omega\cdot t)\,dt + \frac{1}{T}\cdot\int_0^T a_2\cdot\cos(2\omega\cdot t)\,dt + \frac{1}{T}\cdot\int_0^T b_2\cdot\sin(2\omega\cdot t)\,dt + ...$$
$$= a_0 + 0 + 0 + 0 + 0 + ...$$
$$= a_0$$

Hermed har vi bestemt den første Fourierkoefficient $a_0 = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T s(t)\,dt$!

Altså hvis vi kender $s(t)$ og perioden, så kan vi også bestemme a_0.

Vi bestemmer nu de andre Fourierkoefficienter (amplituder), og bruger her et trick, som Fourier fandt på:

Hvis vi ganger begge sider af $s(t)$ med en harmonisk funktion fx $\cos(7\omega\cdot t)$, så får vi, idet vi på højresiden jo skal gange hvert enkelt led med $\cos(7\omega\cdot t)$ (hvor vi har skrevet de harmoniske led op ovenover hinanden for at skabe overblik):

$$\begin{aligned}\cos(7\omega\cdot t)\cdot s(t) = {} & a_0\cdot\cos(7\omega\cdot t)\\ & + a_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t) + b_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(\omega\cdot t)\\ & + a_2\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(2\omega\cdot t) + b_2\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(2\omega\cdot t)\\ & + ... \qquad + ...\\ & + a_7\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(7\omega\cdot t) + b_7\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(7\omega\cdot t)\\ & + ... \qquad + ...\end{aligned}$$

Nu bestemmer vi så igen middelværdien på hver side af lighedstegnet.

Da middelværdien af en sum er lig med summen af middelværdierne, ser vi på hvert led for sig.
Vi får således middelværdien af første led ved:

$$\text{Led1}_{\text{middel}} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \cos(7\omega\cdot t)\cdot a_0\,dt = \frac{1}{T}\cdot a_0\cdot\int_0^T \cos(7\omega\cdot t)\,dt$$

hvor vi har sat konstanten a_0 udenfor integraltegnet.
Men middelværdien for $\cos(7\omega\cdot t)$ i intervallet $[0;T]$ er jo netop nul, som vi argumenterede for ovenfor!
Derfor er $\text{Led1}_{\text{middel}} = 0$.

Middelværdien for $a_1\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\cos(7\omega\cdot t)$ over en periode T viser sig også at blive nul!

For at nå dertil har vi brug for endnu en omskrivning. Vi anvender en af de såkaldte logaritmiske formler, der siger: $\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\cdot\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cdot\cos(A-B)$	**De logaritmiske formler** $\sin(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\cdot\sin(A+B) + \frac{1}{2}\cdot\sin(A-B)$ $\cos(A)\cdot\sin(B) = \frac{1}{2}\cdot\sin(A+B) - \frac{1}{2}\cdot\sin(A-B)$ $\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\cdot\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cdot\cos(A-B)$ $\sin(A)\cdot\sin(B) = -\frac{1}{2}\cdot\cos(A+B) - \frac{1}{2}\cdot\cos(A-B))$

dvs. der må gælde, at

$a_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t) = a_1\cdot(\frac{1}{2}\cdot\cos(7\omega\cdot t+\omega\cdot t) + \frac{1}{2}\cdot\cos(7\omega\cdot t-\omega\cdot t))$ Anvend logaritmisk formel

$a_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t) = a_1\cdot(\frac{1}{2}\cdot\cos(8\omega\cdot t) + \frac{1}{2}\cdot\cos(6\omega\cdot t))$ Reducer i parentes

$a_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(\omega\cdot t) = \frac{1}{2}\cdot a_1\cdot(\cos(8\omega\cdot t) + \cos(6\omega\cdot t))$ Sæt $\frac{1}{2}$ udenfor

Vi bestemmer nu middelværdien for højresiden:

$\text{Led2}_{\text{middel}} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \frac{1}{2}\cdot a_1\cdot(\cos(8\omega\cdot t) + \cos(6\omega\cdot t))\,dt$ Anvend middelværdi

ISBN 9788770668781

$$=\frac{1}{T}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot a_1\cdot\int_0^T(\cos(8\omega\cdot t)+\cos(6\omega\cdot t))\,dt \qquad \text{Sæt konstanter udenfor}$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot a_1\cdot\left(\int_0^T\cos(8\omega\cdot t)\,dt+\int_0^T\cos(6\omega\cdot t)\,dt\right) \qquad \text{Anvend sumregel for integration}$$

Men igen er integralerne i parentesen jo nul, så derfor er $\text{Led2}_{\text{middel}}=0$.

På samme måde kan vi vise, at middelværdien af hvert af de harmoniske led, der indeholder *a*-koefficienterne (amplituderne), bliver nul – med undtagelse af ét! Nemlig dette:

$$a_7\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(7\omega\cdot t)$$

Når vi omskriver, får vi:

$$a_7\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(7\omega\cdot t)=a_7\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot\cos(7\omega\cdot t+7\omega\cdot t)+\tfrac{1}{2}\cdot\cos(7\omega\cdot t-7\omega\cdot t))$$

$$a_7\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(7\omega\cdot t)=a_7\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot\cos(14\omega\cdot t)+\tfrac{1}{2}\cdot\cos(0)) \qquad \text{Reducer i parenteser}$$

$$a_7\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\cos(7\omega\cdot t)=a_7\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(\cos(14\omega\cdot t)+1) \qquad \text{Udnyt, at } \cos(0)=1$$

Middelværdien for $\cos(14\omega\cdot t)$ er nul (som ovenfor), men middelværdien af den konstante funktion 1 er jo 1, så derfor får vi:

$$\text{Led7}_{\text{middel}}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T a_7\cdot(\cos(7\omega\cdot t)+\cos(7\omega\cdot t))\,dt \qquad \text{Middelværdi af venstre side}$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T a_7\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(\cos(14\omega\cdot t)+1)\,dt \qquad \text{...det samme om middelværdi af højre side}$$

$$=\frac{1}{T}\cdot a_7\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(\int_0^T(\cos(14\omega\cdot t))\,dt+\int_0^T 1\,dt\right) \qquad \text{Sæt konstanter udenfor}$$

$$=\frac{1}{T}\cdot a_7\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(0+T) \qquad \text{Udregn integraler}$$

$$=a_7\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1 \qquad \text{Reducér}$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot a_7$$

Derfor er $\text{Led7}_{\text{middel}}=\tfrac{1}{2}\cdot a_7$.

Ser vi nu på leddene med *b*-koefficienterne (amplituderne), så går det meget lettere!

Vi ser på det første af disse led:

$$b_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

Vi anvender en anden af de logaritmiske formler:

$$\cos(A)\cdot\sin(B)=\tfrac{1}{2}\cdot\sin(A+B)+\tfrac{1}{2}\cdot\sin(A-B)$$

dvs. der må gælde, at

$$b_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(\omega\cdot t)=b_1\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot\sin(7\omega\cdot t+\omega\cdot t)+\tfrac{1}{2}\cdot\sin(7\omega\cdot t-\omega\cdot t)) \qquad \text{Anvend logaritmisk formel}$$

$$b_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(\omega\cdot t)=b_1\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot\sin(8\omega\cdot t)+\tfrac{1}{2}\cdot\sin(6\omega\cdot t)) \qquad \text{Reducér i parenteser}$$

$$b_1\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(\omega\cdot t)=\tfrac{1}{2}\cdot b_1\cdot(\sin(8\omega\cdot t)+\sin(6\omega\cdot t)) \qquad \text{Sæt } \tfrac{1}{2} \text{ udenfor}$$

dvs. vi får altså denne gang blot to sinusfunktioner med en periode på hhv. 8 og 6 – altså er middelværdien af hver af disse nul, og derfor en middelværdien af summen jo også nul!

På samme måde kan vi vise, at middelværdien af alle *b*-amplitude-led bliver nul! Denne gang går nemlig ikke galt i led nr. 7:

$$b_7\cdot\cos(7\omega\cdot t)\cdot\sin(7\omega\cdot t)$$

Hvad sker der nemlig her? Når vi omskriver, får vi:

$$b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) = b_7 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot \sin(7\omega \cdot t + 7\omega \cdot t) + \tfrac{1}{2} \cdot \sin(7\omega \cdot t - 7\omega \cdot t))$$
$$b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) = b_7 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot \sin(14\omega \cdot t) + \tfrac{1}{2} \cdot \sin(0))$$
$$b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) = b_7 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot \sin(14\omega \cdot t) + 0)$$

Derfor har vi kun $\sin(14\omega \cdot t)$ tilbage, og middelværdien af $\sin(14\omega \cdot t)$ er jo nul (som ovenfor), og derfor er middelværdien af $b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$ også nul! Dvs. ingen af b-leddene overlever!

Vi ser at Fouriers trick har virket ligesom en si – når vi ganger med $\cos(7\omega \cdot t)$ **og bestemmer middelværdien, så forsvinder alle led undtagen** $a_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t)$**, som har middelværdien** $\tfrac{1}{2} \cdot a_7$**. Altså er den samlede middelværdi af** $\cos(7\omega \cdot t) \cdot s(t)$ **blot** $\tfrac{1}{2} \cdot a_7$**:**

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos(7\omega \cdot t) \cdot s(t)\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot a_7$$

og dermed har vi bestemt endnu en af koefficienterne:

$$a_7 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(7\omega \cdot t)\, dt$$

Havde vi valgt at gange igennem med en anden cosinusfunktion fra start fx $\cos(n \cdot \omega \cdot t)$, hvor n er et helt tal, så ville vi på samme måde se at kun det *n*´te led ville overleve, og dermed ville den *n*´te koefficient blive:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \text{ , hvor } n \text{ er et helt tal}$$

Således har vi bestemt alle *a*-amplituderne!

På samme måde kan man vise, at når man fra start i stedet ganger igennem med $\sin(7\omega \cdot t)$, så forsvinder alle *b*-leddene undtagen det 7. led, hvor man får

$$\tfrac{1}{2} \cdot b_7 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sin(7\omega \cdot t) \cdot s(t)\, dt$$

og dermed ved at gange med 2, at

$$b_7 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(7\omega \cdot t)\, dt$$

På samme måde som ovenfor betyder det jo så, at alle *b*-amplituderne kan skrives på formen:

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt \text{ , hvor } n \text{ er et helt tal}$$

Alt i alt, har vi nu vist, hvordan man kan bestemme amplituderne, når man kender $s(t)$:

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) + \ldots + \ldots + \ldots$$
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

hvor vi har samlet *a*-led og *b*-led ved at anvende et sumtegn i notationen.
Her er amplituderne nemlig bestemt ved:

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t)dt \text{ ,}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)\, dt$$

hvor *n* er et helt tal.

Dvs. ud fra lydtrykket som funktion af tiden kan vi altså beregne amplituderne i hvert af de led, der repræsenterer grundtonen og dennes overtoner – altså kan vi genskabe grundtonen og dens overtoner ud fra den sammensatte lyd!

Øvelse 6 Gennemfør argumentationen for b-amplituderne, idet du fra start ganger igennem med $\sin(7\omega\cdot t)$ på begge sider af lighedstegnet i udtrykket for $s(t)$:

$$s(t)=a_0+a_1\cdot\cos(\omega\cdot t)+b_1\cdot\sin(\omega\cdot t)+a_2\cdot\cos(2\omega\cdot t)+b_2\cdot\sin(2\omega\cdot t)+...+...+...$$

og derefter beregner middelværdien for $\sin(7\omega\cdot t)\cdot s(t)$ ved at beregne middelværdien for hvert af leddene på højresiden, ligesom vi gjorde ovenfor.
Så vil du i alle *a*-led få en sinus ganget med en cosinus, og disse led kan omskrives ved hjælp af en den logaritmiske formel: $\sin(A)\cdot\cos(B)=\frac{1}{2}\cdot\sin(A+B)+\frac{1}{2}\cdot\sin(A-B)$, hvorved du får en sum af to sinusfunktioner, hvis middelværdier hver for sig vil være nul, dvs. alle *a*-led vil forsvinde.
I alle *b*-led vil du få to sinusfunktioner ganget sammen, og disse led kan således omskrives ved hjælp af den logaritmiske formel: $\sin(A)\cdot\sin(B)=-\frac{1}{2}\cdot\cos(A+B)-\frac{1}{2}\cdot\cos(A-B)$, hvorved du får en sum af to cosinusfunktioner, hvis middelværdier hver for sig vil være nul – undtagen i det 7. led!

Hermed har vi argumenteret for den del af sætningen om Fourierrækker, der siger, at såfremt vi ved, en funktion kan skrives som en sum af harmoniske svingninger, så kan Fourierrækkens koefficienter bestemmes som angivet i sætningen.

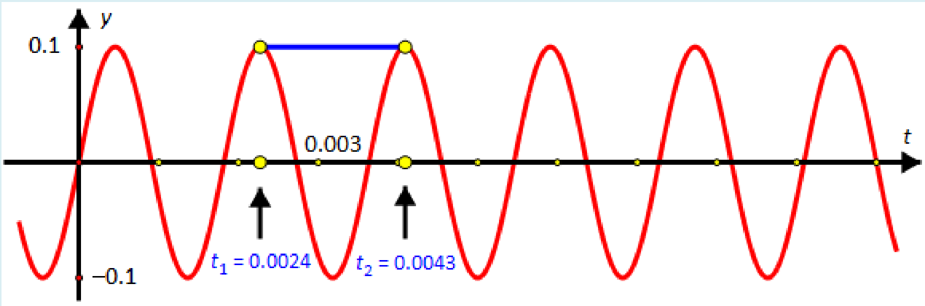
Øvelse 7 Nedenfor ses lydbølgen for en bestemt tone.

a) Aflæs amplituden og perioden.

b) Bestem vinkelhastigheden og grundfrekvensen.

c) Opstil et udtryk for den lydfunktion, der har lydbølgen som graf.

d) Benyt klavertangent-oversigten du kan finde i appendix til at bestemme hvilken (ren) tone, der er tale om.



Lydbilledet i øvelsen ovenfor er naturligvis meget forenklet, men det giver et indtryk af, at man ud fra få informationer om et givet lydbillede kan opstille et udtryk for den funktion, som beskriver lydbølgen.

Øvelse 8. Fourieranalyse og syntese i praksis – Fouriertransformation af samplede data

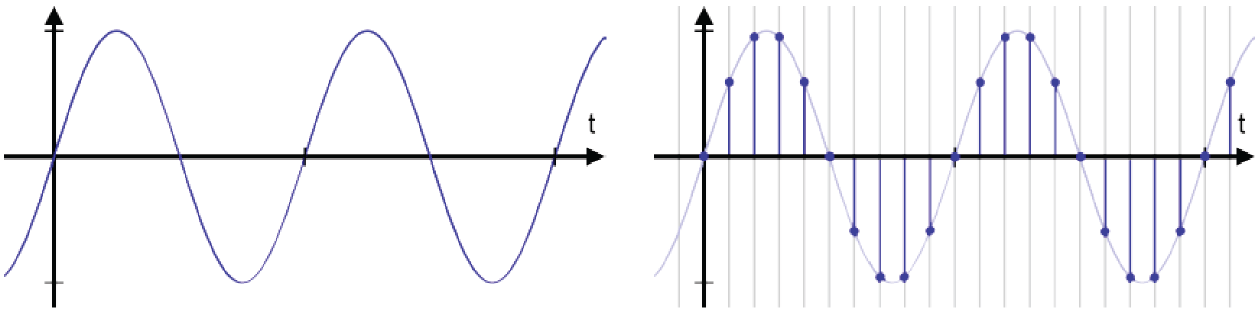
Gå nu ind i Maplearket i projekt 1.3b, og gennemfør selv en række af de Fouriertransformationer, der er gennemgået der. Specielt er det interessant at arbejde med den sidste del af projektet, hvor vi helt konkret har fat i sampling, som beskrives teoretisk i næste afsnit.

5. Sampling – oversættelse mellem analog og digital

Lyd bliver "født" som svingninger. Stemmebåndets eller klaverstrengens svingninger forplanter sig gennem luften og rammer måske efter kort tid øret hos en tilhører, og udløser her svingninger i vedkommendes trommehinder. Det er forskellige medier, der bringes i svingninger, men det er grundlæggende samme signal, som vi matematisk repræsenterer med kontinuerte funktioner, sammensat af sinus og cosinus funktioner. Vi taler om analoge repræsentationer eller gengivelser af lyden. En klassisk grammofonplade er ligeså en analog repræsentation, idet svingningsmønstret er skåret ind i grammofonens riller – og når en nål bevæger sig gennem rillerne sættes den i svingninger, som via elektriske signaler, der også er en analog repræsentation af svingningsmønstret, sætter en højtalers membran i svingninger.

Men i vore dage er i hele dette forløb indskudt oversættelser mellem analog og digital repræsentation af lyden. Når lyd gemmes, hentes eller sendes via nettet, så sker det i digital form, dvs i form af en lang række talværdier. Disse er sagens natur "diskrete" – selv om der er mange talværdier er der jo ikke uendeligt mange! Når et analogt signal skal omsættes til et digitalt signal, foregår det ved *sampling*. Man måler med regelmæssige (selvvalgte) tidsintervaller signalværdier fra det analoge kontinuerte signal, og resultatet heraf er således blot en endelig række af tal – hvis man har taget *n* samples, så vil talrækken indeholde *n* værdier, hvor *n* er et helt tal. Når man har defineret sit samplingsinterval Ts, så indhenter samplingsprocessen blot en signalværdi svarende til tidspunkterne $Ts, 2Ts, 3Ts, 4Ts, \ldots$.

Den signalværdi man får til tidspunktet Ts skal således repræsentere signalværdien for hele tidsintervallet $[Ts; 2Ts]$, mens signalværdien indhentet til tidspunktet $2Ts$ repræsenterer hele tidsintervallet $[2Ts; 3Ts]$, osv. Vi får så i stedet for en kontinuert glat harmonisk kurve en række punkter, som hver især ligger på den oprindelige kurve, men med intervaller i mellem, hvor der ikke er noget signal:



Figuren viser samplingsprocessen af en kontinuert glat sinuskurve.

Det centrale spørgsmål er nu: I hvilken udstrækning kan man rekonstruere det oprindelige analoge signal ud fra en række samples? For at rekonstruere et kontinuert signal ud fra de endeligt mange samples, skal man på en eller anden måde "gætte", hvilken værdi signalet sandsynligvis skulle antage i tidsrummene i mellem vores samples. Ideelt set vil man jo gerne have en algoritme, der "gætter rigtigt" – det vil sige, at det kontinuerte signal, vi får ud, gerne skulle være meget tæt på det oprindelige kontinuerte signal.

Der er umiddelbart ingen garanti for at det rekonstruerede kontinuerte signal er tilnærmelsesvist lig med det oprindelige analoge signal. Men i 1948 fremkom Claude Shannon (1916-2001) med en teori for, hvordan man kan genskabe et signal, der kommer særdeles tæt på det oprindelige signal – ja faktisk i teorien genskaber signalet 100% korrekt! *Shannons Sample Theorem* siger populært sagt, at det originale kontinuerte lydsignal kan rekonstrueres nøjagtigt ud fra sine samples, når den højeste frekvens f_{max}, der findes i lydsignalets Fourierrække, er mindre end den halve samplingsfrekvens, dvs. $f_{max} < \frac{1}{2} \cdot fs$, hvor $fs = \frac{1}{Ts}$. Denne halve samplingsfrekvens kaldes også for *Nyquist-frekvensen*, til ære for Harry Nyquist, der arbejdede sammen med Shannon på Bell Labs, forskningsafdelingen i det amerikanske telefonselskab American Telephone & Telegraph Company (AT & T).

Dette er et meget overraskende resultat: Ud fra endeligt mange punkter kan man altså ikke alene skabe noget der tilnærmelsesvist er lig det oprindelige, men som er 100% identisk med det. Shannons og Nyquist arbejder var med til at grundlægge en helt ny disciplin i grænseområdet mellem matematik, fysik og datalogi, *Digital Signal Processing*. Vi vil ikke her gå længere ind i denne verden.
Er du interesseret i at dykke ned i teorien, der fører frem til Nyquist resultat, så er følgende bog om Fourieranalyse det bedste, der findes: *Steen Albrechtsen, Fourieranalyse, ED data, 1991*. Bogens styrke er ikke mindst, at den i alle detaljer arbejder med konkrete data, der er samplet, og som med fourieranalysens værktøjer fører frem til den modelfunktion, der korrekt beskriver data.
Undervejs får vi hele teorien på plads, herunder på siderne 32-45 en detaljeret indføring i *Nyquist-frekvensen*.

ISBN 9788770668781

Appendix: Frekvenser af klavertoner

Tangentnummer	Tonenavn	Frekvens (Hz)
88	C8	4186.01
87	H7	3951.07
	A#7/B7	3729.31
85	A7	3520.00
	G#7/Ab7	3322.44
83	G7	3135.96
	F#7/Gb7	2959.96
81	F7	2793.83
80	E7	2637.02
	D#7/Eb7	2489.02
78	D7	2349.32
	C#7/Db7	2217.46
76	C7	2093.00
75	H6	1975.53
	A#6/B6	1864.66
73	A6	1760.00
	G#6/Ab6	1661.22
71	G6	1567.98
	F#6/Gb6	1479.98
69	F6	1396.91
68	E6	1318.51
	D#6/Eb6	1244.51
66	D6	1174.66
	C#6/Db6	1108.73
64	C6	1046.50
63	H5	987.767
	A#5/B5	932.328
61	A5	880.000
	G#5/Ab5	830.609
59	G5	783.991
	F#5/Gb5	739.989
57	F5	698.456
56	E5	659.255
	D#5/Eb5	622.254
54	D5	587.330
	C#5/Db5	554.365
52	C5	523.251
51	H4	493.883
	A#4/B4	466.164
49	A4 Kammertonen	440.000
	G#4/Ab4	415.305
47	G4	391.995
	F#4/Gb4	369.994
45	F4	349.228
44	E4	329.628
	D#4/Eb4	311.127
42	D4	293.665
	C#4/Db4	277.183
40	C4	261.626
39	H3	246.942
	A#3/B3	233.082
37	A3	220.000
	G#3/Ab3	207.652
35	G3	195.998
	F#3/Gb3	184.997
33	F3	174.614
32	E3	164.814
	D#3/Eb3	155.563
30	D3	146.832
	C#3/Db3	138.591
28	C3	130.813
27	H2	123.471
	A#2/B2	116.541
25	A2	110.000
	G#2/Ab2	103.826
23	G2	97.9989
	F#2/Gb2	92.4986
21	F2	87.3071
20	E2	82.4069
	D#2/Eb2	77.7817
18	D2	73.4162
	C#2/Db2	69.2957
16	C2	65.4064
15	B1	61.7354
	A#1/B1	58.2705
13	A1	55.0000
	G#1/Ab1	51.9130
11	G1	48.9995
	F#1/Gb1	46.2493
9	F1	43.6536
8	E1	41.2035
	D#1/Eb1	38.8909
6	D1	36.7081
	C#1/Db1	34.6479
4	C1	32.7032
3	H0	30.8677
	A#0/B0	29.1353
1	A0	27.5000