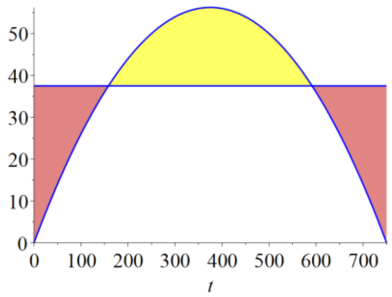
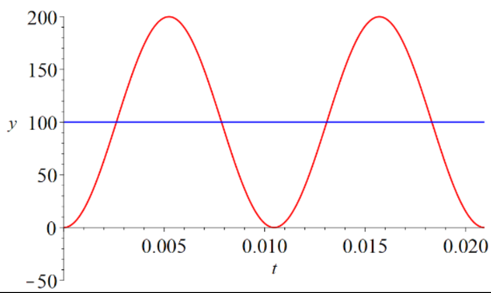
L&R Uddannelse EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 7

<table>
<tr><td>Øvelse 7.1</td><td>a)
Stil tallene op således: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...
Tallet n er nummer 2n, og tallet -n er nummer 2n+1.
b)
Stil tallene op således: $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$
Tallet b_n er nummer 2n, og tallet a_n er nummer 2n-1.
c)
Antag vi har følgerne:
$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, \ldots$
$a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27}, a_{28}, \ldots$
...
$a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, a_{k4}, a_{k5}, a_{k6}, a_{k7}, a_{k8}, \ldots$
Stil tallene op således: $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{k1}, a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{k2}, a_{13}, a_{23}, \ldots, a_{k3}, \ldots$</td></tr>
<tr><td>Øvelse 7.2</td><td>Du skal selv have glæden af at løse denne!</td></tr>
<tr><td>Øvelse 7.3</td><td>a)
$\frac{22}{7} \approx 3{,}1428571428571$, perioden er 6,
b)
$\frac{53}{17}$ omskrives til et decimaltal, ved at udføre divisionen: Når 17 ikke går op, får vi en rest. De mulige tal, der kan være rest ved division med 17 er tallene: 1, 2,..., 16. så efter højst 16 trin vil vi få en rest, vi har haft før, fx 13. Og derefter gentages mønsteret som det var sidste gange resten var 13.
c)
Sæt $x = 3{,}1414141414\ldots$
Så er $\underline{100x = 314{,}14141414\ldots}$
træ fra: $99x = 311$, hvoraf: $x = \frac{311}{99}$
d)
Da antallet af nuller mellem to et-taller hele tiden vokser med 1 vil der aldrig komme nogen gentagelse af en periode.
e)
Efter ciffer nr. 16 skriver vi mønstret fra d):
3,14141414141414140100100010000....
Dette er irrationalt og indenfor intervallet $\left[3{,}\overline{14} - 10^{-15} ; 3{,}\overline{14} + 10^{-15}\right]$</td></tr>
<tr><td>Øvelse 7.4</td><td>Ethvert rationalt tal kan skrives som en brøk og står derfor i skemaet. På tegningen er angivet de første 6 tal i følgen. Det fortsætter:
$\ldots, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \ldots$
Vi lægger mærke til at der kommer mange gentagelser, de to sidste tal ovenfor er lig med $\frac{1}{2}$ og 1 . Så den mængde af tal, vi tæller, ved at stille dem op i rækkefølge, er "større" end mængden af rationale tal. Men så er de rationale tal selv tællelig.</td></tr>
<tr><td>Øvelse 7.5</td><td>Hvis tallet C er nr. k i listen, dvs. er tallet N_k , er den k'te decimal i C pr konstruktion forskellig fra den k'te decimal i N_k . Men så kan C jo ikke være lig med N_k .
(Bemærk: Der er en lille finte her, idet nogle reelle tal (som faktisk er rationale) kan skrives på to måder. Fx er tallene 2,34599999... og 2,3460000... de samme tal. Det kan vises</td></tr>
</table>

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

	med teknikken fra øvelse 7.3c), eller blot ved at spørge: Hvis de ikke var de samme, hvilket tal kunne så ligge mellem dem. Derfor vedtager vi, at sådanne tal skrives på den sidste form, 2,346000... Så er opskrivningen entydig og argumentet holder.
Øvelse 7.6	Der er i *Hvad er matematik*? 2, s. 158 tegnet en skitse af situationen. Det er i beviset for den version af sætningen om mellemliggende værdier, der er omtalt - og som også kaldes for *Skæringssætningen*.
Øvelse 7.7	a) Vi illustrerer først den generelle ide i disse beviser: Lad ε være et lille positivt tal, Så er $(k+\varepsilon)\cdot(b-a)$ en oversum og $(k-\varepsilon)\cdot(b-a)$ en undersum. Forskellen er $2\cdot\varepsilon\cdot(b-a)$. Det er klart at dette tal kan gøres så lille vi ønsker det ved at skrue på ε. Tallet $k\cdot(b-a)$ ligger mellem enhver af disse undersummer og oversummer, så det er værdien af Riemann-integralet. Men: Undersummer (og oversummer) skal blot være mindre end (større end) *eller lig med*. Dvs. tallet $k\cdot(b-a)$ er selv både en undersum og en oversum, så det er lig med Riemann-integralet. b) Her udnytter vi den sidste form for argumentation: Hvis tallene k_1 og k_2 er ens, har vi situationen i a). Hvis de er forskellige, så er fx $k_1 < k_2$. Intervallet $[a;b]$ inddeles i delintervallerne: $[a;c-h],[c-h;c+h]$ og $[c+h;b]$. I disse intervaller er følgende *undertal*: k_1, k_1 og k_2 og følgende *overtal* k_1, k_2 og k_2. Så: En undersum: $k_1\cdot(c-h-a)+k_1\cdot(c+h-(c-h))+k_2\cdot(b-(c+h))$ En oversum: $k_1\cdot(c-h-a)+k_2\cdot(c+h-(c-h))+k_2\cdot(b-(c+h))$ Differensen: $(k_2-k_1)\cdot(c+h-(c-h))=(k_2-k_1)\cdot 2h$ kan gøres så lille det skal være, ved at skrue på *h*. Så funktionen er Riemann-integrabel. Mellem oversummer og undersummer ligger tallet: $k_1\cdot(c-a)+k_2\cdot(b-c)$ - det ses lettest geometrisk – så dette er værdien af integralet
Øvelse 7.8	Øvelsen findes gennemgået på website
Øvelse 7.9	Øvelsen findes gennemgået på website
Øvelse 7.10	Vi vil løse denne øvelse med brug af den viden om at bestemme integraler, vi har fra kapitel 2 – jfr. sætning 5 i kapitel 7 a) projektilets bane: $f(t)=-0{,}0004\cdot t^2+0{,}3\cdot t$ har følgende graf:  Nulpunkter er 0 og 750 Den gennemsnitlige værdi: $\frac{1}{750}\cdot\int_0^{750} -0{,}0004\cdot t^2+0{,}3\cdot t\,dt=37{,}5$ Vi har indtegnet linjen $y=37{,}5$. At dette er gennemsnittet betyder, at arealet af gule =sum af orange arealer b) Effekten: $p(t)=200\cdot\sin^2(300t)$ har følgende graf:  Sinus er periodisk med periode 2π, så det er $\sin^2(x)$ også. Da $\sin(x)=-\sin(x+\pi)$, er $\sin^2(x)=\sin^2(x+\pi)$, så $\sin^2(x)$ er periodisk med perioden π perioden for *p*: $\frac{\pi}{300}=0{,}1047$ ’

ISBN 9788770668781

Den gennemsnitlige værdi:

$$\frac{1}{0{,}1047}\cdot\int_0^{0{,}1047} 200\cdot\sin^2(300t)\,dt = 100$$

Vi har indtegnet linjen $y=100$. Det er her let at se, at der ligger lige store arealer over og under denne linje. (*Bemærk*: Man kunne, uden at regne, men alene ud fra kendskab til sinus og dennes symmetriegenskaber, have argumenteret for, at gennemsnittet er halvvejs oppe mod amplituden)

Øvelse 7.11

a)

Enhedscirklen i 1. og 2. kvadrant er graf for funktionen $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Det følger af ligningen for enhedscirklen: $x^2+y^2=1$, hvor *y* isoleres.

Sætning 6 giver, at buelængden fra grafpunktet (0,1) til $(x_0, f(x_0))$ er: $\int_0^{x_0}\sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx$

Sammensat differentiation af $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ giver:

$$f'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\text{ , så :}$$

$$(f'(x))^2=\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2=\frac{x^2}{1-x^2}\text{, og:}$$

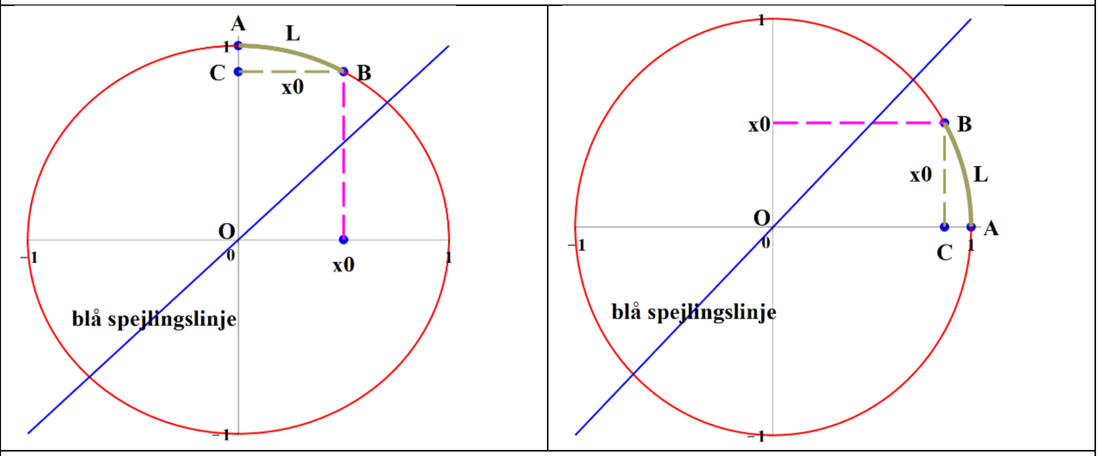
$$(f'(x))^2+1=\frac{x^2}{1-x^2}+1=\frac{x^2+1-x^2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}$$

så: $$\int_0^{x_0}\sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx=\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx=\int_0^{x_0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

b)

$$L=\int_0^{x_0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin(x_0)\,.$$

L er buelængden, dvs. stykket fra *A* til *B* på enhedscirklen. Situationen med beregning af denne er illustreret på venstre tegning, hvor x_0 både er et tal på *x*-aksen, og længden af den stiplede linje fra *C* til *B*. På den højre tegning er det hele spejlet i den blå linje $y=x$:



På tegningen ti højre ser vi, at $\sin(L)=x_0$, arcsin er den omvendte, den som ophæver sin, så derfor: $L=\arcsin(x_0)$. Dette forklarer værktøjets svar.

c)

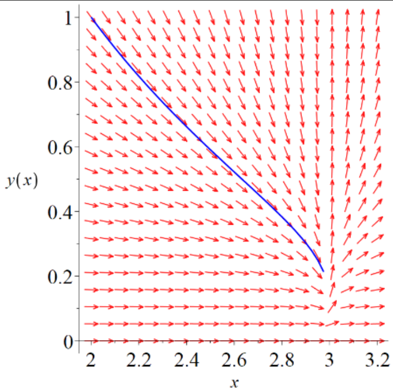
$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ giver det punkt på enhedscirklen, der svarer til 45° eller $\frac{\pi}{4}$. Dvs. $L=\frac{\pi}{4}$. Ved udregning med værktøjsprogram får vi også dette resultat

Øvelse 7.12

a)

Buelængde af parablen, $f(x)=x^2$:

	Sætning 6 giver, at buelængden fra grafpunktet $(0,0)$ til (x_0,x_0^2) er, udregnet med værktøj: $\int_0^{x_0}\sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx=\int_0^{x_0}\sqrt{4x^2+1}\,dx=0.5x_0\cdot\sqrt{4x^2+1}+0.25\cdot\text{arcsinh}(2x_0)$, hvor arcsinh er den omvendte funktion til hyperbolsk sinus ($\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$) b) Kurvelængden når $x_0=1$: $\int_0^1\sqrt{4x^2+1}\,dx=0.5\sqrt{5}+0.25\cdot\text{arcsinh}(2)\approx 1.4789$
Øvelse 7.13	Ifølge øvelse 6.14 vil de bærende kabler på Storebæltsbroen, indlagt i et koordinatsystem med 1. aksen langs havoverfladen og 2. aksen op gennem midten af brobanen, følge en kurve der kan beskrives af funktionen: $q(x)=\frac{1}{2\cdot 0{,}000498}e^{0{,}000498\cdot x}+\frac{1}{2\cdot 0{,}000498}e^{-0{,}000498\cdot x}-\frac{1}{0{,}000498}+87{,}43$, hvor *x* løber fra -812 til +812. Anvend sætning 2, og beregn v numerisk integration: $evalf(Int(\sqrt{(q'(x))^2+1},x=-812..812))=1668{,}6$ Dvs. kablet er blot 44 m længere end afstanden mellem pylonerne.
Øvelse 7.14	Dette er gennemgået i øvelse 7.11
Øvelse 7.15	$\cos(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ - se fx på en retvinklet trekant, hvor de spidse vinkler er x og $\frac{\pi}{2}-x$ Derfor: $(\cos(x))'=(\sin(\frac{\pi}{2}-x))'=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(\frac{\pi}{2}-x)'=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(-1)=-\sin(x)$
Øvelse 7.16	Tangens kan differentieres ved *brøkreglen*: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ eller ved at omskrive: $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=\sin(x)\cdot\dfrac{1}{\cos(x)}=\sin(x)\cdot(\cos(x))^{-1}$ og anvende *gange-reglen*. Vi anvender brøkreglen: $\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\dfrac{\sin'(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)}=\dfrac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$ $=\dfrac{\cos(x)\cdot\cos(x)+\sin(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)}=\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$ Herefter er der to veje muligheder A) Første variant: $\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\underline{\dfrac{1}{\cos^2(x)}}$ b) Anden variant $\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\underline{1+\tan^2(x)}$
Øvelse 7.17	Materialet og opgaverne ligger i projekt 2.6 i kapitel 2.
Øvelse 7.18	Vi betragter den separable differentialligning: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{x-3}$, med begyndelsesbetingelse (2,1). a)

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>Opret det følgende i et regneark: (Lad dig evt. inspirere af det ark, der findes til 7.19)</td></tr>
<tr><td>7.18 b)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>cellenr.</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td>trin 0</td><td>5</td><td>(start)</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>trin 1</td><td>6</td><td>$=\frac{(B5)^2}{C5-3}\cdot 0{,}2$</td><td>$=B5+A6$</td><td>$=C5+0{,}2$</td></tr>
<tr><td>trin 2</td><td>7</td><td>$=\frac{(B6)^2}{C6-3}\cdot 0{,}2$</td><td>$=B6+A7$</td><td>$=C6+0{,}2$</td></tr>
<tr><td>trin 3</td><td>8</td><td colspan="3">osv. cellerne A7, B7 og C7 trækkes ned gennem regnearket</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>7.18 c), d)</td><td>c) Udfør selv et punktplot af søjle B mod søjle C (der repræsenterer x).
Kombiner punktplottet med plottet af linjeelementerne
d) Gentag med mindre skridtlængde og flere trin. Lad skridtlængden være en separat celle (E3) og hent denne ind i søjle A og C med: E3</td></tr>
<tr><td>Øvelse 7.19</td><td>Øvelsen vil kunne udbygges til en sro eller srp. Derfor giver vi ikke løsninger til øvelsen her. Men regnearket kan du finde hjælp til på website.</td></tr>
</table>