

## Projekt 10.6 Struktur og sammenhæng i Euklids Elementer

*Projektet er todelt: Første del har fokus på Euklids system og består af introduktionen, samt I og II. Anden del har fokus på Hilberts system fra omkring år 1900 og består af III sammen med bilagene. Man kan nøjes med første del og stå af efter det. Man kan også nøjes med anden del, hvis eleven først får en kort introduktion til Euklids system.*

Euklid sammenfattede det meste af sin tids viden om matematik i ét værk, han kaldte *Elementer*. Det kom til at afløse en række ældre værker, som derved også gled væk i glemsel. Man tænkte ikke på at bevare ældre lærebøger for eftertiden. Euklids *Elementer* består af 13 bøger:

- Bog I: Elementære konstruktioner
- Bog II: Geometrisk Algebra
- Bog III: Cirkelns Geometri
- Bog IV: Regulære Polygoner
- Bog V: Størrelseslæren
- Bog VI: Lighedannethed
- Bog VII: Grundlæggende Talteori
- Bog VIII: Lighedannetheder ("kædebrøker") i talteori
- Bog IX: Talteori
- Bog X: Irrationale tal
- Bog XI: Rumgeometri
- Bog XII: Areal og Volumen
- Bog XIII: Konstruktion af de 5 regulære polyedre

\*\*\*\*\*

Hver bog starter med en række definitioner og nogle postulater (eller: aksiomer som vi ville sige i dag). Bog I starter således med 23 definitioner og 5 postulater. Dertil kommer 5 aksiomer som gælder i al matematik. Du finder det som vedrører bind 1 i bilag 1. Hos Euklid skelnes mellem *postulater*, der er ting vi tager for givet i et bestemt område, som her plangeometri, og *aksiomer*, der er ting vi tager for givet i al matematik. I moderne matematik skelner vi ikke – det hele kaldes aksiomer.

Du kan få en god indføring i Euklids matematik, med forklaringer på alle definitioner og aksiomer og med en demonstration af metoden via en gennemgang af de forskellige sætninger og konstruktioner, hvis du går ind på hjemmesiden <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html>. I bilaget ligger som omtalt en dansk udgave af definitioner, postulater og aksiomer.

### Øvelse 1. Strukturen i Euklids Elementer

#### I. Euklids beviser og konstruktioner

Gå ind på siden, læs kapitel I, mindst de første 4 propositioner og udfyld et skema som nedenstående, hvor du krydser af, hver gang Euklid anvender en definition, et postulat, et aksiom eller allerede viste sætninger. Noter også ned, hvis Euklid bruger noget, du mener han ikke har belæg for.

Definitioner	Postulater					Aksiomer					sætninger eller konstruktioner	
Skriv nummer	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5		
											1	Konstruktion af ligesidet trekant
											2	Flytning af linjestykke
											3	Afsætn. af linjestykke
											4	kongruenssætn
											5	
											6	

Du kan hente et skema [her](#).

## II. Holder Euklids projekt – eller er der huller i Euklids argumentation (især for A)

Ambitionen med Euklids Elementer var at opbygge en aksiomatisk deduktiv teori, især inden for geometrien. En teori, hvor alle ræsonnementer bygger på definitioner og aksiomer der er fastlagt fra starten samt på de tidligere sætninger, der er vist undervejs. Teorien kom til at dannes skole for andre dele af matematik og for andre fag. Men holder projektet?

Det begyndte man at stille spørgsmål ved i årene omkring 1900, og en række filosoffer og matematikere gav hver deres bud på et svar. På A-niveau vil vi beskæftige os mere grundigt med forskellige aksiomsystemer. I bilag 2 findes en lettere bearbejdet version af det aksiomsystem, som datidens største matematiker David Hilbert udarbejdede.

- a) For bedre at forstå aksiomerne, så lav selv tegninger til hver af dem
- b) Holder Euklids beviser? Eller er der huller i Euklids argumentation, hvor han bruger resultater, han ikke har redegjort for? Gå selv på opdagelse i de første sætninger, som du gennemgik i punkt I. Eller: Tag udgangspunkt i beviset for første sætning, der er grundigt gennemgået i kapitel 10, afsnit 1. Du kan i dit detektivarbejde anvende bilag 2 som dit hemmelige dokument.

## Øvelse 2. Hilberts system

### III. Holder Hilberts projekt? (især for A)

I en række år var Hilberts projekt idealet for de fleste matematikere. Der var andre holdninger til hvad matematik egentlig er. Men ingen havde forestillet sig, at det ville bryde sammen af principielle grunde. Det var en kæmpe overraskelse, da den østrigske matematiker Kurt Gödel i 1936 beviste, at et sådan fuldendt system ikke kan laves. Det er kompliceret matematik, men på A-niveau kan man godt forstå den grundlæggende ide.

- a) Find på nettet en populær fremstilling af, hvad der var Gödel fandt ud af, og giv et referat heraf.

## Bilag 1. Euklids system

## EUKLIDS ELEMENTER BOG 1

*Definitioner*

1. Et punkt er det, der ikke kan deles.
2. En linje er en længde uden bredde.
3. En linjes begrænsninger er punkter.
4. En ret linje er en linje, som ligger *lige* mellem punkterne på den.
5. En flade er det, der kun har en længde og en bredde.
6. En flades begrænsninger er linjer.
7. En plan flade er en flade, som ligger *lige* mellem de rette linjer i den.
8. En plan vinkel er hældningen mellem to linjer, der ligger i samme plan, har et punkt fælles og ikke ligger på en ret linje.
9. Når de linjer, der indeslutter vinkler, er rette, kaldes vinklen retlinjet.
10. Når en ret linje er oprejst på en anden, så at de ved siden af hinanden liggende vinkler bliver lige store, er enhver af de lige store vinkler ret; og denne rette linje, der er oprejst på den anden, kaldes vinkelret på denne.
11. En stump vinkel er en vinkel, som er større end en ret.
12. En spids vinkel er en vinkel, som er mindre end en ret.
13. En omkreds er begrænsningen af noget.
14. En figur er det, der indesluttet af en eller flere omkredse.
15. En cirkel er en plan figur, indesluttet af en sådan linje (som kaldes periferien), at alle de rette linjer, der kan trækkes ud til den fra et inden for figuren liggende punkt, er indbyrdes lige store.
16. Dette punkt kaldes centrum i cirklen.
17. En diameter i cirklen er en ret linje, trykket gennem centrum og begrænset til begge sider af cirkelperiferien, og den halverer også cirklen.
18. En halvcirkel er en figur, som indesluttet af en diameter og den af diameteren afskårne periferi. Halvcirkelns centrum er det samme som cirkelns.
19. Retlinjede figurer er sådanne, som indesluttet af rette linjer: tresidede, som indesluttet af tre, firesidede af fire, flersidede af flere end fire rette linjer.

20. Af tresidede figurer kaldes den, der har alle tre sider lige store, en ligesidet, den som kun har to sider lige store, en ligebenet, og den, som har alle tre sider ulige store, en skæv trekant.
21. Af tresidede figurer kaldes endvidere den, der har en ret vinkel, en retvinklet, den, der har en stump vinkel, en stumpvinklet, den, der har alle tre vinkler spidse, en spidsvinklet trekant.
22. Af firesidede figurer kaldes den, der både er ligesidet og retvinklet, et kvadrat, den, der er retvinklet, men ikke ligesidet, et rektangel, den, der er ligesidet, men ikke retvinklet, en rhombe, den, der både har modstående sider og vinkler lige store, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en rhomboide, de øvrige firesider kunne kaldes trapezer.
23. Parallelle linjer er rette linjer, der ligger i samme plan, og som, når de forlænges ubegrænset til begge sider, ikke mødes til nogen af siderne.

*Postulater*

Lad det være forudsat:

1. At man kan trække en ret linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt.
2. At man kan forlænge en begrænset linje i ret linje ud i eet.
3. At man kan tegne en cirkel med et hvilket som helst centrum og en hvilken som helst radius.
4. At alle rette vinkler er lige store.
5. At når en ret linje skærer to rette linjer og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linjer, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler, der er mindre end de to rette, ligger.

*Almindelige begreber (Aksiomer)*

1. Størrelser, der er lige store med samme størrelse, er indbyrdes lige store.
2. Når lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er summerne lige store.
3. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store.
4. Størrelser, der kan dække hverandre, er indbyrdes lige store.
5. Det hele er større end en del deraf.

Ovenstående er gengivet fra Thyra Eibes oversættelse, der stadig er den eneste samlede oversættelse til dansk.

## Bilag 2. Hilberts system

**Hilberts 16 aksiomer - Et forsøg på at skabe et konsistent og fuldstændigt aksiomsystem for geometri**

En lettere bearbejdet version af David Hilberts aksiomsystem.

(Bemærk, at der nogle steder anvendes begreber, der skal defineres, fx i nr. 4 anvendes begrebet: at ligge på samme / modsatte side af en linje. Disse begreber defineres til sidst i dokumentet)

**For bedre at forstå aksiomerne, så lav selv tegninger til hver af dem****Skæringsaksiomer**

1. Hvis P og Q er to forskellige punkter, findes der præcis én linje som indeholder både P og Q.
2. For hver linje  $l$  findes der mindst to forskellige punkter på  $l$ .
3. Der findes tre forskellige punkter med den egenskab, at ingen linje indeholder alle tre.

**Beliggenhedsaksiomer**

1. Hvis punktet B ligger mellem A og C, så er de tre punkter forskellige og ligger på samme linje, og B ligger også mellem C og A.
2. Hvis B og D er to forskellige punkter, så findes der yderligere tre punkter A, C og E på linjen gennem B og D, således at:
  - B ligger mellem A og D
  - C ligger mellem B og D
  - D ligger mellem B og E
3. Hvis A, B og C er tre forskellige punkter, der ligger på samme linje, så er der præcis ét af punkterne, der ligger mellem de andre to.
4. Hvis  $l$  er en linje og A, B og C er tre forskellige punkter, der ikke ligger på  $l$ , så gælder:
  - Hvis A og B ligger på samme side af  $l$  og B og C ligger på samme side af  $l$ , så ligger A og C på samme side af  $l$ .
  - Hvis A og B ligger på modsat side af  $l$  og B og C ligger på modsat side af  $l$ , så ligger A og C på samme side af  $l$ .

**Kongruensaksiomer**

*De følgende aksiomer fastlægger hvad vi forstår ved kongruens. Det er i overensstemmelse med vores intuitive opfattelse af hvad det vil sige at to objekter er kongruente: Det betyder at man kan "flytte" det ene objekt så det præcis dækker det andet. Men i et aksiomsystem fastlægges betydningen af ordet præcis af de følgende aksiomer*

1. Hvis A og B er to forskellige punkter, og A' er et vilkårligt tredje punkt, så vil der på hver halvlinje der udgår fra A' findes præcis et punkt B', der er forskellig fra A' og så AB er kongruent med A'B'.

*"Linjestykker kan flyttes"*

Notation: Vi bruger symbolet  $\cong$  for kongruens, dvs.:  $AB \cong A'B'$

2. Hvis  $AB \cong CD$  og  $AB \cong EF$ , så er  $CD \cong EF$ . Endvidere er alle linjestykker kongruent med sig selv.

*"Er to stykker kongruente med same tredje stykke, er de indbyrdes kongruente"*

3. Hvis B ligger mellem A og C, B' ligger mellem A' og C', og hvis  $AB \cong A'B'$  og  $BC \cong B'C'$ , så er  $AC \cong A'C'$ .

*"Addition af kongruente linjestykker giver kongruente linjestykker"*

4. Givet en vinkel  $\angle BAC$  og en halvlinje A'B', der udgår fra et punkt A', så findes der på hver side af linjen A'B' præcis én halvlinje A'C', således at  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ .

*"Vinkler kan flyttes"*

5. Hvis  $\angle A \cong \angle B$  og  $\angle A \cong \angle C$ , så er  $\angle B \cong \angle C$ . Endvidere er alle vinkler kongruent med sig selv.

*"Er to vinkler kongruente med same tredje vinkel, er de indbyrdes kongruente"*

6. Hvis vi har to trekanter  $ABC$  og  $A'B'C'$ , hvor  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  og hvor vinklernes to linjestykker er indbyrdes kongruente, dvs.  $AB \cong A'B'$  og  $AC \cong A'C'$ , så er de to trekanter kongruente.

*"Aksiomet binder kongruens af linjestykker sammen med kongruens af vinkler – dette aksiom er en sætning hos Euklid, som han prøver at vise, men hvor han bruger en flytningsoperation uden at have defineret dette"*

### Kontinuitetsaksiomer

*(De følgende aksiomer bygger på definitioner, der længden / størrelsen af et linjestykke)*

1. Hvis en cirkel  $C$  har et punkt indenfor og et andet punkt udenfor en anden cirkel  $C'$ , så vil de to cirkler skære hinanden i to punkter.

2. Hvis et linjestykke har det ene endepunkt inden for en cirkel og det andet endepunkt uden for cirklen, så skærer linjestykket cirklen i et punkt.

### Parallelaksiomet (Hilbert)

For enhver linje  $l$  og ethvert punkt  $P$ , der ikke ligger på  $l$ , findes der højst én linje  $m$  gennem  $P$ , så  $m$  er parallel med  $l$ . Når Hilbert siger "højst en" er det fordi man ud fra de øvrige aksiomer kan bevise, at der findes mindst en.

---

### Aksiomer, der binder geometri og talmængder sammen

Foruden disse aksiomer for geometrien findes der yderligere nogle aksiomer, der forbinder geometri med de reelle tal, dvs. med det at kunne måle størrelser.

#### **Archimedes aksiom (Forudsætter eksistensen af naturlige tal)**

Hvis  $CD$  er et linjestykke og  $r$  er  $n$  halvlinje der udgår fra et punkt  $A$ , så findes der til hvert punkt  $B$  på halvlinjen et helt tal  $n$  således at, hvis vi lægger  $n$  stykker af  $CD$  i forlængelse af hinanden, ud fra  $A$ , så fremkommer et punkt  $E$  hvorom der gælder, at  $n \cdot CD \cong AE$ , samt at  $B$  ligger mellem  $A$  og  $E$ , evt. er  $B = E$ .

*"med en enhed kan vi måle vilkårligt store tal og længder"*

#### **Dedekinds Aksiom (konstruktion af de reelle tal)**

Antag et alle punkter på en linje  $l$  er opdelt i to grupper,  $H$  og  $V$ , således at der ikke findes noget punkt i  $H$ , der ligger mellem to punkter i  $V$  og omvendt ikke noget punkt i  $V$ , der ligger mellem to punkter i  $H$ . Så findes præcis et punkt  $O$  på  $l$ , således at  $H$  og  $V$  er lig med hver sin af de to modsatte halvlinjer, der går ud fra  $O$ .

### Uddrag af Hilberts definitioner

#### **Definition af parallelle linjer**

To linjer  $l$  og  $m$  kaldes parallelle, hvis de ikke skærer hinanden, dvs. hvis der ikke findes noget punkt, der ligger på begge linjer.

#### **Definition af beliggenhed**

Lad linjen  $l$  være givet, og lad punkterne A og B være to forskellige punkter, der ikke ligger på  $l$ .

- Hvis linjestykket AB ikke indeholder punkter fra linjen  $l$ , siger vi at A og B ligger på samme side af  $l$ .

- Hvis linjestykket AB indeholder et punkt fra linjen  $l$ , siger vi at A og B ligger på modsat side af  $l$ .

*Bemærk: Det udelukkede tredjes princip betyder, at to punkter enten ligger på samme side, eller ligger på modsat side af en linje  $l$ .*

#### **Definition af halvlinje ("stråle")**

Hvis vi har givet to forskellige punkter A og B, så er halvlinjen AB (betegnes af og til  $\overline{AB}$ ) Punkterne på linjestykket AB samt alle de punkter C på linjen gennem A og B, som har den egenskab, at B ligger mellem A og C. Man siger at halvlinjen  $\overline{AB}$  udgår fra A. Man siger at halvlinjen AB er *en del af* linjen gennem A og B

#### **Definition af modsatte halvlinjer**

Halvlinjerne AB og AC kaldes *modsatte* (eller modsat rettede), hvis de er forskellige, udgår fra samme punkt A og hvis linjerne AB og AC er ens.

#### **Definition af en vinkel**

En vinkel med hjørne A er et punkt A sammen med to forskellige og ikke modsatrettede halvlinjer AB og AC der udgår fra A. AB og AC kaldes *vinklens sider* eller vinklens *ben*. vinklen betegnes  $\angle A$ ,  $\sphericalangle A$ ,  $\angle BAC$  eller  $\angle CAB$

*Bemærk: Definitionen udelukker lige vinkler og vinkler med 0 grader.*

#### **Definition af supplementvinkler**

Hvis de to vinkler  $\angle BAD$  og  $\angle CAD$  har en fælles side AD, og hvis de to andre sider AB og AC er modsatrettede halvlinjer, så kaldes de to vinkler for supplementvinkler.

#### **Definition af ret vinkel**

En vinkel  $\angle BAD$  kaldes en ret vinkel, hvis den har en supplementvinkel, som den er *kongruent* med.

*Bemærk: Ordet kongruent er ikke defineret. Det er et ord på linje med "lig med", men med en lidt bredere betydning. Betydningen af kongruens fastlægges i kongruensaksiomerne.*

#### **Definition af indre punkt i en vinkel**

Hvis vi har givet en vinkel  $\angle CAB$ , så kaldes et punkt D for et indre punkt i vinklen, hvis D ligger på samme side af linjen AC som B gør, og hvis D ligger på samme side af linjen AB som C gør.

#### **Definition af en halvlinje mellem to halvlinjer**

Halvlinjen AD siges at ligge mellem halvlinjerne AC og AB, hvis AB og AC ikke er modsatrettede halvlinjer, og punktet D er et indre punkt i vinklen  $\angle CAB$

**Definition af det indre i en trekant**

Det indre i en trekant er mængden af alle punkter, der er indre i hver af de tre vinkler. Et ydre punkt er et punkt, som hverken er indre eller ligger på trekantens sider.

**Definition af det indre i cirkel**

Givet en cirkel med centrum  $O$  og radius  $OR$ . Et punkt  $P$  kaldes et indre punkt, hvis  $OP < OR$  og kaldes et ydre punkt, hvis  $OP > OR$ .