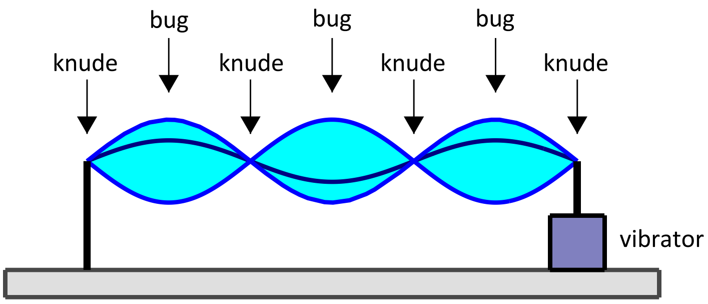
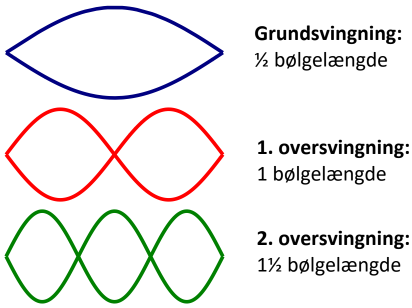
ISBN 9788770668781

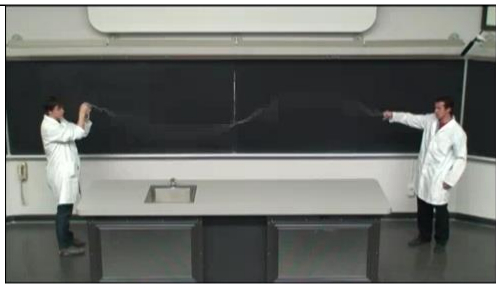
Projekt 1.2 Den vibrerende streng – Stående bølger

Når man sætter en streng i svingninger, så vil strengen vibrere og sende bølger frem og tilbage (refleksion) mellem strengens fæstningspunkter. Disse bølger vil interferere og deres udsving lægges sammen efter superpositionsprincippet. Det betyder, at nogle af bølgerne vil dø ud, mens andre vil forstærkes. Hvis strengen vibrerer med en ganske bestemt frekvens, en såkaldt *resonansfrekvens*, vil den forstærke sig selv og give anledning til en *stående bølge.* Bestemte steder på strengen fremkommer der da store udsving (kaldet *buge*, jfr. hængebugen på et svin), mens der andre steder intet udsving er (kaldet *knuder*). Antallet af buge afhænger naturligvis af strengens (vibrations-)frekvens.





Den svingende streng illustrerer meget fint, hvordan lydbølger udvikler sig. Hvis vi ser på en tone og dennes harmoniske overtoner, så vil grundtonen svare til, at vi ser én bug (svarende til denne tones frekvens), mens overtonerne svarer til svingninger med flere buge. Når strengens frekvens fx fordobles, vil der fremkomme 2 buge, og denne svingning svarer til 1. overtone. Når strengens frekvens tredobles, vil der fremkomme 3 buge, og denne svingning vil svare til 2. overtone osv. Læg mærke til, at grundtonen netop svarer til en halv bølgelængde $\lambda/2$. Hvis man kender bølgens udbredelseshastighed *v* langs strengen kan man finde frekvensen *f* ud fra formlen $v = \lambda \cdot f$.

Hvis vi slår en guitarstreng an, så frembringer vi på samme måde bølger, der bevæger sig frem og tilbage langs strengen over længere tid, idet de reflekteres, der hvor strengen er fastgjort (stol og hoved). Uanset, hvor kompliceret bølgen er, så vil den gentage sig selv netop, når den har gennemløbet strengen to gange (frem og tilbage), og hermed frembringes et periodisk mønster. På samme måde vil den frembragte lyd være periodisk og velklingende – der frembringes musik!	 Du kan *her* se en kort video, der illustrerer svingningsmønstrene for en streng.
Lydbølgerne interferer med hinanden, og kun de lydbølger, der giver anledning til stående bølger, har betydning for den lyd vi hører, fordi de andre dør ud. Der findes altså en samling stående bølger, som tilsammen frembringer lyden af de toner / den musik som guitaristen spiller Grundtonens og overtonernes amplituder afhænger af, hvordan strengen anslås – både hvor på strengen og kvaliteten af anslaget (let/hårdt etc.). Frekvenserne af lydbølgerne vil være de samme som frekvenserne af bølgerne på strengen.	 Du kan *her* se en guitarstreng i slowmotion:

Du kan herunder se andre svingende strenge.
Guitarstreng – slowmotion

Violing – slowmotion

Vi vil nu prøve at forstå matematikken bag de stående bølger nærmere.

Hvis en rumlig sinusbølge $y = A\cdot\sin(k\cdot x)$ udbreder sig langs *x*-aksen i dennes positive retning (til højre) skal vi give *x*-værdien et handicap på $v\cdot t$, dvs. ligningen for en bølge, der udbreder sig med hastigheden v er givet ved $y = A\cdot\sin\big(k\cdot(x - v\cdot t)\big)$.

Øvelse 7.31: Stående bølger

a) Opret en skyder for amplituden *A*, bølgetallet *k* og hastigheden *v*. Opret også en skyder for tiden *t*. Tegn nu grafen for den harmoniske svingning $f(x) = A\cdot\sin\big(k\cdot(x - v\cdot t)\big)$.

b) Animér skyderen for tiden *t* og observer bølgeudbredelsen. Hvordan kan du ved opmåling på figuren finde hastigheden af bølgens udbredelse?

c) Tilføj nu en bølge, der bevæger sig den modsatte vej $g(x) = A\cdot\sin\big(k\cdot(x + v\cdot t)\big)$. Læg de to bølger sammen, dvs. lad dem interferere: $h(x) = f(x) + g(x) = A\cdot\sin\big(k\cdot(x - v\cdot t)\big) + A\cdot\sin\big(k\cdot(x + v\cdot t)\big)$. Beskriv det svingningsmønster, der opstår!

For at kunne håndtere superpositionen matematisk får vi brug for en lille sætning om sinus.

Sætning: Additionssætningen for sinus

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cdot\cos(B) + \cos(A)\cdot\sin(B)$$
$$\sin(A-B) = \sin(A)\cdot\cos(B) - \cos(A)\cdot\sin(B)$$

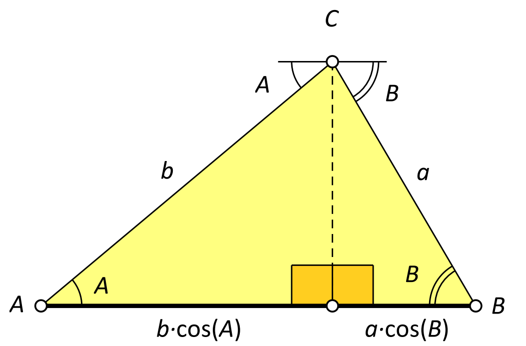
Bevis:

Det er nemmest at føre beviset geometrisk ud fra trekanter. Vi ser da på en trekant *ABC* med spidse vinkler i *A* og *B*. Trekanten splittes med højden fra *C*. Vi finder da opdelingen

$$c = b\cdot\cos(A) + a\cdot\cos(B)$$

Men ifølge sinusrelationerne gælder der

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad\rightarrow\quad a = \frac{\sin(A)}{\sin(C)}\cdot c \quad \text{og} \quad b = \frac{\sin(B)}{\sin(C)}\cdot c$$



Indsæt udtrykkene for *a* og *b* og forkort *c* ud.

$$\cancel{c} = \frac{\sin(B)}{\sin(C)}\cdot\cancel{c}\cdot\cos(A) + \frac{\sin(A)}{\sin(C)}\cdot\cancel{c}\cdot\cos(B)$$

Gang igennem med sin(*C*) på begge sider.

$$\sin(C) = \sin(B)\cdot\cos(A) + \sin(A)\cdot\cos(B)$$

Nu skal der trylles:

$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - A - B)$	Udnyt overgangsformel for sinus
$= \sin(C)$	Udnyt vinkelsummen i en trekant
$= \sin(B)\cdot\cos(A) + \sin(A)\cdot\cos(B)$	Indsæt det lige fundne udtryk for sin(*C*)

Byttes der rundt på led og faktorer fås netop det ønskede.

Den anden identitet fås af den første ved at udskifte *B* med $-B$ og udnytte at sinus skifter fortegn, mens cosinus er uforandret. ✓

Lægges disse to identiteter sammen fås nu

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin(A)\cdot\cos(B)$$

Men det kan vi anvende på vores to bølger, der løber frem og tilbage på strengen, hvorved vi finder

$$\sin(k\cdot(x+v\cdot t))+\sin(k\cdot(x-v\cdot t))=\sin(k\cdot x+k\cdot v\cdot t)+\sin(k\cdot x-k\cdot v\cdot t)$$
$$=2\sin(k\cdot x)\cdot\cos(k\cdot v\cdot t)$$

Denne bemærkelsesværdige omskrivning viser at det er lykkedes os at *separere* de to variable. rum og tid, så den ene faktor kun afhænger af rummet *x*, den anden kun af tiden *t*. Summen af de to bølger, der løber hver sin vej på strengen, giver altså anledning til en enkelt stående bølge med en amplitude, der svinger med tiden:

$$y_{\text{stående bølge}}=A(t)\cdot\sin(k\cdot x)\quad\text{med}\quad A(t)=2\cdot\cos(k\cdot v\cdot t)$$

Nulpunkterne for sinusfunktionen svarer da netop til knudepunkterne, mens midtpunkterne mellem knudepunkterne svarer til sinus-svingningens ekstremumspunkter, og dermed til bugene.

Vender vi os nu mod den svingende streng med længden *L* er det afgørende at den stående svingning har knudepunkter i $x = 0$ og $x = L$. Den første betingelse er automatisk opfyldt, idet sin(0) = 0. Den anden fører til betingelsen $\sin(k\cdot L)=0$, dvs. $k\cdot L=n\cdot\pi$, hvor *n* er et vilkårligt helt tal. Bølgetallet *k* er derfor bundet til værdierne

$$k_n=n\cdot\frac{\pi}{L}\text{, n = 1, 2, 3, …}$$

hvor n=1 svarer til grundtonen og n = 2, 3, … svarer til overtonerne. De tilhørende bølgelængder λ_n er da givet ved

$$\lambda_n=\frac{2\pi}{k_n}=n\cdot\frac{L}{2}$$

Vi kan derimod ikke umiddelbart aflæse frekvensen af bølgens form. Frekvensen stammer fra den svingende amplitude $2\cdot\cos(k\cdot v\cdot t)=2\cdot\cos(\omega\cdot t)$ med $\omega=k\cdot v$. Det fører til svingningstiden

$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2\pi}{k_n\cdot v}=\frac{2\cdot L}{n\cdot v}$$

Frekvensen er derfor givet ved

$$f_n=\frac{1}{T_n}=n\cdot\frac{v}{2\cdot L}=n\cdot\frac{v}{\lambda_1}=n\cdot f_1$$

Dermed har vi bekræftet den indledende beskrivelse af grundtonen og overtonerne hørende til den svingende streng.

Perspektivering

Bernoullis påstand var at vi kunne bygge det generelle svingningsmønster op ved at lægge sådanne stående svingninger sammen

$$y=A_1\cdot\sin(\frac{\pi}{L}\cdot x)\cdot\cos(\frac{\pi}{L}\cdot v\cdot t)+A_2\cdot\sin(\frac{2\pi}{L}\cdot x)\cdot\cos(\frac{2\pi}{L}\cdot v\cdot t)+A_3\cdot\sin(\frac{3\pi}{L}\cdot x)\cdot\cos(\frac{3\pi}{L}\cdot v\cdot t)+\dots,$$

hvor hver af komponenterne udvikler sig uafhængigt af de øvrige.