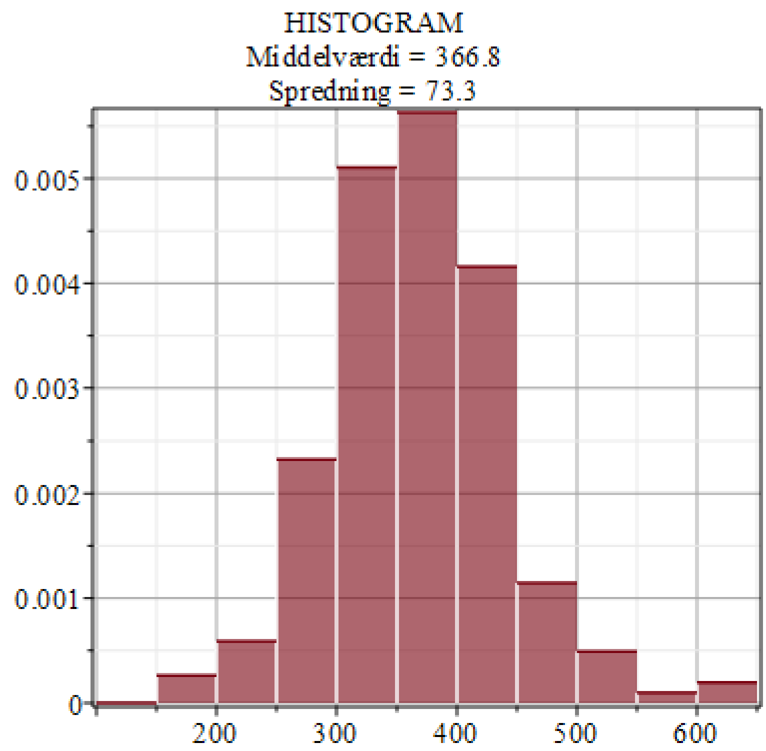
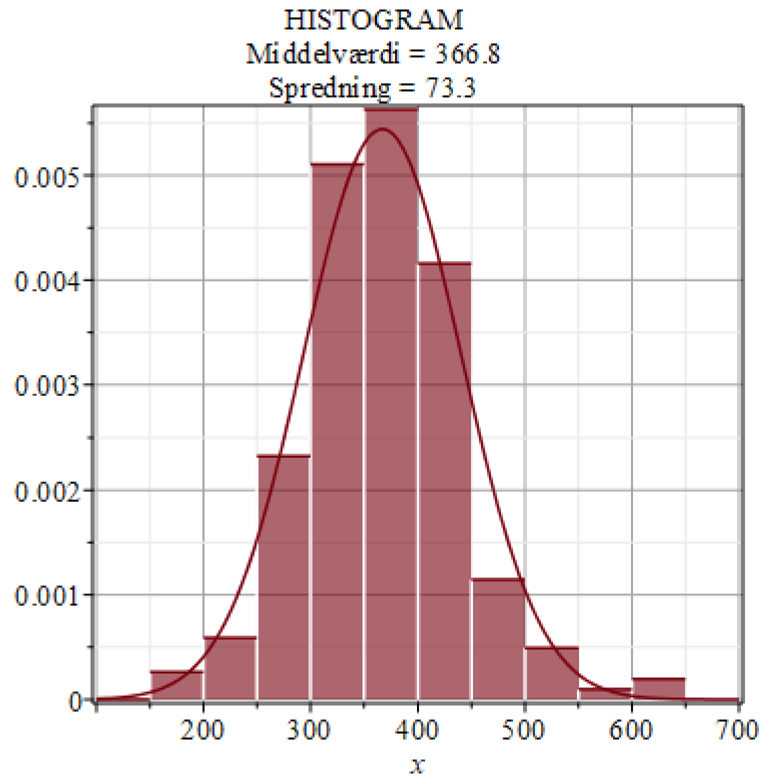
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 8

Øvelse 8.1	Se stumfilmen.
Øvelse 8.2	Øvelsen viser, at variationen bliver mindre, hvis nedarvning er et resultat af et gennemsnit.
Øvelse 8.3	Projekt om Mendels arvelighedslove.
Øvelse 8.4	a) Johannsens diagram er et histogram over fordelingen af vægt for prinsessebønnerne. Hyppigheden af afkom i de forskellige vægtklasser. Desuden er en grafen for en teoretisk tæthedsfunktion for samme fordeling tegnet. b)  c) Svaret til b) viser, at værktøjsprogrammet bestemmer middelværdien til 366,8 mg og spredningen 73,3 mg. d)

ISBN 9788770668781



e) Ud fra normalfordelingen kan vi bestemme de forventede procentdele for hvert interval som multipliceret med 606 giver de genskabte tal.

$$(normalcdf(366.8, 73.3, 150) - normalcdf(366.8, 73.3, 100)) \cdot 606$$
$$0.8564427714$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 200) - normalcdf(366.8, 73.3, 150)) \cdot 606$$
$$5.990860187$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 250) - normalcdf(366.8, 73.3, 200)) \cdot 606$$
$$26.72088940$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 300) - normalcdf(366.8, 73.3, 250)) \cdot 606$$
$$76.07303239$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 350) - normalcdf(366.8, 73.3, 300)) \cdot 606$$
$$138.3474521$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 400) - normalcdf(366.8, 73.3, 350)) \cdot 606$$
$$160.7978071$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 450) - normalcdf(366.8, 73.3, 400)) \cdot 606$$
$$119.4569264$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 500) - normalcdf(366.8, 73.3, 450)) \cdot 606$$
$$56.7099390$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 550) - normalcdf(366.8, 73.3, 500)) \cdot 606$$
$$17.1936797$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 600) - normalcdf(366.8, 73.3, 550)) \cdot 606$$
$$3.3262875$$
$$(normalcdf(366.8, 73.3, 650) - normalcdf(366.8, 73.3, 600)) \cdot 606$$
$$0.4101644$$

Øvelse 8.5

a)

b)

ISBN 9788770668781

z-scores:

$$z=\frac{100-368.4}{71.9} \quad z=-3.732962448$$

$$z=\frac{150-368.4}{71.9} \quad z=-3.037552156$$

$$z=\frac{200-368.4}{71.9} \quad z=-2.342141864$$

$$z=\frac{250-368.4}{71.9} \quad z=-1.646731572$$

$$z=\frac{300-368.4}{71.9} \quad z=-0.9513212796$$

$$z=\frac{350-368.4}{71.9} \quad z=-0.2559109875$$

$$z=\frac{400-368.4}{71.9} \quad z=0.4394993046$$

$$z=\frac{450-368.4}{71.9} \quad z=1.134909597$$

$$z=\frac{500-368.4}{71.9} \quad z=1.830319889$$

$$z=\frac{550-368.4}{71.9} \quad z=2.525730181$$

$$z=\frac{600-368.4}{71.9} \quad z=3.221140473$$

$$z=\frac{650-368.4}{71.9} \quad z=3.916550765$$

c)

frekvensTabel(*DataPrinsessebønner*)

observation	hyppighed	frekvens (%)	kumuleret (%)
100 .. 150	0	0	0
150 .. 200	8	1.309	1.31
200 .. 250	18	2.946	4.26
250 .. 300	71	11.62	15.9
300 .. 350	156	25.53	41.4
350 .. 400	172	28.15	69.6
400 .. 450	127	20.79	90.3
450 .. 500	35	5.728	96.1
500 .. 550	15	2.455	98.5
550 .. 600	3	0.491	99
600 .. 650	6	0.982	100

$$\frac{1.309}{0.695} \quad 1.883453237$$

$$\frac{2.946}{0.695} \quad 4.238848921$$

$$\frac{11.62}{0.695} \quad 16.71942446$$

$$\frac{25.53}{0.695} \quad 36.73381295$$

$$\frac{28.15}{0.695} \quad 40.50359712$$

$$\frac{20.79}{0.695} \quad 29.91366906$$

$$\frac{5.728}{0.695} \quad 8.241726619$$

$$\frac{2.455}{0.695} \quad 3.532374101$$

$$\frac{0.491}{0.695} \quad 0.7064748201$$

$$\frac{0.982}{0.695} \quad 1.412949640$$

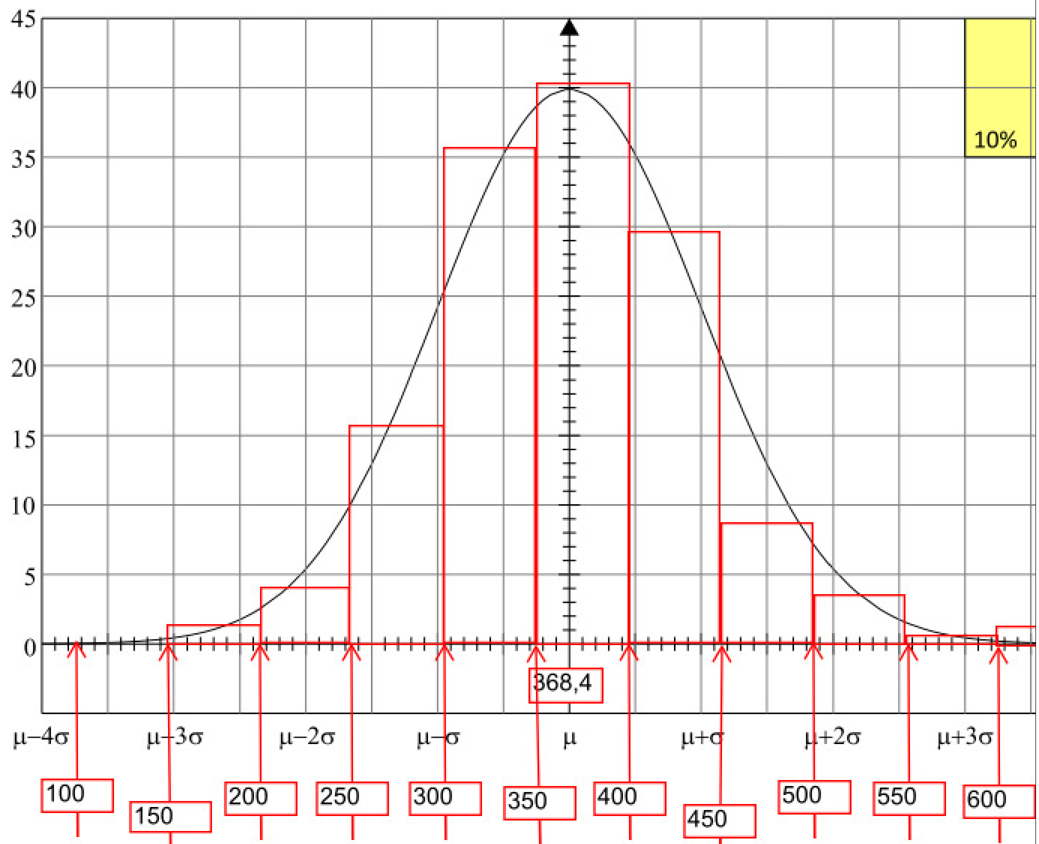
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Hvad er matematik? 3
ISBN 9788770668781

website: link fra kapitel 8, afsnit 1

Johannsens normalfordelingspapir i en moderne udgave



Sammenlignes med figuren på side 343, så er der fin overensstemmelse.

Øvelse 8.6

slutværdi	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
Slutværdi²	64	36	16	4	0	4	16	36	64
Hyppighed	4	26	103	219	283	230	102	31	2

Hyppighederne er resultatet af 1000 simuleringer.

$$\frac{(-8)\cdot 4+(-6)\cdot 26+(-4)\cdot 103+(-2)\cdot 219+283\cdot 0+230\cdot 2+102\cdot 4+31\cdot 6+8\cdot 2}{1000} \quad \frac{4}{125}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} \quad 0.032000$$

$$\frac{(-8)^2\cdot 4+(-6)^2\cdot 26+(-4)^2\cdot 103+(-2)^2\cdot 219+283\cdot 0+230\cdot 2^2+102\cdot 4^2+31\cdot 6^2+8^2\cdot 2}{1000} \quad \frac{939}{125}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} \quad 7.5120$$

Øvelse 8.7

a), b) og c) På baggrund af 100 simuleringer med 5 skridt fås følgende:

L&R Uddannelse EGMONT

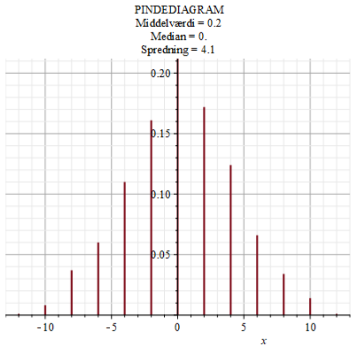
	A	B	C	D	E	F
1	Højde	Position		skridt	Gennemsnit slutvæ...	Gennemsnit kvadrat slut...
2	5	0		-1	0.13	4.35
3	4	1		1		
4	3	2				
5	2	3				
6	1	4				
7	0	3	9			
8						
9						
10						

Konklusion: Gennemsnit af slutværdier=0,13 og gennemsnit af kvadrat på slutværdier=4,35.

Øvelse 8.8

a) 1000 simuleringer med 16 skridt kan give følgende fordeling af slutværdier.

plotPindediagram(liste)



middel(liste)

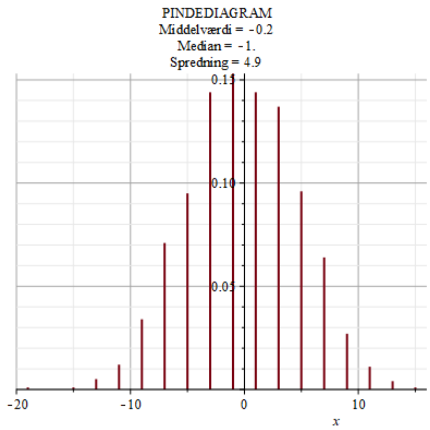
0.1500000000

varians(liste)

16.6215000000000

1000 simuleringer med 25 skridt kan give følgende fordeling af slutværdier.

plotPindediagram(liste2)



middel(liste2)

−0.1800000000

varians(liste2)

24.2396000000000

b) Simuleringerne med 16 og 25 skridt giver anledning til en formodning:
gennemsnit af slutværdier=0.
gennemsnit af kvadraterne på slutværdierne=n.

Øvelse 8.9

a) Forventede hyppigheder randomwalk med 2 skridt.

Slutværdi	-2	0	2
Forventet hyppighed	1	2	1

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Forventet slutværdi med 2 skridt:

$$\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 0+1\cdot 2}{4}=0$$

Forventet slutkvadrat med 2 skridt:

$$\frac{1\cdot(-2)^2+2\cdot 0^2+1\cdot 2^2}{4}=2$$

Forventede hyppigheder randomwalk med 3 skridt.

Slutværdi	-3	-1	1	3
Forventet hyppighed	1	3	3	1

Forventet slutværdi med 3 skridt:

$$\frac{1\cdot(-3)+3\cdot(-1)+3\cdot 1+1\cdot 3}{8}=0$$

Forventet slutkvadrat med 3 skridt:

$$\frac{1\cdot(-3)^2+3\cdot(-1)^2+3\cdot 1^2+1\cdot 3^2}{8}=3$$

Forventede hyppigheder randomwalk med 4 skridt.

Slutværdi	-4	-2	0	2	4
Forventet hyppighed	1	4	6	6	1

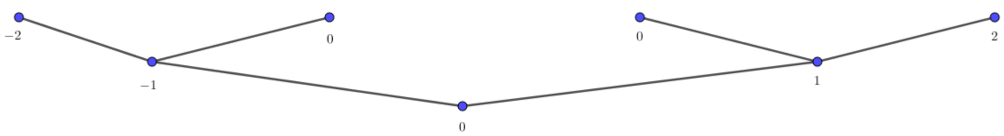
Forventet slutværdi med 4 skridt:

$$\frac{1\cdot(-4)+4\cdot(-2)+6\cdot 0+4\cdot 2+1\cdot 4}{16}=0$$

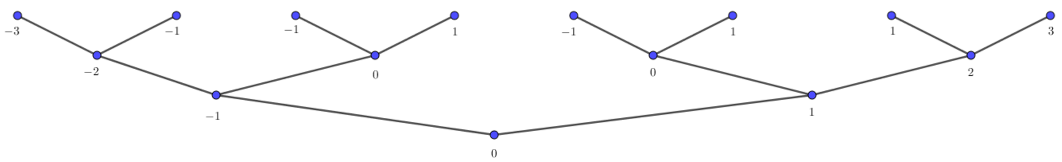
Forventet slutkvadrat med 4 skridt:

$$\frac{1\cdot(-4)^2+4\cdot(-2)^2+6\cdot 0^2+4\cdot 2^2+1\cdot 4^2}{16}=4$$

b) Binært træ for random walk med 2 skridt.



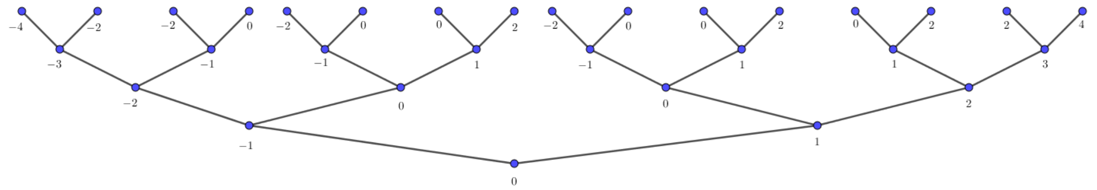
Binært træ for random walk med 3 skridt.



Binært træ for random walk med 4 skridt.

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Øvelse 8.10</td><td>
a) Ny definition: En partikel starter i m, og bevæger sig på en talakse på en sådan måde, at den i hvert skridt går enten r skridt til venstre eller r skridt til højre. Om vi går til venstre eller højre er helt tilfældigt og har hver gang sandsynligheden 50%.
b) Vi skal bevise, at $E(X)=m.$
For 1 skridt, dvs. $n=1$ får vi $E(X)=\dfrac{m-r+m+r}{2}=\dfrac{2m}{2}=m$.
For 2 skridt, dvs. $n=2$ får vi $E(X)=\dfrac{m-2r+m+m+m+2r}{4}=\dfrac{4m}{4}=m$.
Vi antager, at det gælder for n.
Efter n skridt har vi slutpositionerne $\{m-r\cdot n, m-r\cdot n+2\cdot r, ..., m+r\cdot n-2\cdot r, m+r\cdot n\}$ med 2^n forskellige veje.
Vi vælger den x'te slutposition, hvor vi kan gå til slutpositionerne x-r eller x+r.
$$E(X)=\frac{\sum \text{slutpositioner}}{2^{n+1}}=\frac{\sum x-r+x+r}{2^{n+1}}=\frac{\sum 2x}{2^{n+1}}=\frac{2\sum x}{2^{n+1}}=\frac{\sum x}{2^n}=m.$$
Dermed har vi bevist påstanden med et induktionsbevis.
c), d) og e). Vi skal bevise, at $V(X)=r^2\cdot n.$
For 1 skridt, dvs. $n=1$ får vi $V(X)=\dfrac{(m-r-m)^2+(m+r-m)^2}{2}=\dfrac{r^2+r^2}{2}=r^2$.
For 2 skridt, dvs. $n=2$ får vi
$$V(X)=\frac{(m-2r-m)^2+2(m-m)^2+(m+2r-m)^2}{4}=\frac{4r^2+4r^2}{4}=2r^2$$
Vi antager, at det gælder for n.
Efter n skridt har vi slutpositionerne $\{m-r\cdot n, m-r\cdot n+2\cdot r, ..., m+r\cdot n-2\cdot r, m+r\cdot n\}$ med 2^n forskellige veje.
Vi vælger den x'te slutposition, hvor vi kan gå til slutpositionerne x-r eller x+r.
</td></tr>
</table>

ISBN 9788770668781

$$V(X)=\frac{\sum \text{slutpositioner}}{2^{n+1}}=\frac{\sum\left(x-r-m\right)^2+(x+r-m)^2}{2^{n+1}}=\frac{\sum\left(x-(r+m)\right)^2+(x+(r-m))^2}{2^{n+1}}=$$

$$\frac{\sum x^2+(r+m)^2-2x\cdot(r+m)+x^2+(r-m)^2+2x\cdot(r-m)}{2^{n+1}}=$$

$$\frac{\sum x^2+r^2+m^2+2r\cdot m-2x\cdot r-2x\cdot m+x^2+r^2+m^2-2r\cdot m+2x\cdot r-2x\cdot m}{2^{n+1}}=$$

$$\frac{\sum 2x^2+2r^2+2m^2-4x\cdot m}{2^{n+1}}=$$

$$\frac{2\sum x^2+r^2+m^2-2x\cdot m}{2^{n+1}}=$$

$$\frac{2\sum x^2+m^2-2x\cdot m+2\sum r^2}{2^{n+1}}=$$

$$\frac{2\sum (x-m)^2}{2^{n+1}}+\frac{2\sum r^2}{2^{n+1}}=$$

$$\frac{\sum (x-m)^2}{2^{n}}+\frac{2\cdot r^2\cdot 2^n}{2^{n+1}}=$$

$$r\cdot n^2+r^2=r^2\cdot(n+1).$$

Dermed har vi bevist påstanden med et induktionsbevis.

f)

$$V(X)=1$$

$$r^2\cdot n=1$$

Vi har nu $r=\sqrt{\frac{1}{n}}$

$$r=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Øvelse 8.11

Repetition af Pascals trekant I andre kulturer.

Øvelse 8.12

Tallet a i den n+1'te række fortæller antallet af veje til denne slutposition. I den n'te række kan man netop komme til slutpositionen i den n+1'te række fra de to positioner, hvor der er henholdsvis b og c veje til. Dermed bliver a=b+c. Øvelsen er en generalisering af beviset for sætning 2: Opbygningen af Pascals trekant.

Øvelse 8.13

6. række		1	6	15	20	15	6	1	
7. række	1	7	21	35	35	21	7	1	
8. række	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Øvelse 8.14

15. række	1	16-1= 15	120-15= 105	455	1365	3003	5005	6435	5005	3003	1365	454	105	15	1

Øvelse 8.15

a) I Maple er kommandoen $\binom{n}{r}$ svarende til binomial(n,r). I Nspire og Geogebra er kommandoen nCr(n,r).

b) K(8,3)=56. Se svarene til øvelse 8.13.

L&R Uddannelse EGMONT

	c) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.
Øvelse 8.16	c) Da der er 32 elever og 5 skal sidde i udvalget, og udvælgelsen foregår uden at en person kan vælges flere gang. $\binom{32}{5} = 201376$. Antallet af festudvalg er 201376.
Øvelse 8.17	$\binom{16}{0} = 1$, $\binom{16}{1} = 16$, $\binom{16}{2} = 120$ og $\binom{16}{3} = 560$ Der er overensstemmelse.
Øvelse 8.18	En klasse med 30 elever har fået følgende hyppighedstabel for en random walk med 16 skridt. $klasseliste := [seq(randomwalk16skridt(\,), i = 1..30)]$ $klasseliste := [-6, 2, 4, 2, -2, -2, 0, -2, -4, 0, -8, -2, 0, -6, 0, 6, -6, -2, 4, 6, 0, 2, 0, 4, -2, -2, 2, 0, 8, 6]$ $hyppighed(klasseliste)$ $\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 1 \\ -2 & 7 \\ 0 & 7 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ a) $Procentdel_{en\ standardafvigelse} = \frac{1+7+7+4+3}{30}$ $Procentdel_{en\ standardafvigelse} = 0.73333$ $Procentdel_{en\ standardafvigelse\ halvt} = \frac{\frac{1}{2}+7+7+4+\frac{3}{2}}{30}$ $Procentdel_{en\ standardafvigelse\ halvt} = 0.66667$ b) $Procentdel_{normale\ udfald} = \frac{1+3+1+7+7+4+3+3+1}{30}$ $Procentdel_{normale\ udfald} = 1$ $Procentdel_{normale\ udfald\ halvt} = \frac{\frac{1}{2}+3+1+7+7+4+3+3+\frac{1}{2}}{30}$ $Procentdel_{normale\ udfald} = 0.96667$ c) $Procentdel_{exceptionelle\ udfald} = \frac{0}{30}$ $Procentdel_{exceptionelle\ udfald} = 0$
Øvelse 8.19	a), b) og c) Ideel random walk med 16 skridt: $Procentdel_{en\ standardafvigelse\ halvt} = \frac{\frac{8008}{2}+11440+12870+11440+\frac{8008}{2}}{2^{16}}$ $Procentdel_{en\ standardafvigelse\ halvt} = 0.66769$ $Procentdel_{normale\ udfald\ halvt} = \frac{\frac{1820}{2}+4368+8008+11440+12870+11440+8008+4368+\frac{1820}{2}}{2^{16}}$ $Procentdel_{normale\ udfald\ halvt} = 0.95096$ $Procentdel_{exceptionelle\ udfald} = \frac{1+16+\frac{120}{2}+\frac{120}{2}+16+1}{2^{16}}$ $Procentdel_{exceptionelle\ udfald} = 0.0023499$
Øvelse 8.20	Med 25 skridt har vi udfaldene $\{-25,-23,-21,-19,-17,-15,-13,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25\}$. I en ideel random walk med 25 skridt har vi de forventede hyppigheder $\binom{25}{0}, \binom{25}{1}, \binom{25}{2}, \ldots, \binom{25}{25}$.

ISBN 9788770668781

	Standardafvigelsen er 5. Dvs. udfaldene mellem en standardafvigelse er $\{-5,-3,-1,1,3,5\}$. De normale udfald er $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}$. De exceptionelle udfald er $\{-25,-23,-21,-19,-17\}\cup\{17,19,21,23,25\}$. Ideel random walk med 25 skridt: $Procentdel_{en\ standardafvigelse\ halvt} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\binom{25}{10}+\binom{25}{11}+\binom{25}{12}+\binom{25}{13}+\binom{25}{14}+\frac{1}{2}\cdot\binom{25}{15}}{2^{25}}$ $Procentdel_{en\ standardafvigelse\ halvt} = 0.67306$ $Procentdel_{normale\ udfald\ halvt} = \frac{\binom{25}{8}+\binom{25}{9}+\binom{25}{10}+\binom{25}{11}+\binom{25}{12}+\binom{25}{13}+\binom{25}{14}+\binom{25}{15}+\binom{25}{16}+\binom{25}{17}}{2^{25}}$ $Procentdel_{normale\ udfald\ halvt} = 0.95671$ $Procentdel_{exceptionelle\ udfald} = \frac{\binom{25}{0}+\binom{25}{1}+\binom{25}{2}+\binom{25}{3}+\binom{25}{4}+\frac{1}{2}\cdot\binom{25}{5}+\frac{1}{2}\cdot\binom{25}{20}+\binom{25}{21}+\binom{25}{22}+\binom{25}{23}+\binom{25}{24}+\binom{25}{25}}{2^{25}}$ $Procentdel_{exceptionelle\ udfald} = 0.0024939$
Øvelse 8.21	H_0 : Sandsynligheden for at en tomatplante med gule blade er lige så stor som sandsynligheden for at får en tomatplante med grønne blade. Vi laver en random walk model med 1240 skridt, og hvor tomatplante med gule blade er til venstre og tomatplante med grønne blade er til højre. Videnskabsmanden får 671 tomatplanter med gule blade. Dvs. der er 1240-671=569 tomatplanter med grønne planter. I random walk modellen lander vi i slutværdien X=569-671=-102. Vores standardafvigelse er $\sigma=\sqrt{1240}=35$ (afrundet til et helt tal). Vores normale udfald ligger i intervallet $[-2\cdot 36;2\cdot 36]=[-72;72]$. Alle udfald mellem -72 og 72 kan med rimelighed forklares som tilfældigheder. Vi må derfor forkaste nulhypotesen, og vi har dermed en signikant afvigelse fra den forventede fordeling.
Øvelse 8.22	a), b), c), d) og e).

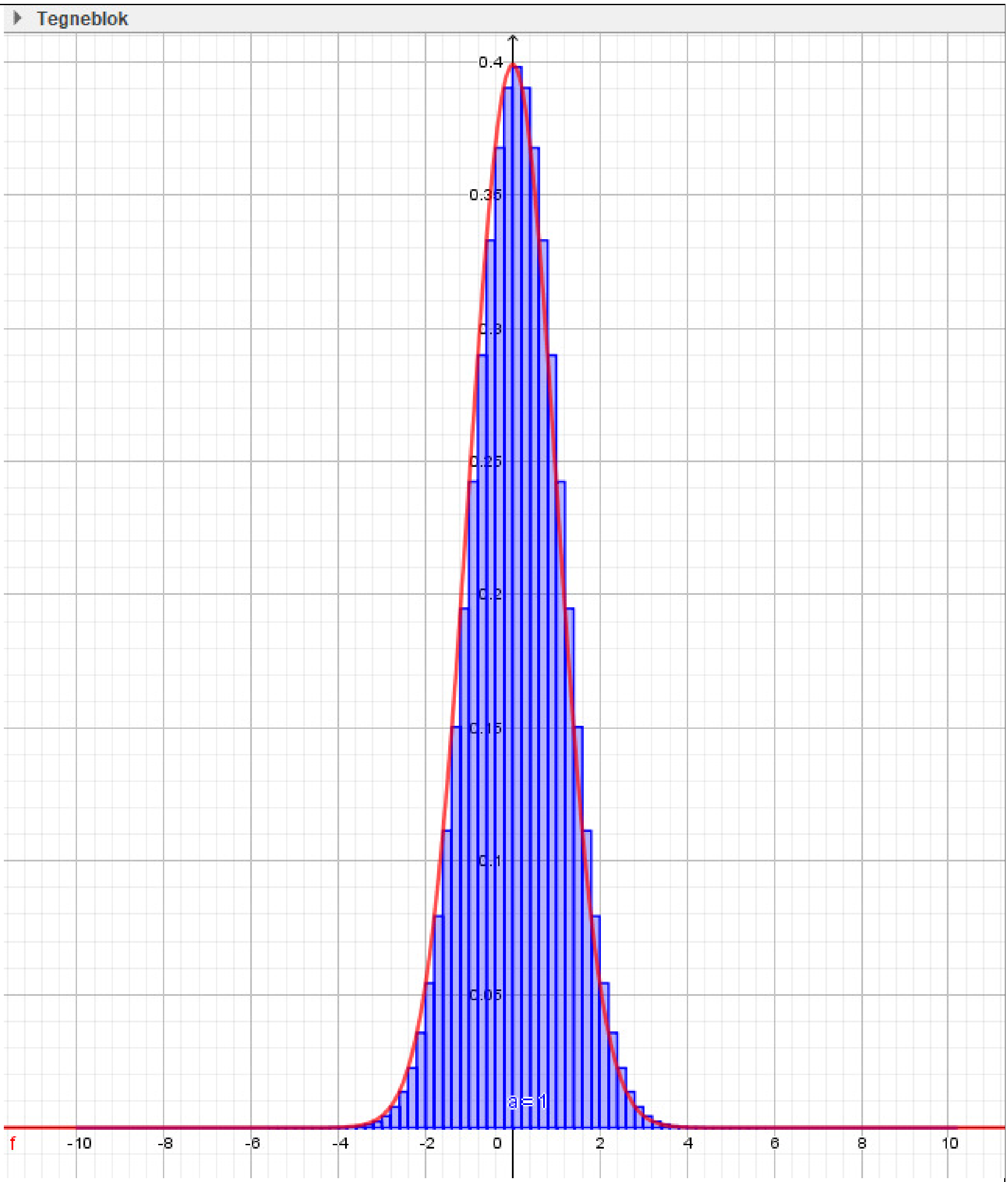
ISBN 9788770668781

Regneark

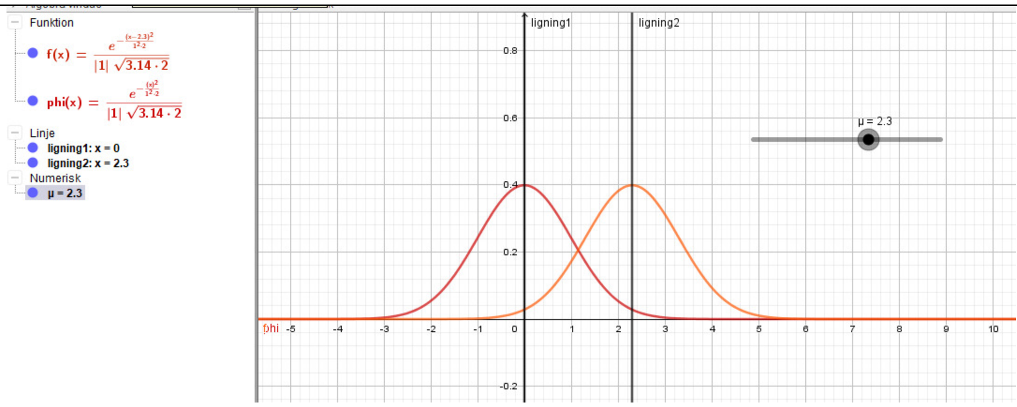
	A	B	C	D	E
1	Indekssøjle	Udfaldssøjle	Sandsynlighed	Tæthed	Standardnormal
2	0	-10	0	0	0
3	1	-9.8	0	0	0
4	2	-9.6	0	0	0
5	3	-9.4	0	0	0
6	4	-9.2	0	0	0
7	5	-9	0	0	0
8	6	-8.8	0	0	0
9	7	-8.6	0	0	0
10	8	-8.4	0	0	0
11	9	-8.2	0	0	0
12	10	-8	0	0	0
13	11	-7.8	0	0	0
14	12	-7.6	0	0	0
15	13	-7.4	0	0	0
16	14	-7.2	0	0	0
17	15	-7	0	0	0
18	16	-6.8	0	0	0
19	17	-6.6	0	0	0
20	18	-6.4	0	0.0000000001	0.0000000001
21	19	-6.2	0.0000000001	0.0000000005	0.0000000003
22	20	-6	0.0000000004	0.0000000021	0.000000001
23	21	-5.8	0.0000000016	0.0000000081	0.0000000033
24	22	-5.6	0.0000000058	0.0000000289	0.0000000107
25	23	-5.4	0.0000000196	0.0000000981	0.0000000333
26	24	-5.2	0.0000000629	0.0000003147	0.0000000996
27	25	-5	0.0000001913	0.0000009566	0.0000002867
28	26	-4.8	0.0000005519	0.0000027593	0.0000007933
29	27	-4.6	0.0000015125	0.0000075626	0.0000021125
30	28	-4.4	0.0000039434	0.0000197168	0.0000054125
31	29	-4.2	0.0000097904	0.0000489522	0.0000133457
32	30	-4	0.0000231707	0.0001158535	0.0000316712
33	31	-3.8	0.0000523209	0.0002616046	0.000072348
34	32	-3.6	0.000112817	0.0005640849	0.0001591086
35	33	-3.4	0.0002324713	0.0011623567	0.0003369293

f)

ISBN 9788770668781

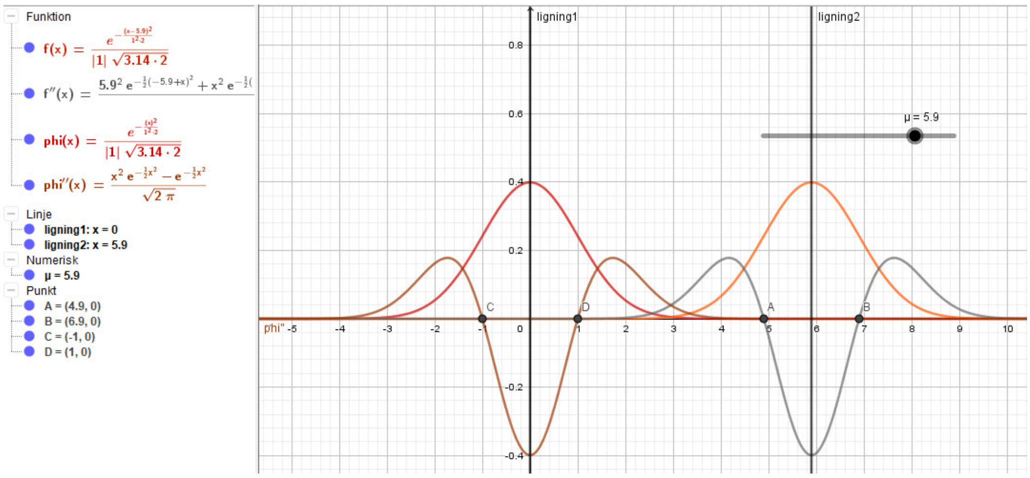
	 Histogrammet ud fra en random walk med 100 skridt og grafen for standardnormalfordelingen stemmer fint overens.
Øvelse 8.23	a) På https://en.wikipedia.org/wiki/Intelligence_quotient er følgende hentet An **intelligence quotient** (**IQ**) is a total score derived from a set of standardized tests designed to assess human intelligence.[1] The abbreviation "IQ" was coined by the psychologist William Stern for the German term *Intelligenzquotient*, his term for a scoring method for intelligence tests at University of Breslau he advocated in a 1912 book.[2] Historically, IQ was a score obtained by dividing a person's mental age score, obtained by administering an intelligence test, by the person's chronological age, both expressed in terms of years and months. The resulting fraction (quotient) is multiplied by 100 to obtain the IQ score.[3] For modern IQ tests, the median raw score of the norming sample is defined as IQ 100 and scores each standard deviation (SD) up or down are defined as 15 IQ points greater or less,[4]. By this definition, approximately two-thirds of the population scores are between IQ 85 and IQ 115. About 2.5 percent of the population scores above 130, and 2.5 percent below 70.[5][6] b) Man skal typisk løse forskellige typer af opgaver.
Øvelse 8.24	a)

ISBN 9788770668781



Vi ser, at μ svarer til vandret forskydning af grafen for standardnormalfordelingen. Når μ er positiv ser forskydning til højre og til venstre, når μ er negativ, så er forskydningen til venstre.

b) Den forskudte kurve topper ved punktet med førstekoordinaten $x = \mu$.

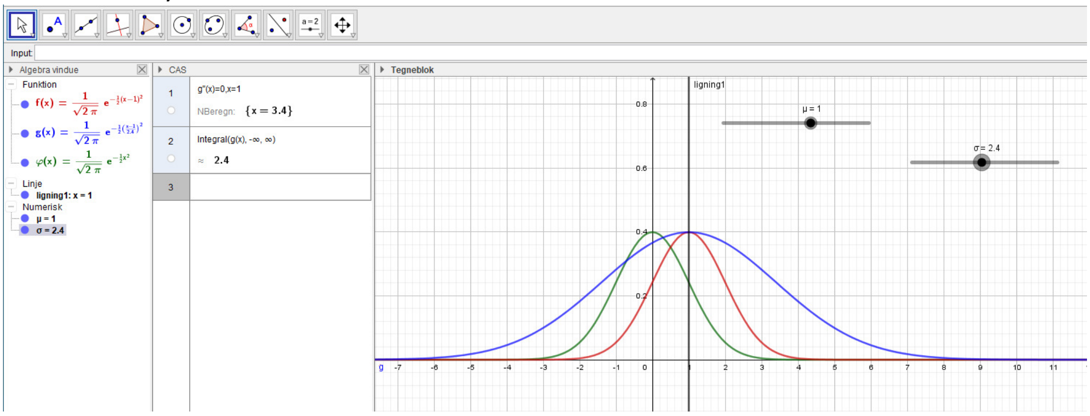


Førstekoordinaterne til vendepunkterne bestemmes som løsningerne til $f''(x) = 0$ henholdsvis $phi''(x) = 0$. Afstandene svarer til spredningen på 1.

Øvelse 8.25

a)

Når værdien for skyderen σ ændres, så ændres afstanden mellem førstekoordinaten for punkterne på symmetriaksen og førstekoordinaten for vendepunktet. Afstanden svarer til værdien af skyderen σ .

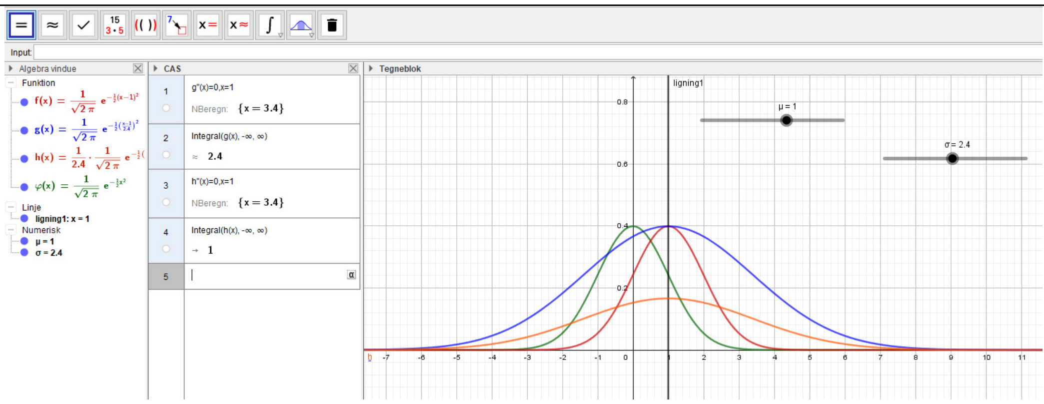
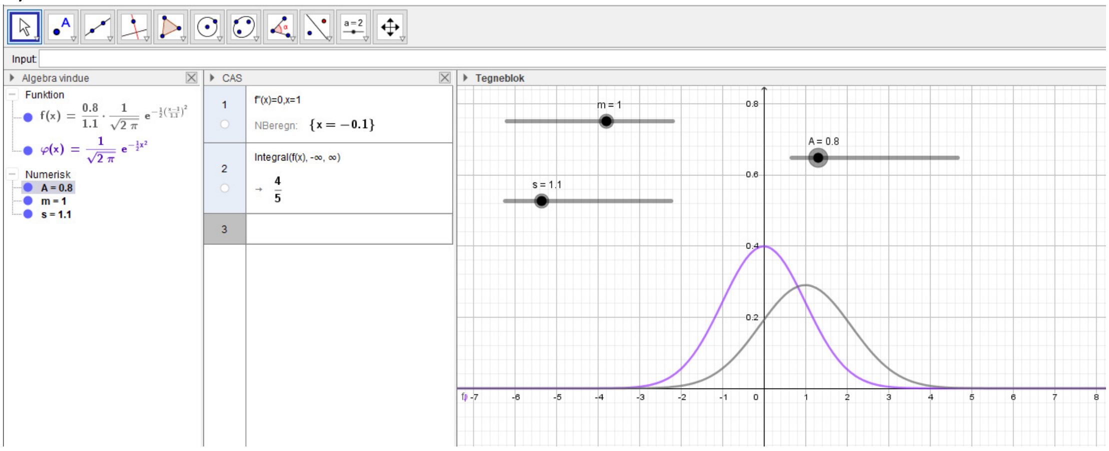


Arealet under skalerede graf svarer til værdien af skyderen σ .

b)

Når værdien for skyderen σ ændres, så ændres afstanden mellem førstekoordinaten for punkterne på symmetriaksen og førstekoordinaten for vendepunktet på lodret skalerede graf. Afstanden svarer til værdien af skyderen σ .

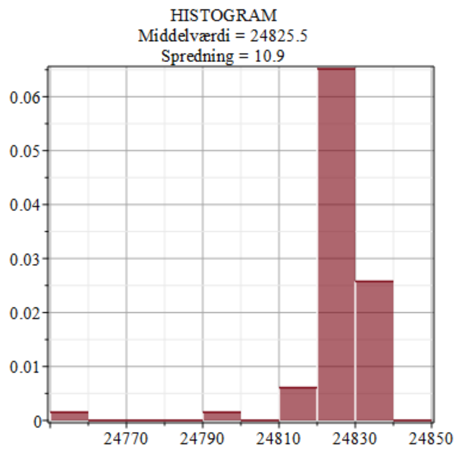
ISBN 9788770668781

	 Arealet under den lodret skalerede graf er 1.
Øvelse 8.26	a)  Vi ser, at skyderen *m* giver en vandret forskydning af grafen. Skyderne *s* og *A* giver en lodret og vandret skalering af grafen. b) Afstanden fra vendepunktet til symmetriaksen svarer til værdien af skyderen *s*. c) Arealet under den skalerede graf svarer til værdien af skyderen *A*.
Øvelse 8.27	a) *with*(*Gym*) : $\begin{bmatrix} 24828.0 \\ 24822.0 \\ 24836.0 \\ 24826.0 \\ 24828.0 \\ 24828.0 \\ 24826.0 \\ 24824.0 \\ 24832.0 \\ 24830.0 \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{assign to a name}} Newcombsdata$ 66 × 1 Matrix min(*Newcombsdata*) 24756.0 max(*Newcombsdata*) 24840.0 De 66 målinger ligger i intervallet [24756;24840]. Dvs. en variationsbredde på 84. En mulig intervalinddeling fra fra 24750 til 24850 med 10 lige store intervaller.

Datainddeling := *grupperData*(*Newcombsdata*, [24750 ..24850], 10)

$$Datainddeling := \begin{bmatrix} 24750..24760. & 1 \\ 24760..24770. & 0 \\ 24770..24780. & 0 \\ 24780..24790. & 0 \\ 24790..24800. & 1 \\ 24800..24810. & 0 \\ 24810..24820. & 4 \\ 24820..24830. & 43 \\ 24830..24840. & 17 \\ 24840..24850 & 0 \end{bmatrix}$$

plotHistogram(*Datainddeling*)



middel(*Datainddeling*)

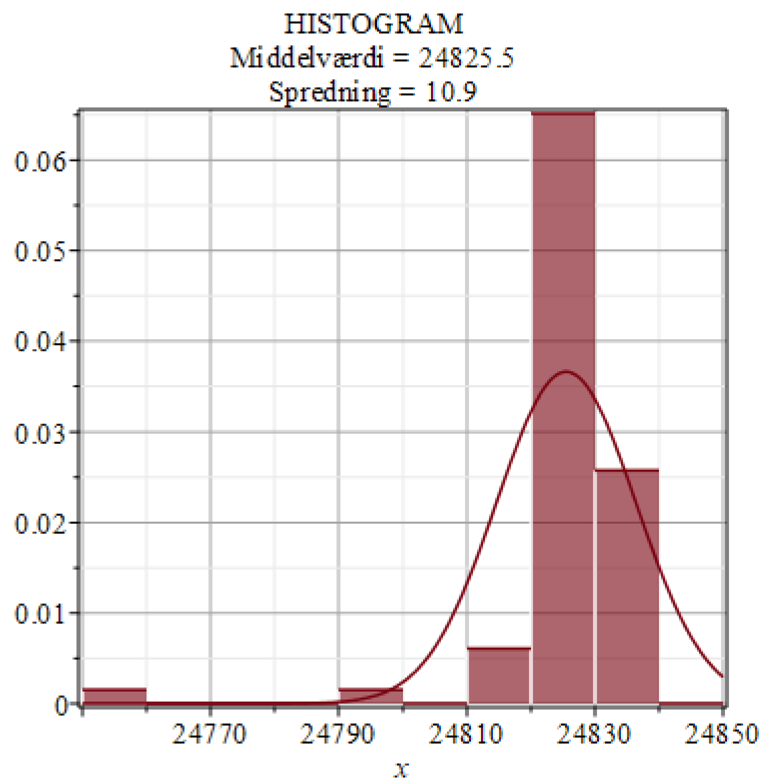
24825.4545454545

spredning(*Datainddeling*)

10.9311645366229

$$Areal = 10 \cdot \left(\frac{1}{66} + \frac{1}{66} + \frac{4}{66} + \frac{43}{66} + \frac{17}{66} \right)$$

$$Areal = 10$$



ISBN 9788770668781

b)

Exceptionelle målinger:

$nedregrænse = 24825.5 - 3 \cdot 10.9 \quad nedregrænse = 24792.8$

$øvregrænse = 24825.5 + 3 \cdot 10.9 \; | \; øvregrænse = 24858.2$

De to målinger 24756 og 24798 ligger uden for intervallet med de normale målinger. Middelværdien bliver 24828 med de to målinger slettet.

c)

$$lysetshastighed_{alle\ data} = \frac{7.5}{2.4825 \cdot 10^{-5}} \quad lysetshastighed_{alle\ data} = 302114.8036$$

$$lysetshastighed_{outliers\ slettet} = \frac{7.5}{2.4828 \cdot 10^{-5}} = lysetshastighed_{outliers\ slettet} = 302078.2987$$

Øvelse 8.28

Vi bestemmer minsteværdien til 1,4 og størsteværdien til 3,3.

$\min(HørgranData)$

1.4

$\max(HørgranData)$

3.3

Ud fra samme intervalbredde på 0,2 fås en gruppering af data til.

$HørgranDataGruppe := grupperData(HørgranData, 1.3 .. 3.3, 10)$

$$HørgranDataGruppe := \begin{bmatrix} 1.3 .. 1.500000000 & 1 \\ 1.500000000 .. 1.700000000 & 3 \\ 1.700000000 .. 1.900000000 & 4 \\ 1.900000000 .. 2.100000000 & 7 \\ 2.100000000 .. 2.300000000 & 9 \\ 2.300000000 .. 2.500000000 & 11 \\ 2.500000000 .. 2.700000000 & 6 \\ 2.700000000 .. 2.900000000 & 5 \\ 2.900000000 .. 3.100000000 & 3 \\ 3.100000000 .. 3.3 & 1 \end{bmatrix}$$

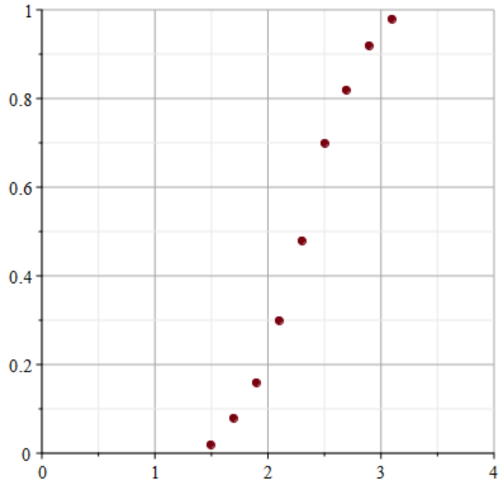
De kumulerede frekvenser kan bestemmes med følgende:

$$HørgranDataKumuleretProcent := \begin{bmatrix} 1.5 & \frac{1}{50} \\ 1.7 & \frac{4}{50} \\ 1.9 & \frac{8}{50} \\ 2.1 & \frac{15}{50} \\ 2.3 & \frac{24}{50} \\ 2.5 & \frac{35}{50} \\ 2.7 & \frac{41}{50} \\ 2.9 & \frac{46}{50} \\ 3.1 & \frac{49}{50} \end{bmatrix}$$

Plottet af de sammenhørende værdier giver plottet.

ISBN 9788770668781

$punktPlot(HørgranDataKumuleretProcent, vindue = [0..4, 0..1])$



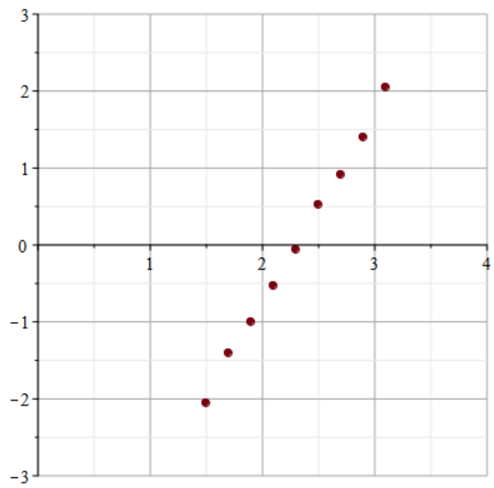
Vi bestemmer de nye sammenhørende værdier med Φ^{-1}.

$$HørgranDataKumuleretProcentInversStandardNormal := \begin{bmatrix} 1.5 & invnorm\left(\frac{1}{50}\right) \\ 1.7 & invnorm\left(\frac{4}{50}\right) \\ 1.9 & invnorm\left(\frac{8}{50}\right) \\ 2.1 & invnorm\left(\frac{15}{50}\right) \\ 2.3 & invnorm\left(\frac{24}{50}\right) \\ 2.5 & invnorm\left(\frac{35}{50}\right) \\ 2.7 & invnorm\left(\frac{41}{50}\right) \\ 2.9 & invnorm\left(\frac{46}{50}\right) \\ 3.1 & invnorm\left(\frac{49}{50}\right) \end{bmatrix}$$

$$HørgranDataKumuleretProcentInversStandardNormal := \begin{bmatrix} 1.5 & -2.05374891063084 \\ 1.7 & -1.40507156031032 \\ 1.9 & -0.994457883210164 \\ 2.1 & -0.524400512708049 \\ 2.3 & -0.0501535834647337 \\ 2.5 & 0.524400512708049 \\ 2.7 & 0.915365087842713 \\ 2.9 & 1.40507156031032 \\ 3.1 & 2.05374891063084 \end{bmatrix}$$

Et punktplot af disse værdier giver.

$punktPlot(HørgranDataKumuleretProcentInversStandardNormal, vindue = [0..4, -3..3])$



Øvelse 8.29

ISBN 9788770668781

Øvelse 8.30

a) Vi starter med at sortere de 50 målinger.

$HørgranDataSorteret := sort(HørgranData(..., 1))$

$$HørgranDataSorteret := \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.52 \\ 1.63 \\ 1.69 \\ 1.73 \\ 1.73 \\ 1.78 \\ 1.89 \\ 1.92 \\ 1.95 \\ 1.98 \\ 1.99 \\ 2.02 \\ 2.03 \\ 2.07 \\ 2.12 \\ 2.12 \\ 2.13 \\ 2.15 \\ 2.16 \\ 2.2 \\ 2.23 \\ 2.26 \\ 2.3 \\ 2.31 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

50 element Vector[column]

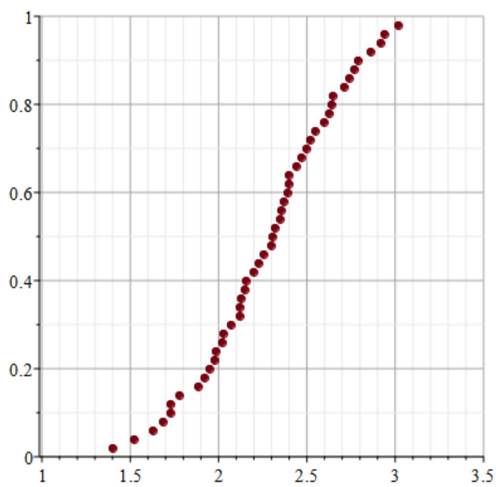
De 50 datapunkter kan bestemmes

$$DataPunkterHørgran := [\langle HørgranDataSorteret[1], \tfrac{1}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[2], \tfrac{2}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[3], \tfrac{3}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[4], \tfrac{4}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[5], \tfrac{5}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[6], \tfrac{6}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[7], \tfrac{7}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[8], \tfrac{8}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[9], \tfrac{9}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[10], \tfrac{10}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[11], \tfrac{11}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[12], \tfrac{12}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[13], \tfrac{13}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[14], \tfrac{14}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[15], \tfrac{15}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[16], \tfrac{16}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[17], \tfrac{17}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[18], \tfrac{18}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[19], \tfrac{19}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[20], \tfrac{20}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[21], \tfrac{21}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[22], \tfrac{22}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[23], \tfrac{23}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[24], \tfrac{24}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[25], \tfrac{25}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[26], \tfrac{26}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[27], \tfrac{27}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[28], \tfrac{28}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[29], \tfrac{29}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[30], \tfrac{30}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[31], \tfrac{31}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[32], \tfrac{32}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[33], \tfrac{33}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[34], \tfrac{34}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[35], \tfrac{35}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[36], \tfrac{36}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[37], \tfrac{37}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[38], \tfrac{38}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[39], \tfrac{39}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[40], \tfrac{40}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[41], \tfrac{41}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[42], \tfrac{42}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[43], \tfrac{43}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[44], \tfrac{44}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[45], \tfrac{45}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[46], \tfrac{46}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[47], \tfrac{47}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[48], \tfrac{48}{50}\rangle, \langle HørgranDataSorteret[49], \tfrac{49}{50}\rangle]$$

$$DataPunkterHørgran := \left[\begin{bmatrix}1.4\\ \frac{1}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.52\\ \frac{1}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.63\\ \frac{3}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.69\\ \frac{2}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.73\\ \frac{1}{10}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.73\\ \frac{3}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.78\\ \frac{7}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.89\\ \frac{4}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.92\\ \frac{9}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.95\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.98\\ \frac{11}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.99\\ \frac{6}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.02\\ \frac{13}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.03\\ \frac{7}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.07\\ \frac{3}{10}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.12\\ \frac{8}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.12\\ \frac{17}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.13\\ \frac{9}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.15\\ \frac{19}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.16\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.2\\ \frac{21}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.23\\ \frac{11}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.26\\ \frac{23}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.3\\ \frac{12}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.31\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.32\\ \frac{13}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.35\\ \frac{27}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.36\\ \frac{14}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.37\\ \frac{29}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.39\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.4\\ \frac{31}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.4\\ \frac{16}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.44\\ \frac{33}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.47\\ \frac{17}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.5\\ \frac{7}{10}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.52\\ \frac{18}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.55\\ \frac{37}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.6\\ \frac{19}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.63\\ \frac{39}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.64\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.65\\ \frac{41}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.71\\ \frac{21}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.74\\ \frac{43}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.77\\ \frac{22}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.79\\ \frac{9}{10}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.86\\ \frac{23}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.92\\ \frac{47}{50}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.94\\ \frac{24}{25}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3.02\\ \frac{49}{50}\end{bmatrix}\right]$$

b) Vi afsætter ikke det sidste datapunkt, da vi i modellen for normalfordelingen ikke kan repræsentere 100%.

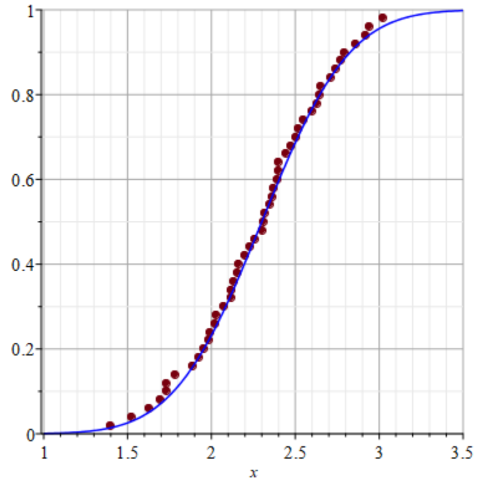
$billede1 := punktPlot(DataPunkterHørgran, vindue = [1..3.5, 0..1])$



ISBN 9788770668781

Hvis vi tegner grafen for fordelingsfunktionen for den normalfordelte stokastiske variabel, så får vi.

$display([billede1, billede2])$



Grafen og datapunkterne stemmer med god tilnærmelse overens.

Øvelse 8.31

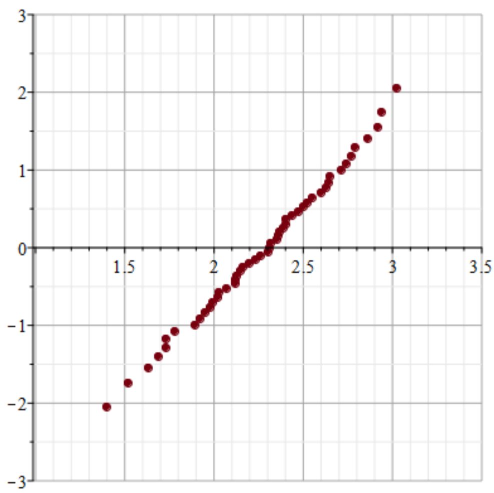
a)

$DataPunkterHørgranTransform := [\langle HørgranDataSorteret[1], invnorm(\frac{1}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[2], invnorm(\frac{2}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[3], invnorm(\frac{3}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[4], invnorm(\frac{4}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[5], invnorm(\frac{5}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[6], invnorm(\frac{6}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[7], invnorm(\frac{7}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[8], invnorm(\frac{8}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[9], invnorm(\frac{9}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[10], invnorm(\frac{10}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[11], invnorm(\frac{11}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[12], invnorm(\frac{12}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[13], invnorm(\frac{13}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[14], invnorm(\frac{14}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[15], invnorm(\frac{15}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[16], invnorm(\frac{16}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[17], invnorm(\frac{17}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[18], invnorm(\frac{18}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[19], invnorm(\frac{19}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[20], invnorm(\frac{20}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[21], invnorm(\frac{21}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[22], invnorm(\frac{22}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[23], invnorm(\frac{23}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[24], invnorm(\frac{24}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[25], invnorm(\frac{25}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[26], invnorm(\frac{26}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[27], invnorm(\frac{27}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[28], invnorm(\frac{28}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[29], invnorm(\frac{29}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[30], invnorm(\frac{30}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[31], invnorm(\frac{31}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[32], invnorm(\frac{32}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[33], invnorm(\frac{33}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[34], invnorm(\frac{34}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[35], invnorm(\frac{35}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[36], invnorm(\frac{36}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[37], invnorm(\frac{37}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[38], invnorm(\frac{38}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[39], invnorm(\frac{39}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[40], invnorm(\frac{40}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[41], invnorm(\frac{41}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[42], invnorm(\frac{42}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[43], invnorm(\frac{43}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[44], invnorm(\frac{44}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[45], invnorm(\frac{45}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[46], invnorm(\frac{46}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[47], invnorm(\frac{47}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[48], invnorm(\frac{48}{50})\rangle, \langle HørgranDataSorteret[49], invnorm(\frac{49}{50})\rangle]$

$$DataPunkterHørgranTransform := \left[\begin{bmatrix}1.4\\-2.05374891063084\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.52\\-1.75068607125293\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.63\\-1.55477359459668\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.69\\-1.40507156031032\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.73\\-1.28155156554473\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.73\\-1.17498679206664\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.78\\-1.08031934081442\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.89\\-0.994457883210164\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.92\\-0.915365087842713\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.95\\-0.841621233572216\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.98\\-0.772193214189346\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1.99\\-0.706302562840410\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.02\\-0.643345405393028\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.03\\-0.582841507271249\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.07\\-0.524400512708049\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.12\\-0.467698799114510\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.12\\-0.412463129441405\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.13\\-0.358458793251194\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.15\\-0.305480788099397\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.16\\-0.253347103135800\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.2\\-0.201893479141851\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.23\\-0.150969215496777\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.26\\-0.100433720511470\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.3\\-0.0501535834647337\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.31\\0.\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.32\\0.0501535834647337\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.35\\0.100433720511470\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.36\\0.150969215496778\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.37\\0.201893479141851\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.39\\0.253347103135800\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.4\\0.305480788099397\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.4\\0.358458793251194\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.44\\0.412463129441405\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.47\\0.467698799114510\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.5\\0.524400512708049\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.52\\0.582841507271249\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.55\\0.643345405393028\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.6\\0.706302562840410\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.63\\0.772193214189346\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.64\\0.841621233573338\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.65\\0.915365087842713\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.71\\0.994457883210164\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.74\\1.08031934081442\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.77\\1.17498679206664\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.79\\1.28155156554473\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.86\\1.40507156031032\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.92\\1.55477359459668\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2.94\\1.75068607125293\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3.02\\2.05374891063084\end{bmatrix}\right] \tag{12}$$

b)

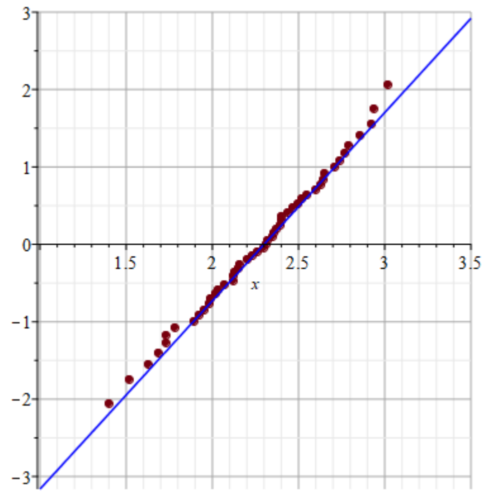
$punktPlot(DataPunkterHørgranTransform, vindue = [1 ..3.5, -3 ..3])$



c)

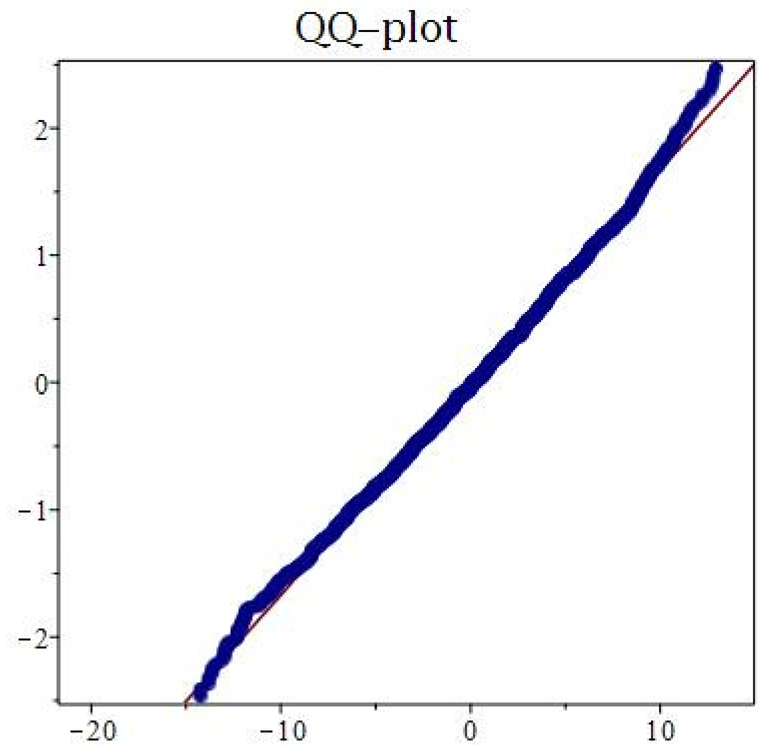
$$f(x) := \frac{1}{0.411} \cdot x - \frac{2.30}{0.411} \quad | \quad x \to 2.433090024\,x - 5.596107056$$

display([*billede3*, *billede4*])



Øvelse 8.32

a)



b) Da residualerne tilnærmelsesvist ligger på en ret linje i et QQ-plot, så understøtter plottet, at residualerne fra en lineær regression på Galton datasættet med god tilnærmelse er normalfordelte.

Øvelse 8.33

a)

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 0.015} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - 1.02}{0.015}\right)^2}$$

b)

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.09121121973$$

c)

$$\int_{1.01}^{\infty} f(x)\,dx = 0.7475074624$$

d)

I Maple er kommandoen normalcdf(…,…,…).

$$normalcdf(1.02, 0.015, 1) - normalcdf(1.02, 0.015, 0) = 0.0912112198$$

$$normalcdf(1.02, 0.015, \infty) - normalcdf(1.02, 0.015, 1.01) = 0.747507462453077$$

e)

$$fsolve\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot 0.015}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{0.015}\right)^2} dx = 0.005, \mu = 1\right)$$

$$1.038637440$$

Middelværdien skal øges til 1,09 liter.

Øvelse 8.34

a) Vi har en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(281.9, 11.4)$.

$$\int_0^{258} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot 11.4}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-281.9}{11.4}\right)^2} dx = 0.01801931847$$

Konklusion: Sandsynligheden for et for tidligt født barn ifølge modellen er 1,8%.

Øvelse 8.35

a) Vi opstiller to ligninger ud fra informationerne i teksten.

$$fsolve(\{1 - normalcdf(m, s, 35) = 0.45, normalcdf(m, s, 18) = 0.3\})$$

$$\{m = 31.71378521, s = 26.15135736\}$$

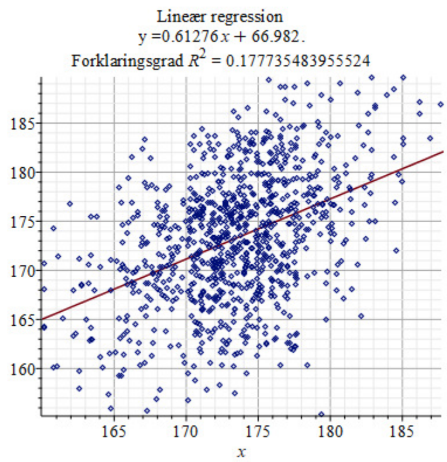
Vi bestemmer middelværdien til 31,7 cm og spredningen på 26,2 cm.

Øvelse 8.36

a)

$$\begin{bmatrix} 186.9 & 183.4 \\ 184.6 & 172.0 \\ 185.0 & 179.0 \\ 182.1 & 165.4 \\ 179.4 & 155.4 \\ 178.4 & 160.3 \\ 179.7 & 165.0 \\ 179.7 & 168.7 \\ 176.5 & 160.3 \\ 173.4 & 157.5 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{952 \times 2 \text{ Matrix}} \xrightarrow{\text{assign to a name}} GaltonData$$

$LinReg(GaltonData)$



b)

$residualliste := residualer(GaltonData, LinReg)(\,..,2)$

$$residualliste := \begin{bmatrix} 1.89287004009313 \\ -8.09777624156365 \\ -1.34288123605813 \\ -13.1658700259732 \\ -21.5114113131356 \\ -15.9986488268994 \\ -12.0952400590064 \\ -8.39524005900643 \\ -14.8344001030507 \\ -15.7348363957186 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

952 element Vector[column]

c) og d)

$middel(residualliste)$

$$-2.06501482580279\ 10^{-13}$$

$standardafvigelse(residualliste, est = 2)$

$$5.98602319983363$$

$residualspredning(GaltonData, LinReg)$

$$5.98602319983363$$

Middelværdien af residualerne svarer til 0,0 , og spredningen af residualerne er 6,0.

e)

Vi bestemmer det mindste og det største residual.

$\min(residualliste)$

$$-21.5114113131356$$

$\max(residualliste)$

$$14.7558098859383$$

Vi laver en inddeling af intervallet [-22;15] med 37 intervaller – intervalbredde 1.

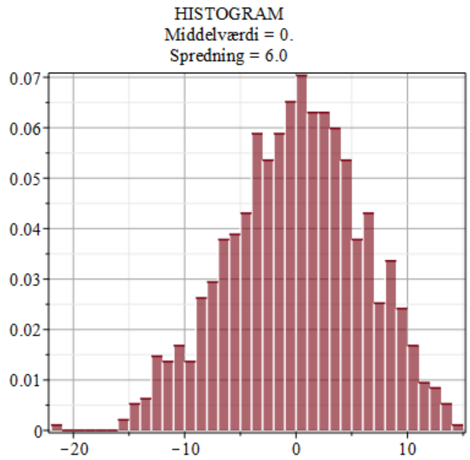
Vi får en gruppering:

$GaltonDataGrupperet := grupperData(residualliste, -22\,..15, 37)$

$$GaltonDataGrupperet := \begin{bmatrix} -22\,..-21. & 1 \\ -21.\,..-20. & 0 \\ -20.\,..-19. & 0 \\ -19.\,..-18. & 0 \\ -18.\,..-17. & 0 \\ -17.\,..-16. & 0 \\ -16.\,..-15. & 2 \\ -15.\,..-14. & 5 \\ -14.\,..-13. & 6 \\ -13.\,..-12. & 14 \\ -12.\,..-11. & 13 \\ -11.\,..-10. & 16 \\ -10.\,..-9. & 13 \\ -9.\,..-8. & 25 \\ -8.\,..-7. & 28 \\ -7.\,..-6. & 36 \\ -6.\,..-5. & 37 \\ -5.\,..-4. & 41 \\ -4.\,..-3. & 56 \\ -3.\,..-2. & 51 \\ -2.\,..-1. & 56 \\ -1.\,..0. & 62 \\ 0.\,..1. & 67 \\ 1.\,..2. & 60 \\ 2.\,..3. & 60 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

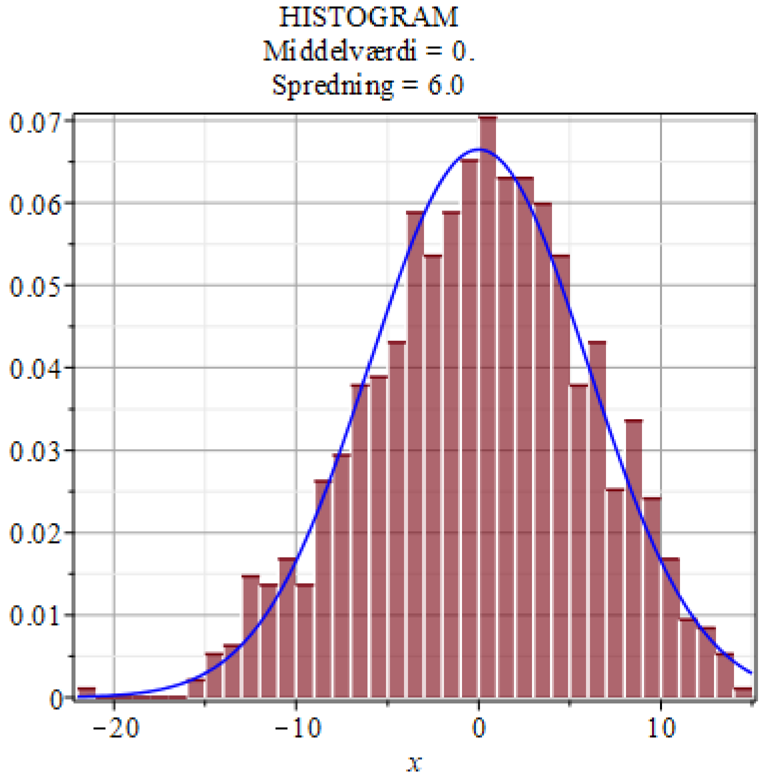
37 × 2 Matrix

plotHistogram(*GaltonDataGrupperet*)



f)

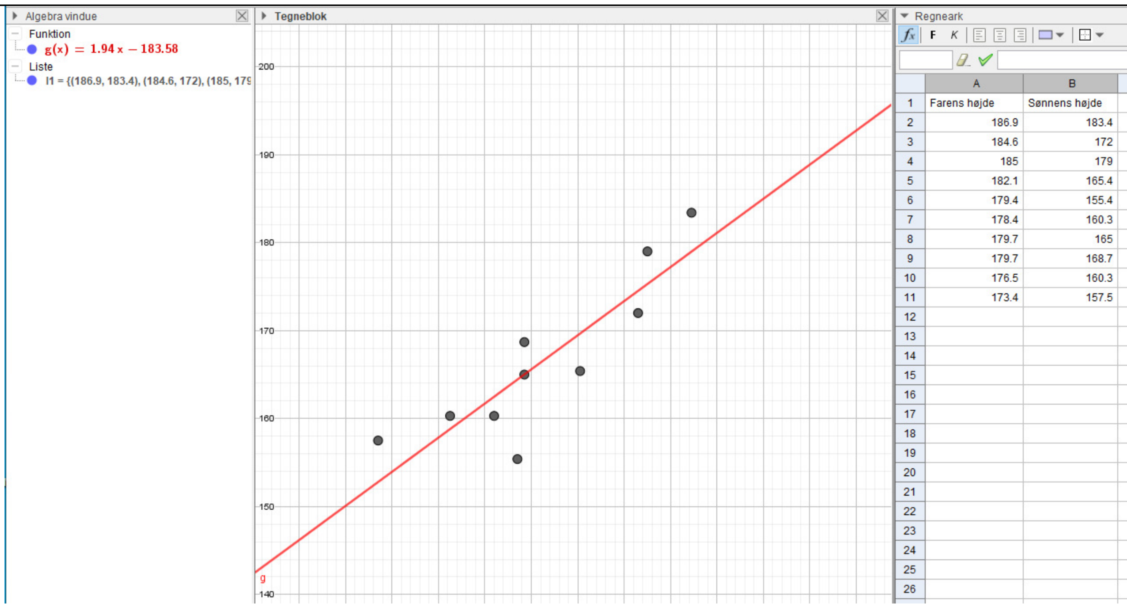
Vi tegner grafen for en normalfordelt stokastisk variabel *X* med middelværdi 0 og spredning 6,0.



Vi ser, at der er god overensstemmelse mellem histogram og grafen for tæthedsfunktionen hørende til *X*.

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 8.37



Øvelse 8.38

A	B	C
Farens højde	Sønnens højde	Residualer
186.9	183.4	4.42
184.6	172	-2.52
185	179	3.71
182.1	165.4	-4.27
179.4	155.4	-9.03
178.4	160.3	-2.19
179.7	165	-0.01
179.7	168.7	3.69
176.5	160.3	1.5
173.4	157.5	4.71

Øvelse 8.39

a)

ISBN 9788770668781

Regneark

A14 =Stikprøve(C2:C11, 10, true)

	A	B	C
1	Farens højde	Sønnens højde	Residualer
2	186.9	183.4	4.42
3	184.6	172	-2.52
4	185	179	3.71
5	182.1	165.4	-4.27
6	179.4	155.4	-9.03
7	178.4	160.3	-2.19
8	179.7	165	-0.01
9	179.7	168.7	3.69
10	176.5	160.3	1.5
11	173.4	157.5	4.71
12			
13	Ny residualliste		
14	{3.69, -2.19, -0.01, 3.71, 1.5, 1.5, -0.01, -4.27, -2.19, -4.27}		
15			

Kommandoen stikprøve(…,…,true) giver en ny liste med 10 residualer.
Vi kan kommandoen Crtl R kan vi udtage en liste af residualer.
b)

L&R Uddannelse EGMONT

Regneark

B28

	A	B	C
1	Farens højde	Sønnens højde	Residualer
2	186.9	183.4	4.42
3	184.6	172	-2.52
4	185	179	3.71
5	182.1	165.4	-4.27
6	179.4	155.4	-9.03
7	178.4	160.3	-2.19
8	179.7	165	-0.01
9	179.7	168.7	3.69
10	176.5	160.3	1.5
11	173.4	157.5	4.71
12			
13	Ny residualliste		
14	{3.69, -2.19, -0.01, 3.71, 1.5, 1.5, -0.01, -4.27, -2.19, -4.27}		
15			
16	Nyt datasæt		
17	Ny højde far	Ny højde søn	
18	186.9	182.67	
19	184.6	172.33	
20	185	175.28	
21	182.1	173.37	
22	179.4	165.93	
23	178.4	163.99	
24	179.7	165	
25	179.7	160.74	
26	176.5	156.61	
27	173.4	148.52	

c)

ISBN 9788770668781

A	B	C
Farens højde	Sønnens højde	Residualer
186.9	183.4	4.42
184.6	172	-2.52
185	179	3.71
182.1	165.4	-4.27
179.4	155.4	-9.03
178.4	160.3	-2.19
179.7	165	-0.01
179.7	168.7	3.69
176.5	160.3	1.5
173.4	157.5	4.71
Ny residualliste		
{3.69, -2.19, -0.01, 3.71, 1.5, 1.5, -0.01, -4.27, -2.19, -4.27}		
Nyt datasæt		
Ny højde far	Ny højde søn	
186.9	182.67	
184.6	172.33	
185	175.28	
182.1	173.37	
179.4	165.93	
178.4	163.99	
179.7	165	
179.7	160.74	
176.5	156.61	
173.4	148.52	
Bootstrappet hældning	Bootstrappet konstantled	
2.32	-252.36	(0, -252.36)

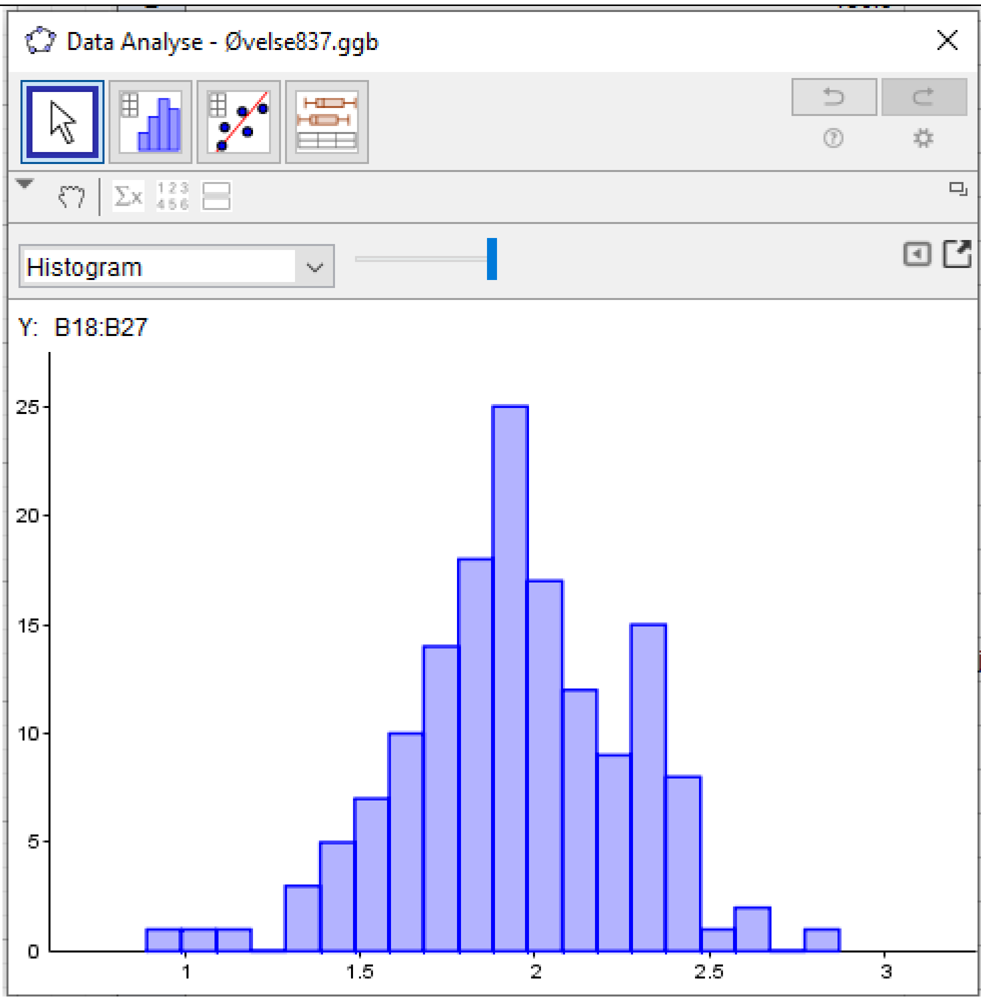
d)
Vi kan bruge kommandoen "Optag i regneark" og genberegne regnearket med Crtl R.
5 sammenhørende værdier af bootstrappet hældning og konstantled kan være:

D	E
A29	B29
1.91	-178.67
2.06	-206.16
1.44	-93.7
1.69	-136.45
1.48	-100.56

Øvelse 8.40

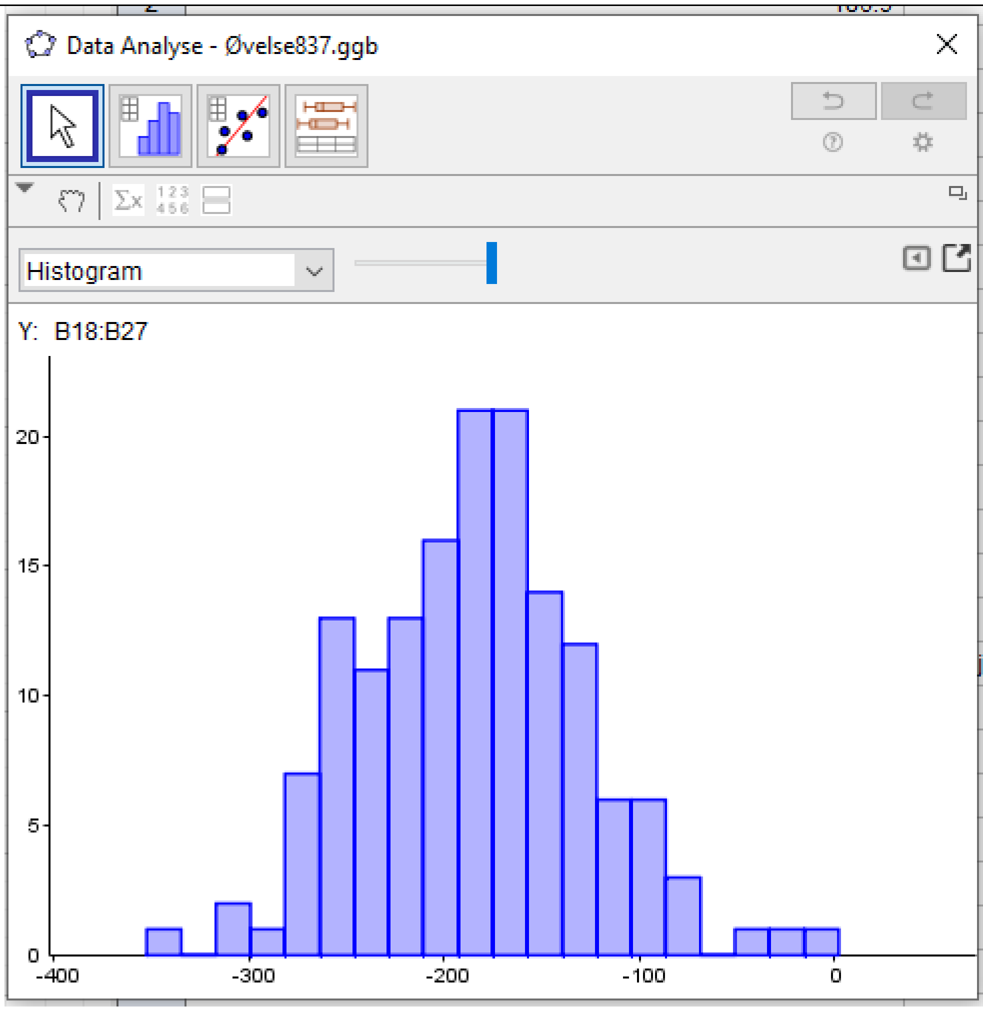
a) Vi genberegner regnearket 150 gange svarende til en klasse med 30 elever.
b) Histogram for de 150 bootstrappede hældninger:

ISBN 9788770668781



Histogram for de 150 bootstrappede konstantled.

ISBN 9788770668781



c)
2,5% af 150 værdier er afrundet 4, så vi skal bestemme de 4 mindste værdier, og vi skal bestemme de 4 største værdier.
De 4 mindste bootstrappede hældninger er

l3 = {0.89, 1.02, 1.17, 1.33,

De 4 største bootstrappede hældninger er

, 2.49, 2.59, 2.62, 2.87}

d)
2,5% af 150 værdier er afrundet 4, så vi skal bestemme de 4 mindste værdier, og vi skal bestemme de 4 største værdier.
De 4 mindste bootstrappede konstantled er

{-352.37, -306.91, -300.55, -284.51,

De 4 største bootstrappede konstantled er

, -74, -46.76, -22.48, 2.17}

e) og f).
Hvis vi anvender et matematisk værktøjsprogram, så kan vi bestemme de to konfidensintervaller.

ISBN 9788770668781

testLin(*xliste*, *yliste*)

	a	b
Koefficient	1.939860	-183.580518
Standardfejl	0.384750	69.490651
t-stat	5.041875	-2.641802
p-værdi	0.000999	0.029630
Nedre 95.00%	1.052626	-343.826163
Øvre 95.00%	2.827094	-23.334872
Frihedsgrader	8	

Vi aflæser 95% konfidensintervallet for hældningen til [1,05;2,83]
Vi aflæser 95% konfidensintervallet for konstantled til [-343,8;-23,3].

Vi ser, at der er god overensstemmelse mellem de bootstrappede 95% konfidensintervaller og de med værktøjsprogrammet bestemte 95% konfidensintervaller.