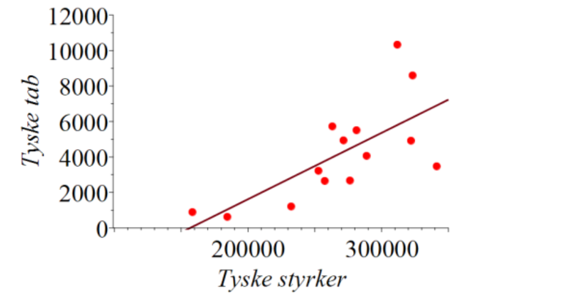
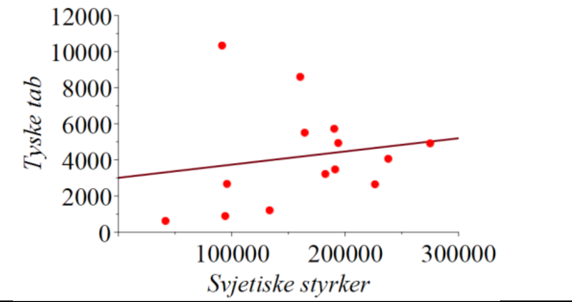
ISBN 9788770668781

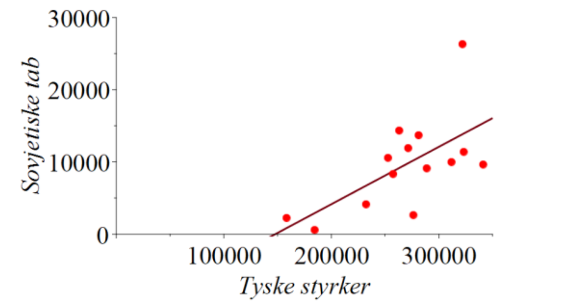
Løsninger til øvelser i kapitel 6

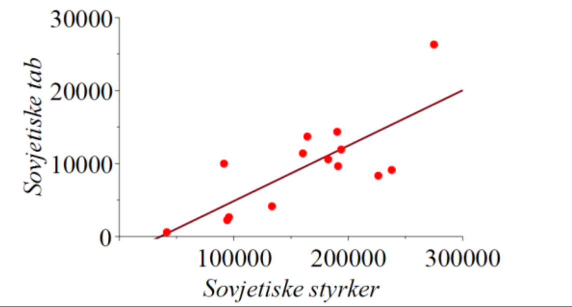
Øvelse 6.1	a) *Den lineære model:* Parametrene *a* og *b* må være negative, da der er tale om tab af mandskab. Tab af styrker er proportional med volumen: Er der dobbelt så mange soldater fra *x*, så mistes også dobbelt så mange. Sætter modparten *y* dobbelt så store styrker ind så mister *x* dobbelt så mange. Helt tilsvarende med y. *Den kvadratiske model:* Parametrene *a* og *b* må være negative, da der er tale om tab af mandskab. Tab af styrker er proportional med modpartens volumen, men ikke proportional med volumen af egne styrker. Så man angribes ikke massivt, men målrettet. Sætter modparten dobbelt så store styrker ind, så taber vi dobbelt så mange. b) *Den logaritmiske model*. Tab er uafhængig af modparten, og alene afhængig af volumen af egne styrker. Det er en situation med dramatisk forskel i styrkeforhold mellem to stridende parter.
Øvelse 6.2	a) ***Hent regnearket*** via QR-koden s 277. Vi sammenligner styrkeforholdet: 1) Kategorien FCUD data (enheder i kamp) – Tyskland er betydeligt overlegen mht. mandskab og al slags materiel 2) Kategorien CCUD data (alle enheder ved frontafsnittet) – Her er der stort set ligevægt mht. mandskab, Sovjet er overlegen mht. tanks, men Tyskland betydeligt overlegen mht. andet materiel. 3) Kategorien ACUD data (alle enheder der kan sættes ind) – Her vender billedet, idet Sovjet trods store tab bliver ved at have betydelige reserver af mandskab og tanks, de kan sætte ind, mens Tyskland er så langt hjemmefra, at der kun er beskedne reserver. Forholdet er nærmest 2:1 i Sovjets favør b) Tag ***arket FCUD*** ud og udregn de samlede tal for styrkeforholdet. Du skal få de tal du ser i kolonnen 'samlet styrke' og 'samlet tab'. c) Styrkeforholdet er nærmest 2:1 i Tysklands favør, og mht. tab er de sovjetiske omkring 2,5 gange Tysklands. Da Sovjet har så store reserver og ikke sætter dem ind, må det være en strategisk beslutning, måske i lyset af begivenhederne på vestfronten med Frankrigs totale kollaps og Englands katastrofe ved Dunkerque. Det viser sig, at trods denne underlegenhed på slagmarken stopper de sovjetiske tropper Tyskland, der herefter mistede initiativet i krigen.
Øvelse 6.3	De 4 variable: *x1*: Tyske styrker, *x2*: Tyske tab, *y1*: Sovjetiske styrker, *y2*: Sovjetiske tab giver umiddelbart anledning til 6 kombinationer. Blandt dem er sammenhængene: (*x2*, *y2*) og (*x1*, *y1*) ikke så interessante. Der er klart som *udgangspunkt* en sammenhæng i parret: (*x1*, *y1*), men det er ikke en sammenhæng som Tyskland kan gøre noget ved / ændre på under slaget. Der er klart en sammenhæng mellem egne tabstal og antal af egne styrker i kamp, og en sammenhæng med antal af fjendtlige styrker i kamp. Det er mindre klart, om der er en sammenhæng indbyrdes mellem tabstallene, dvs. mellem (*x2*, *y2*). Så de sammenhænge det er interessant at undersøger er:

ISBN 9788770668781









Øvelse 6.4

Resultaterne er givet i øvelsen

Øvelse 6.5

Løsningen findes på bogens website.

Øvelse 6.6

a)

Ligningen er: $y''=k^2\cdot y$. Vi indsætter de to funktioner, og ser om ligningen stemmer.

Indsæt $y=\mathrm{e}^{k\cdot t}$: venstre side:

$$\left(\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)''=\left(\left(\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)'\right)'=\left(k\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)'=k\cdot\left(\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)'=k\cdot\left(k\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)=k^2\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}$$

Men det er jo præcis, hvad der står på højre side, når vi indsætter $y=\mathrm{e}^{k\cdot t}$.

Indsæt $y=\mathrm{e}^{-k\cdot t}$: venstre side:

$$\left(\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)''=\left(\left(\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)'\right)'=\left((-k)\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)'=(-k)\cdot\left(\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)'=(-k)\cdot\left((-k)\cdot\mathrm{e}^{`-k\cdot t}\right)=(-k)^2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}=k^2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}$$

Men det er jo præcis hvad der står på højre side, når vi indsætter $y=\mathrm{e}^{-k\cdot t}$.

Ligningen stemmer med begge funktioner. Så begge funktioner er løsninger.

b)

Har du løst øvelse 6.5, så henvis til den. Ellers:

Vi ved nu, at: $\left(\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)''=k^2\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}$ og $\left(\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)''=k^2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}$

Vi skal vise, at $y=c_1\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+c_2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}$ opfylder ligningen $y''=k^2\cdot y$

Indsæt $y=c_1\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+c_2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}$ på venstre side – ønsker du flere detaljer med henvisning til, hvilke regneregler der anvendes, så se løsningen til øvelse 6.5:

$$\begin{aligned}\left(c_1\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+c_2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)''&=c_1\cdot\left(\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)''+c_2\cdot\left(\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)''\\&=c_1\cdot\left(k^2\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}\right)+c_2\cdot\left(k^2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)\\&=c_1\cdot k^2\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+c_2\cdot k^2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}\\&=k^2\cdot\left(c_1\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+c_2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right)\end{aligned}$$

Men det er jo præcis hvad der står på højre side, når vi indsætter $y=c_1\cdot\mathrm{e}^{k\cdot t}+c_2\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}$.

Ligningen stemmer så alle funktioner af denne type er en løsning.

Øvelse 6.7

a)

I ligningen $y''=25\cdot y$ er $k=5$. Den **fuldstændige** løsning er derfor: $y=c_1\cdot\mathrm{e}^{5t}+c_2\cdot\mathrm{e}^{-5t}$

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Den partikulære løsning, hvis graf går gennem $(0,0)$ og $(5,5)$ findes ved at indsætte punkterne i formlen for den fuldstændige, og løse to ligninger med to ubekendte:

$$0=c_1\cdot e^{5\cdot 0}+c_2\cdot e^{-5\cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad 0=c_1+c_2$$

$$5=c_1\cdot e^{5\cdot 5}+c_2\cdot e^{-5\cdot 5} \quad \Leftrightarrow \quad 5=c_1\cdot e^{25}+c_2\cdot e^{-25}$$

Løser vi med en solve kommando, får vi: $c_1=6.94\cdot 10^{(-11)}, c_2=-6.94\cdot 10^{(-11)}$

Løser vi i hånden, giver første ligning: $c_2=-c_1$, som indsat i anden ligning giver løsningen:

$$c_1=\frac{5}{e^{25}-e^{-25}}, \quad c_2=\frac{-5}{e^{25}-e^{-25}}$$

b)

I ligningen $y''=9\cdot y$ er $k=3$. Den **fuldstændige** løsning er derfor: $y=c_1\cdot e^{3\cdot t}+c_2\cdot e^{-3\cdot t}$

Vi kan indsætte punktet $(0,1)$ i formlen for den fuldstændige:

$$y=c_1\cdot e^{3\cdot t}+c_2\cdot e^{-3\cdot t} \qquad 1=c_1\cdot e^{3\cdot 0}+c_2\cdot e^{-3\cdot 0}$$

Og når tangenthældningen i $(0,1)$ er 0,5, så kan vi indsætte $(0,0.5)$ i formlen for y' :

$$y'=c_1\cdot 3\cdot e^{3\cdot t}+c_2\cdot(-3)\cdot e^{-3\cdot t} \qquad 0.5=c_1\cdot 3\cdot e^{3\cdot 0}+c_2\cdot(-3)\cdot e^{-3\cdot 0}$$

Så har vi to ligninger med to ubekendte:

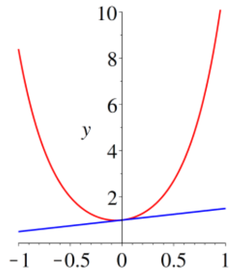
$$1=c_1+c_2$$

$$0.5=3c_1-3c_2$$

hvilket giver: $c_1=\frac{7}{12}$ og $c_2=\frac{5}{12}$, så løsningen er :

$$y=\tfrac{7}{12}\cdot e^{3\cdot t}+\tfrac{5}{12}\cdot e^{-3\cdot t}$$

Grafen med tangenten indtegnet:



c)

I ligningen $y''=4\cdot y$ er $k=2$. Den **fuldstændige** løsning er derfor: $y=c_1\cdot e^{2\cdot t}+c_2\cdot e^{-2\cdot t}$

Vi kan indsætte punktet $(1,10)$ i formlen for den fuldstændige:

$$y=c_1\cdot e^{2\cdot t}+c_2\cdot e^{-2\cdot t} \qquad 10=c_1\cdot e^{2\cdot 1}+c_2\cdot e^{-2\cdot 1}$$

Når der er minimum er tangenthældning 0, så vi kan indsætte $(1,0)$ i formlen for y'

$$y'=c_1\cdot 2\cdot e^{2\cdot t}+c_2\cdot(-2)\cdot e^{-2\cdot t} \qquad 0=c_1\cdot 2\cdot e^{2\cdot 1}+c_2\cdot(-2)\cdot e^{-2\cdot 1}$$

Så har vi to ligninger med to ubekendte:

$$10=c_1\cdot e^{2}+c_2\cdot e^{-2}$$

$$0=2c_1\cdot e^{2}-2c_2\cdot e^{-2}$$

hvilket giver: $c_1=5\cdot e^{-2}$ *og* $c_2=5\cdot e^{2}$, så løsningen er : $y=5\cdot e^{-2}\cdot e^{2\cdot t}+5\cdot e^{2}\cdot e^{-2\cdot t}$

Øvelse 6.8

a)

Af figur 1 ses, at vektoren $\vec{F_1}$ er parallel med 1. aksen, og peger i den negative retning. Heraf får vi koordinaterne for $\vec{F_1}$.

Af figur 2 og vha. trigonometri i den retvinklede (grønne) trekant får vi, at den vandrette katete har længden $|\vec{F_2}|\cdot\cos(\alpha)$, og den lodrette katete har længden $|\vec{F_2}|\cdot\sin(\alpha)$. Heraf får vi koordinaterne for $\vec{F_2}$.

Af figurerne ses, at vektoren $\vec{F_3}$ er parallel med 2. aksen, og peger i den negative retning.

Størrelsen fremgår af teksten lige ovenfor: $|\vec{F_3}|=s\cdot g$. Heraf får vi koordinaterne for $\vec{F_2}$.

Og når kæden er i hvilke er summen lig med nul-vektoren, heraf ligningen.

b)

Ved at oversætte vektorligningen til to almindelige ligninger for koordinaterne, og ved at rykke rundt får vi de to ligninger for 2. koordinat og 1. koordinat.

ISBN 9788770668781

Øvelse 6.9	a) Ligningerne fra 6.8 er: $\left\|F_2\right\| \cdot \sin(\alpha) = s \cdot g$ $\left\|F_2\right\| \cdot \cos(\alpha) = \left\|F_1\right\|$ Division af venstresidernes to størrelser svarer til division af højresiderne to størrelser: $\frac{\left\|F_2\right\| \cdot \sin(\alpha)}{\left\|F_2\right\| \cdot \cos(\alpha)} = \frac{s \cdot g}{\left\|F_1\right\|} \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{s \cdot g}{\left\|F_1\right\|} \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{s \cdot g}{\left\|F_1\right\|}$, hvor vi har udnyttet definitionen på tangens b) Vi ved fra differentialregningen, at en tangenthældning er lig med tangens til vinklen tangenten daner med vandret. Så $\tan(\alpha) = y'$ c) Kombiner a) og b): $y' = \frac{s \cdot g}{\left\|F_1\right\|}$, eller: $y' = \frac{g}{\left\|F_1\right\|} \cdot s$
Øvelse 6.10	a) Fra omskrivningerne lige ovenfor øvelsen har vi: $y'(x) = \frac{g}{\left\|\vec{F}_1\right\|} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = k \cdot \int_0^x \sqrt{1 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$ Analysens hovedsætning, der findes dels som sætning 5 s. 100, eller sætning 5 s. 325 siger, at differentieres et integral m.h.t. den variable i integralets øvre grænse, så får vi funktionens (integrandens værdi i den øvre grænse. Udtrykt med arealfunktionen på s. 100: Når vi differentierer arealfunktionen får vi den oprindelige funktion. Her: $\left(y'(x)\right)' = \left(k \cdot \int_0^x \sqrt{1 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt\right)'$ giver: $y''(x) = k \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$ Kvadratrodstegnet fjernes ved at kvadrere: $\left(y''(x)\right)^2 = k^2 \cdot \left(\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\right)^2$ eller: $\left(y''(x)\right)^2 = k^2 \cdot \left(1 + \left(y'(x)\right)^2\right)$ b) Gange højresiden i den sidste ligning ud og differentier på begge sider: $\left(y''(x)\right)^2 = k^2 + k^2 \cdot \left(y'(x)\right)^2$ $\left(\left(y''(x)\right)^2\right)' = k^2 \cdot \left(\left(y'(x)\right)^2\right)'$ Anvend sammensat differentiation på begge sider: $2 \cdot y''(x) \cdot \left(y''(x)\right)' = k^2 \cdot 2 \cdot y'(x) \cdot \left(y'(x)\right)'$ $2 \cdot y''(x) \cdot y'''(x) = k^2 \cdot 2 \cdot y'(x) \cdot y''(x)$ c) Da $y''(x) = k \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$ kan $y''(x)$ ikke være 0, så vi må forkorte i den sidste ligning: $y'''(x) = k^2 \cdot y'(x)$
Øvelse 6.11	a) *y* er den funktion, hvis graf vi ser på figur 1 s. 285. Af figuren fremgår, at kurven går gennem $(0,0)$, dvs. $y(0) = 0$, og at den i dette punkt har vandret tangent, dvs. $y'(0) = 0$. b) I øvelse 6.10 så vi: $y''(x) = k \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$. Indsættes $x = 0$, og udnyttes $y'(0) = 0$, ser vi: $y''(0) = k \cdot \sqrt{1 + \left(y'(0)\right)^2} = k \cdot \sqrt{1 + 0} = k$ c)

ISBN 9788770668781

<table>
<tr><td></td><td>

(*Bemærk: der er en skrivefejl i bogen: I linje 1 skal* $z(t)=y'(t)$ ***erstattes af :*** $z(x)=y'(x)$ *og i linje 2 skal* $z''(x)=k^2\cdot z(t)$ ***erstattes af:*** $z''(x)=k^2\cdot z(x)$)
Betragt differentialligningen fra 6.10 c):
$$y'''(x)=k^2\cdot y'(x) \Leftrightarrow \left(y'(x)\right)''=k^2\cdot y'(x)$$
Sæt $z(x)=y'(x)$, så bliver denne ligning efter denne substitution til:
$$z''(x)=k^2\cdot z(x)$$
og vi har: $z(0)=y'(0)=0$, samt $z'(0)=y''(0)=k$
d)
Løsningsformlen giver, at: $z(x)=c_1\cdot e^{k\cdot x}+c_2\cdot e^{-k\cdot x}$.
Indsæt de to begyndelsesbetingelser:
$z(0)=0$ giver: $0=c_1\cdot e^{k\cdot 0}+c_2\cdot e^{-k\cdot 0}$, eller: $0=c_1+c_2$
$z'(0)=k$ giver: $k=c_1\cdot k\cdot e^{k\cdot 0}+c_2\cdot(-k)\cdot e^{-k\cdot 0}$ eller: $k=c_1\cdot k-c_2\cdot k$
Af definitionen på *k* følger, at denne ikke er 0. Så vi kan forkorte og får:
$0=c_1+c_2$
$1=c_1-c_2$
der giver: $c_1=\frac{1}{2}$ $c_2=-\frac{1}{2}$, så $z(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{k\cdot x}-\frac{1}{2}\cdot e^{-k\cdot x}$
e)
Vi substituerer $z(x)=y'(x)$ *tilbage*: $y'(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{k\cdot x}-\frac{1}{2}\cdot e^{-k\cdot x}$
Det er et stamfunktionsproblem, hvor vi ved, at $y(0)=0$, så:
$$y(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}e^{k\cdot x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}e^{-k\cdot x}+c$$
Indsæt $y(0)=0$ $0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}e^{k\cdot 0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}e^{-k\cdot 0}+c \Leftrightarrow 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}+c$
hvilket giver: $c=-\frac{1}{k}$, så samlet har vi: $y(x)=\frac{1}{2k}e^{k\cdot x}+\frac{1}{2k}e^{-k\cdot x}-\frac{1}{k}$

</td></tr>
<tr><td>

Øvelse 6.12

</td><td>

Hyperbolsk cosinus er defineret som: $\cosh(x)=\dfrac{e^{k\cdot x}+e^{-k\cdot x}}{2}$
Omskriv den afsluttende formel i 6.11:
$$y(x)=\frac{1}{2k}e^{k\cdot x}+\frac{1}{2k}e^{-k\cdot x}-\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{k\cdot x}+\frac{1}{2}e^{-k\cdot x}\right)-\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{e^{k\cdot x}+e^{-k\cdot x}}{2}\right)-\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\cdot\cosh(k\cdot x)-\frac{1}{k}$$

</td></tr>
<tr><td>

Øvelse 6.13

</td><td>

a)
En uelastisk kæde med samme tværsnit hele vejen har et rumfang der beregnes efter formlen:
$\text{rumfang}=\text{tværsnitsareal}\cdot\text{længde}$
Vægten beregnes efter formlen:
$\text{vægt}=\text{massefylde}\cdot\text{rumfang}$
Sættes $\text{massefylde}\cdot\text{tværsnitsareal}=\text{konstant}, c$,
ser vi at $\text{vægt}=c\cdot\text{længde}$
b)
Hvis vægten er skaleret op med *c*, så ændres situationen i øvelse 6.8 til: $\left|\overrightarrow{F_3}\right|=c\cdot s\cdot g$
Dermed bliver ligningen for 2. koordinaten: :
$\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\sin(\alpha)=c\cdot s\cdot g$, altså $\left|\overrightarrow{F_2}\right|$ er også skaleret op med *c.*
Men ligningen for 1. koordinaten:
$\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos(\alpha)=\left|\overrightarrow{F_1}\right|$
fortæller at $\left|\overrightarrow{F_1}\right|$ skaleres op sammen med $\left|\overrightarrow{F_2}\right|$, altså begge med *c.*
I udtrykket for $y'(x)=\tan(\alpha)$ i øvelse 6.9 indgår *c* derfor i både tæller og nævner og forkortes væk, så differentialligningen er den samme – og *k* er den samme.
Differentialligningen afhænger alene af længden, ikke af massefylden, dvs. ikke af hvilket materiale, kæden er lavet af.

</td></tr>
</table>

ISBN 9788770668781

Øvelse 6.14

a)
Koordinatsystemet lægges så 1. aksen følger vandoverfladen i broens retning, og 2. aksen går lodret op gennem det øverste punkt på brobanen.
Pylonernes fodpunkter er da $(-812,0)$ og $(812,0)$, og de øverste punkter af pylonerne har koordinaterne: $(-812,254)$ og $(812,254)$. Disse ligger på parablen.
Kablernes laveste punkt er $(0,87)$, der også ligger på parablen.
Ved regression får vi ligningen for parablen:

$$p(x)=0{,}000253\cdot x^2+87$$

b)
Formlen for kurvelængde: $L=\int_{-812}^{812}\sqrt{1+\left(p'(t)\right)^2}\,dt=1668{,}7$

c)
Se på situationen før brobanerne kom på og kablet fulgte en kædelinje. Denne kædelinje har samme længe L, som parablen.
I øvelse 6.11 udledte vi formlen for kædelinjen: $y(x)=\frac{1}{2k}e^{k\cdot x}+\frac{1}{2k}e^{-k\cdot x}-\frac{1}{k}$
Dette er en kædelinje, hvis laveste punkt rører 1. aksen.
Kædelinjens laveste punkt ligger c m over 1. aksen, så denne kædelinje har (havde) en ligning på formlen:

$$q(x)=\tfrac{1}{2k}e^{k\cdot x}+\tfrac{1}{2k}e^{-k\cdot x}-\tfrac{1}{k}+c$$

Vi bestemmer k ud fra kravet km, at længden af kædelinjen er 1668,7:

$$\int_{-812}^{812}\sqrt{(1+(q'(x))^2}\,dx=1668{,}7 \qquad \text{giver} \quad \underline{k=0{,}000498}$$

Indsæt værdien af k (med "alle decimaler") i $q(x)$, opstil ligningen:

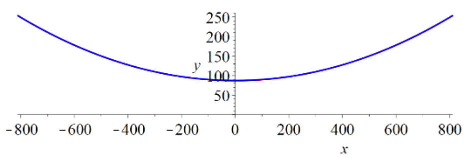
$q(812)=254$ og løs mht. c: $\underline{c=87{,}43}$

Så forskriften for kædelinjen er:

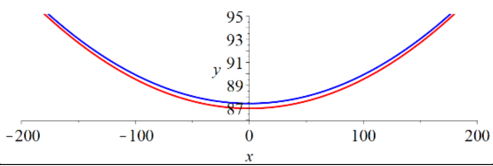
$$q(x)=\frac{1}{2\cdot 0{,}000498}e^{0{,}000498\cdot x}+\frac{1}{2\cdot 0{,}000498}e^{-0{,}000498\cdot x}-\frac{1}{0{,}000498}+87{,}43$$

Øvelse 6.14 d)

d)
Graferne i hele definitions-mængden er ikke til at skelne fra hinanden:



Ser vi på et beskedent udsnit af definitions-mængden, ser vi de to:

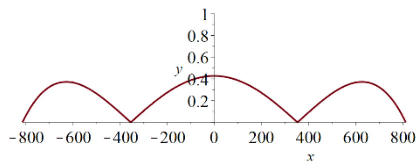


Øvelse 6.14 e)

Den lodrette afstand mellem de to grafer er:

$$d(x)=|q(x)-p(x)|$$

Med værktøjsprogram får vi, at maksimum 0,427, der optræder i $x=0$
Grafen bekræfter dette.



Øvelse 6.15

a)
Ligningen er: $y''=-k^2\cdot y$. Vi indsætter de to funktioner, og ser om ligningen stemmer.
Indsæt $y=\cos(k\cdot t)$: venstre side:

$$\left(\cos(k\cdot t)\right)''=\left(\left(\cos(k\cdot t)\right)'\right)'=\left(k\cdot(-\sin(k\cdot t))\right)'=k\cdot\left(-\sin(k\cdot t)\right)'=k\cdot\left(-k\cdot\cos(k\cdot t)\right)=-k^2\cdot\cos(k\cdot t)$$

Men det er jo præcis, hvad der står på højre side, når vi indsætter $y=\cos(k\cdot t)$.

ISBN 9788770668781

Indsæt $y=\sin(k\cdot t)$: venstre side:

$$\left(\sin(k\cdot t)\right)''=\left(\left(\sin(k\cdot t)\right)'\right)'=\left(k\cdot\cos(k\cdot t)\right)'=k\cdot\left(\cos(k\cdot t)\right)'=k\cdot\left(\left(-k\right)\cdot\sin(k\cdot t)\right)=-k^2\cdot\sin(k\cdot t)$$

Men det er jo præcis hvad der står på højre side, når vi indsætter $y=\sin(k\cdot t)$.
Ligningen stemmer med begge funktioner. Så begge funktioner er løsninger.
b)
Har du løst øvelse 6.5, så henvis til den. Ellers:

Vi ved nu, at: $\left(\cos(k\cdot t)\right)''=-k^2\cdot\cos(k\cdot t)$ og $\left(\sin(k\cdot t)\right)''=-k^2\cdot\sin(k\cdot t)$

Vi skal vise, at $y=c_1\cdot\cos(k\cdot t)+c_2\cdot\sin(k\cdot t)$ opfylder ligningen $y''=-k^2\cdot y$

Indsæt $y=c_1\cdot\cos(k\cdot t)+c_2\cdot\sin(k\cdot t)$ på venstre side – ønsker du flere detaljer med henvisning til, hvilke regneregler der anvendes, så se løsningen til øvelse 6.5:

$$\begin{aligned}\left(c_1\cdot\cos(k\cdot t)+c_2\cdot\sin(k\cdot t)\right)''&=c_1\cdot\left(\cos(k\cdot t\right)''+c_2\cdot\left(\sin(k\cdot t)\right)''\\&=c_1\cdot\left(-k^2\cdot\cos(k\cdot t\right)+c_2\cdot\left(-k^2\cdot\sin(k\cdot t)\right)\\&=c_1\cdot\left(-k^2\right)\cdot\cos(k\cdot t+c_2\cdot\left(-k^2\right)\cdot\sin(k\cdot t)\\&=-k^2\cdot\left(c_1\cdot\cos(k\cdot t)+c_2\cdot\sin(k\cdot t)\right)\end{aligned}$$

Men det er jo præcis hvad der står på højre side, når vi indsætter $y=c_1\cdot\cos(k\cdot t)+c_2\cdot\sin(k\cdot t)$.
Ligningen stemmer så alle funktioner af denne type er en løsning.

Øvelse 6.16

a)
I ligningen $y''+9\cdot y=0$ er $k=3$.
Den **fuldstændige** løsning er derfor: $y=c_1\cdot\cos(3\cdot t)+c_2\cdot\sin(3\cdot t)$

Vi kan indsætte punktet $P\left(\frac{\pi}{9},2\sqrt{3}\right)$ i formlen for den fuldstændige:

$$2\sqrt{3}=c_1\cdot\cos(3\cdot\tfrac{\pi}{9})+c_2\cdot\sin(3\cdot\tfrac{\pi}{9}),\ \text{eller:}\quad 2\sqrt{3}=c_1\cdot\cos(\tfrac{\pi}{3})+c_2\cdot\sin(\tfrac{\pi}{3})$$

Vi vil regne eksakt og slår op i formelsamlingen:

$$2\sqrt{3}=c_1\cdot\tfrac{1}{2}+c_2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 4\sqrt{3}=c_1+c_2\cdot\sqrt{3}$$

Når tangenthældningen i P er -6, så kan vi indsætte $\left(\frac{\pi}{9},-6\right)$ i formlen for y' :

$$y'=c_1\cdot(-3)\cdot\sin(3\cdot t)+c_2\cdot 3\cdot\cos(3\cdot t):\qquad -6=c_1\cdot(-3)\cdot\sin(3\cdot\tfrac{\pi}{9})+c_2\cdot 3\cdot\cos(3\cdot\tfrac{\pi}{9})$$

Vi vil regne eksakt og slår op i formelsamlingen:

$$-6=c_1\cdot(-3)\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}+c_2\cdot 3\cdot\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow -4=-\sqrt{3}\cdot c_1+c_2$$

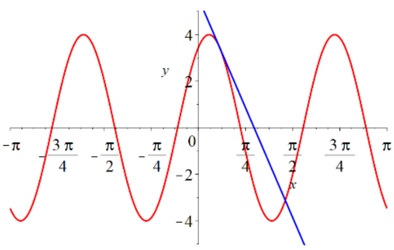
Så har vi to ligninger med to ubekendte:

$$4\sqrt{3}=c_1+c_2\cdot\sqrt{3}$$
$$-4=-\sqrt{3}\cdot c_1+c_2$$

hvilket giver: $c_1=2\sqrt{3}$ og $c_2=2$, så løsningen er :

$y=2\sqrt{3}\cdot\cos(3\cdot t)+2\cdot\sin(3\cdot t)$

Grafen med tangenten indtegnet:

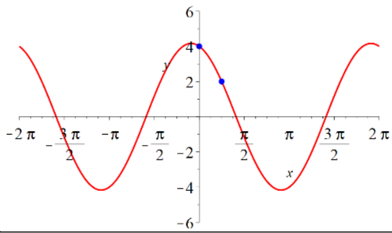
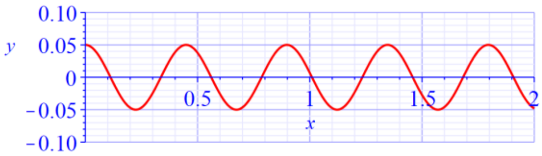


b)
I ligningen $y''=-y$ er $k=1$. Den **fuldstændige** løsning er derfor: $y=c_1\cdot\cos(t)+c_2\cdot\sin(t)$

Den partikulære løsning, hvis graf går gennem $P(0,4)$ og $Q\left(\frac{\pi}{4},2\right)$ findes ved at indsætte punkterne i formlen for den fuldstændige, og løse to ligninger med to ubekendte:

$$4=c_1\cdot\cos(0)+c_2\cdot\sin(0)\qquad\Leftrightarrow\qquad 4=c_1$$

$$2=c_1\cdot\cos(\tfrac{\pi}{4})+c_2\cdot\sin(\tfrac{\pi}{4})\qquad\Leftrightarrow\qquad 2=c_1\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}+c_2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

	Vi løser i hånden, og får: $c_1 = 4$ og $c_2 = 2\sqrt{2} - 4$ Så den partikulære løsning er: $y = 4 \cdot \cos(t) + \left(2\sqrt{2} - 4\right) \cdot \sin(t)$. Grafen med punkterne indtegnet 
Øvelse 6.17	a) Der er ligevægt mellem de to kræfter: $F_{tyngde} = m \cdot g$ og $F_L = -k \cdot L$. Indsæt $m = 0{,}8$, $g = 9{,}8$ og $L = 0{,}04$ (vi regner i meter): $m \cdot g = -k \cdot L$ giver udtrykket: $0{,}8 \cdot 9{,}8 = -k \cdot 0{,}04$, så $k = -196$ b) Differentialligningen er: $y''(t) = -196 \cdot y(t)$ Begyndelsesbetingelserne er: Til tiden 0 er fjederen trukket ud i 5 cm, dvs. vi har punktet $(0{,}0.05)$ Til tiden 0 er hastigheden 0, dvs. vi har ligningen: $y'(0) = 0$ c) Den fuldstændige løsning til $y''(t) = -196 \cdot y(t)$ er $y = c_1 \cdot \cos(14 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(14 \cdot t)$ Indsæt punktet: $0.05 = c_1 \cdot \cos(14 \cdot 0) + c_2 \cdot \sin(14 \cdot 0)$, der reduceres til: $c_1 = 0.05$ Indsæt $y'(0) = 0$ i udtrykket for $y'(t) = -14 \cdot c_1 \cdot \sin(14 \cdot t) + 14 \cdot c_2 \cdot \cos(14 \cdot t)$: $0 = -14 \cdot 0{,}05 \cdot \sin(14 \cdot 0) + 14 \cdot c_2 \cdot \cos(14 \cdot 0)$ der reduceres til $0 = -14 \cdot 0{,}05 \cdot 0 + 14 \cdot c_2 \cdot 1$ Så $c_2 = 0$ og løsningen er: $y = 0{,}05 \cdot \cos(14 \cdot t)$ d) Grafen:  e) amplitude= 0,05; svingningstid, $T = \frac{2 \cdot \pi}{14} \approx 0.44881$; frekvens, $\nu = \frac{1}{T} = 2{,}228$ Det passer fint med grafen.
Øvelse 6.18	a) Differentialligningen er $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$. Vi indsætter $y = e^{k \cdot t}$, og udnytter viden fra afsnit 3.1 om den dobbeltafledede $a \cdot \left(e^{k \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(e^{k \cdot t}\right)' + c \cdot e^{k \cdot t} = 0$ $a \cdot k^2 \cdot e^{k \cdot t} + b \cdot k \cdot e^{k \cdot t} + c \cdot e^{k \cdot t} = 0$ b) Sæt $e^{k \cdot t}$ uden for parentes: $a \cdot k^2 \cdot e^{k \cdot t} + b \cdot k \cdot e^{k \cdot t} + c \cdot e^{k \cdot t} = 0 \Leftrightarrow e^{k \cdot t} \cdot \left(a \cdot k^2 + b \cdot k + c\right) = 0$ Da $y = e^{k \cdot t}$ aldrig bliver 0, kan vi forkorte, så parentesen er 0: $a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0$ c) Antag k er rod, så $a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0$. Hvis vi indsætter $y = e^{k \cdot t}$ på venstre side i differentialligningen får vi som i a) og b): $a \cdot \left(e^{k \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(e^{k \cdot t}\right)' + c \cdot e^{k \cdot t} = a \cdot k^2 \cdot e^{k \cdot t} + b \cdot k \cdot e^{k \cdot t} + c \cdot e^{k \cdot t} = e^{k \cdot t} \cdot \left(a \cdot k^2 + b \cdot k + c\right)$ Men da parentesen er 0 er det hele 0. Derfor er $y = e^{k \cdot t}$ en løsning.

ISBN 9788770668781

<table>
<tr><td>Øvelse 6.19</td><td>

Antag, at $y = e^{k_1 \cdot t}$ og $y = e^{k_2 \cdot t}$ er løsninger til den generelle anden ordens ligning:

$$a \cdot \left(e^{k_1 \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(e^{k_1 \cdot t}\right)' + c \cdot e^{k_1 \cdot t} = 0$$

$$a \cdot \left(e^{k_2 \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(e^{k_2 \cdot t}\right)' + c \cdot e^{k_2 \cdot t} = 0$$

Gange den første igennem med c_1 og den anden med c_2, og udnyt konstant-regnereglen for differentiation, så får vi:

$$a \cdot c_1 \cdot \left(e^{k_1 \cdot t}\right)'' + b \cdot c_1 \cdot \left(e^{k_1 \cdot t}\right)' + c \cdot c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t} = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right)' + c \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right) = 0$$

$$a \cdot c_2 \cdot \left(e^{k_2 \cdot t}\right)'' + b \cdot c_2 \cdot \left(e^{k_2 \cdot t}\right)' + c \cdot c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t} = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)' + c \cdot \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right) = 0$$

Læg nu de to ligninger til højre sammen og udnyt additions-regnereglen for differentiation:

$$a \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right)' + c \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right) + a \cdot \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)' + c \cdot \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right) = 0$$

$$a \cdot \left(\left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right)'' + \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)''\right) + b \cdot \left(\left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right)' + \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)'\right) + c \cdot \left(\left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t}\right) + \left(c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)\right) = 0$$

$$a \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)'' + b \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right)' + c \cdot \left(c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}\right) = 0$$

Her står, at $y = c_1 \cdot e^{k_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{k_2 \cdot t}$ er en løsning.

</td></tr>
<tr><td>Øvelse 6.20</td><td>

Vi udregner diskriminanten *d* i det karakteristiske polynomium hver gang:

1)

$y'' + 5y' + 4y = 0$, så $d = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$ og det er tilfælde 1:

$x_1 = -1$ og $x_2 = -4$, så den fuldstændige løsning: $y = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-4t}$

2)

$y'' - 6y' + 9y = 0$, så $d = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$ og det er tilfælde 2:

dobbeltroden er $x_0 = 3$, så den fuldstændige løsning: $y = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot t \cdot e^{3t}$

3)

$y'' + 2y' + 5y = 0$, så $d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$ og det er tilfælde 3:

$\omega = \dfrac{\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 5 - 2^2}}{2 \cdot 1} = 2$ og tallet $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2} = -1$, så den fuldstændige løsning:

$y = e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t))$

</td></tr>
<tr><td>Øvelse 6.21</td><td>

a) og b) – graferne tegnes undervejs

1)

$y'' - 3y' - 4y = 0$ løses med formlen: $d = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$, så tilfælde 1:

$x_1 = -1$ og $x_2 = 4$, så den fuldstændige løsning: $y = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{4t}$

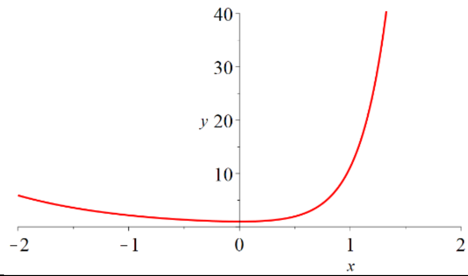
$y(0) = 1$ giver: $1 = c_1 \cdot e^{-0} + c_2 \cdot e^{4 \cdot 0} \Leftrightarrow 1 = c_1 + c_2$

$y'(0) = 0$ giver: $0 = -c_1 \cdot e^{-0} + 4 \cdot c_2 \cdot e^{4 \cdot 0} \Leftrightarrow 0 = -c_1 + 4 \cdot c_2$

De to sidste ligninger giver nu: $c_1 = 0{,}8$ og $c_2 = 0{,}2$,

så: $y = 0{,}8 \cdot e^{-t} + 0{,}2 \cdot e^{4t}$

Grafen i 1):



2)

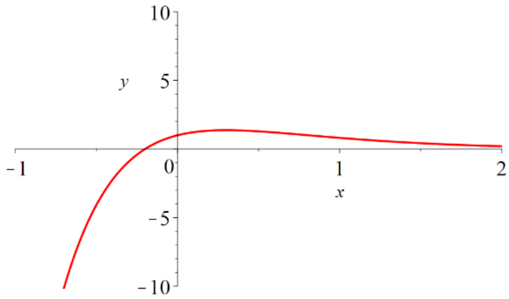
</td></tr>
</table>

ISBN 9788770668781

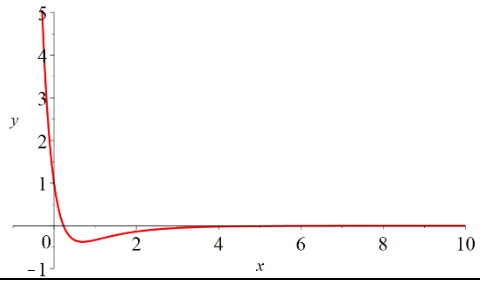
L&R Uddannelse EGMONT

<table>
<tr><td></td><td>
Ved at anvende et værktøj (Maple) får vi:

$dsolve(\{y''+4y'+4y=0, y(0)=1, y'(0)=3\})=$
$y(x)=e^{-2x}+5\,e^{-2x}x$

Grafen i 2)


3)
Ved at anvende et værktøj (Maple) får vi:
$dsolve(\{y''+2y'+4y=0, y(0)=1, y'(0)=1\})$
$y(x)=\frac{2\sqrt{3}\,e^{-x}\sin(\sqrt{3}\,x)}{3}+e^{-x}\cos(\sqrt{3}\,x)$

(Vi bemærker, at ift. løsningsformlen i sætning 3, 3), er der her ganget ind i parentesen.)
Grafen i 3)


</td></tr>
<tr><td>Øvelse 6.22</td><td>
a)
Det karakteristiske polynomium til $x''(t)+\frac{b}{m}\cdot x'(t)+\frac{k}{m}\cdot x(t)=0$ er:
$x^2+\frac{b}{m}\cdot x+\frac{k}{m}=0$, der – fordi m ikke er 0 – har samme rødder som:
$m\cdot x^2+m\cdot\frac{b}{m}\cdot x+m\cdot\frac{k}{m}=0 \Leftrightarrow m\cdot x^2+b\cdot x+k=0$
b)
Diskriminanten er $d=b^2-4\cdot m\cdot k$
</td></tr>
<tr><td>Øvelse 6.23</td><td>
Tilfældet $d>0$
a)
Rødderne: $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot m\cdot k}}{2m}$ *og* $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot m\cdot k}}{2m}$
b)
x_1 er klart negativ, da b er positiv.
$b^2-4\cdot m\cdot k<b^2$, så $\sqrt{b^2-4\cdot m\cdot k}<\sqrt{b^2}=b$, træk b over på venstre side: $-b+\sqrt{b^2-4\cdot m\cdot k}<0$ men det er jo nævner, så x_2 er negativ.
Grafisk argument: Parablen skærer andenaksen i k, der er positiv, og med en hældning på b, der også er positiv. Så vil skæring med førsteaksen ske i den negative del.
c)
</td></tr>
</table>

ISBN 9788770668781

Løsningen: $y = c_1 \cdot e^{x_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{x_2 \cdot t}$ er en sum af to eksponentialfunktioner der begge konvergerer mod 0 (har førsteaksen som vandret asymptote). Så uanset fortegn af konstanterne, vil svingningen hurtigt klinge af.

d)

Med talværdierne $m = 2, b = 10, k = 8$ bliver $x''(t) + \frac{b}{m} \cdot x'(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$ til (skrevet med y):

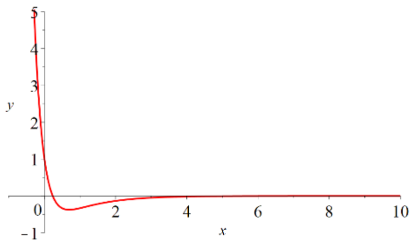
$y'' + 5y' + 4y = 0$.

Løsning når $y(0) = 1,\ y'(0) = -7$:

$dsolve(\{y'' + 5\,y' + 4\,y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -7\})$

$$y(x) = -e^{-x} + 2\,e^{-4x}$$

Grafen:



Gnidningskræfterne er så store, at de bremser enhver svingning

Øvelse 6.24

Tilfældet $d = 0$

a) og b)

Dobbeltroden: $x_0 = \frac{-b}{2m}$, løsningsformel: $y = c_1 \cdot e^{\frac{-b}{2m} \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\frac{-b}{2m} \cdot t}$

c)

$m = 1, b = 6, k = 9$, giver $y = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-3t}$.

$y(0) = 3$ giver $3 = c_1 \cdot e^{-3 \cdot 0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{-3 \cdot 0}$, dvs.: $\underline{c_1 = 3}$, så $y = 3 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-3t}$

$y'(t) = -9 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot t \cdot (-9) \cdot e^{-3t}$.

1) $y'(0) = 4$ giver:

$$4 = -9 \cdot e^{-3 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot 0} + c_2 \cdot 0 \cdot (-9) \cdot e^{-3 \cdot 0}$$
$$4 = -9 + c_2$$
$$c_2 = 13$$

så løsningen: $y = 3 \cdot e^{-3t} + 13 \cdot t \cdot e^{-3t}$

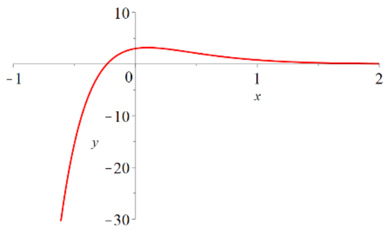
2) $y'(0) = -20$ giver:

$$-20 = -9 \cdot e^{-3 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot 0} + c_2 \cdot 0 \cdot (-9) \cdot e^{-3 \cdot 0}$$
$$-20 = -9 + c_2$$
$$c_2 = -11$$

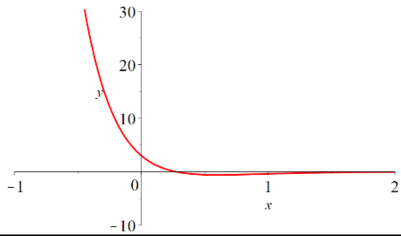
så løsningen: $y = 3 \cdot e^{-3t} - 11 \cdot t \cdot e^{-3t}$

d)

Graferne: 1)



2)



Øvelse 6.25

Tilfældet $d < 0$

a)

Vi udregner $\omega = \frac{\sqrt{4 \cdot a \cdot c - b^2}}{2 \cdot a}$ for differentialligningen $m \cdot x''(t) + b \cdot x'(t) + k \cdot x(t) = 0$:

ISBN 9788770668781

$$\omega=\frac{\sqrt{4\cdot m\cdot k-b^2}}{2\cdot m}=\frac{\sqrt{4\cdot m\cdot k-b^2}}{\sqrt{4\cdot m^2}}=\sqrt{\frac{4\cdot m\cdot k-b^2}{4\cdot m^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{4\cdot m\cdot k}{4\cdot m^2}-\frac{b^2}{4\cdot m^2}}=\sqrt{\frac{4\cdot m\cdot k}{4\cdot m^2}-\frac{b^2}{4\cdot m^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4\cdot m^2}}$$

b)

Indgår i beviset for sætning 3, der ligger i et projekt på website.

c)

Vi har givet: $m=10,\ b=6,\ k=26{,}5$, som indsættes i ligningen:

$$10\cdot y''(t)+6\cdot y'(t)+26.5\cdot y(t)=0\ .$$

Vi udregner først de to størrelser, der indgår i løsningsformlen:

$$\frac{-b}{2a}\ :\ \frac{-6}{2\cdot 10}=-\frac{3}{10}=-0{,}3$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4\cdot m^2}}=\sqrt{\frac{26{,}5}{10}-\frac{36}{400}}=\sqrt{2{,}65-0{,}09}=\sqrt{2{,}56}=1{,}6$$

Løsningsformlen: $\quad y=\mathrm{e}^{-0{,}3t}\cdot\left(c_1\cdot\cos(1{,}6\cdot t)+c_2\cdot\sin(1{,}6\cdot t)\right)$

Konstanterne findes af begyndelsesbetingelser:

$y(0)=3$ giver: $\quad 3=\mathrm{e}^{-0{,}3\cdot 0}\cdot\left(c_1\cdot\cos(1{,}6\cdot 0)+c_2\cdot\sin(1{,}6\cdot 0)\right)$, $\underline{\text{dvs } 3=c_1}$

$y'(0)=7{,}1$ giver:

$$7{,}1=-0{,}3\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3\cdot 0}\cdot\left(3\cdot\cos(1{,}6\cdot 0)+c_2\cdot\sin(1{,}6\cdot 0)\right)+\mathrm{e}^{-0{,}3\cdot 0}\cdot\left(1{,}6\cdot 3\cdot(-\sin(1{,}6\cdot 0)+1{,}6\cdot c_2\cdot\cos(1{,}6\cdot 0)\right)$$

$$7{,}1=-0{,}3\cdot 1\cdot\left(3\cdot 1+c_2\cdot 0\right)+1\cdot\left(1{,}6\cdot 3\cdot 0+1{,}6\cdot c_2\cdot 1\right)$$

$$7{,}1=-0{,}3\cdot 3+1{,}6\cdot c_2$$

$\underline{\text{Dvs } 5=c_2}$

Så løsningsformlen bliver: $f(t)=\mathrm{e}^{-0{,}3t}\cdot\left(3\cdot\cos(1{,}6\cdot t)+5\cdot\sin(1{,}6\cdot t)\right)$

$3\cdot\cos(1{,}6\cdot t)+5\cdot\sin(1{,}6\cdot t)$ kan ifølge praxisboks s. 291 skrives som én svingning: $A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$

Her er $A=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}\approx 5{,}83$

Sæt dette ind i udtrykket for *f*:

$$f(t)=\mathrm{e}^{-0{,}3t}\cdot\left(3\cdot\cos(1{,}6\cdot t)+5\cdot\sin(1{,}6\cdot t)\right)\approx\ \mathrm{e}^{-0{,}3t}\cdot 5.83\cdot\sin(1.6\cdot t+\varphi)$$

d) og e)

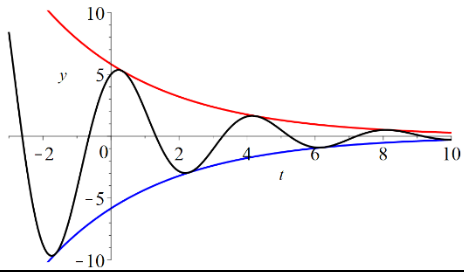
Det grafiske forløb for *f* kan nu tolkes således: Det er en svingning med en *variabel amplitude* $5.83\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3t}$.

Sinus svinger mellem -1 og +1, så *f* svinger mellem $-5.83\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3t}$ og $5.83\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3t}$.

Grafen for *f* svinger mellem graferne for $5.83\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3t}$ og $-5.83\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3t}$. Dvs. grafen for *f* er klemt inde mellem de to eksponentielle grafer, henh.

$g1(t)=5.83\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3t}$ og $g2(t)=-5.83\cdot\mathrm{e}^{-0{,}3t}$, og bliver klemt ned mod førsteaksen, bliver "dæmpet".

Vi tegner:



Øvelse 6.26

a)

Givet inhomogene ligning: $a\cdot y''+b\cdot y'+c\cdot y=f(t)$

y og *z* er løsninger: $\quad a\cdot y''+b\cdot y'+c\cdot y=f(t)$

$$a\cdot z''+b\cdot z'+c\cdot z=f(t)$$

Træk fra:

ISBN 9788770668781

$$a\cdot y''-a\cdot z''+b\cdot y'-b\cdot z'+c\cdot y-c\cdot z=0$$
$$a\cdot\left(y''-z''\right)+b\cdot\left(y'-z'\right)+c\cdot\left(y-z\right)=0$$
$$a\cdot\left(y-z\right)''+b\cdot\left(y-z\right)'+c\cdot\left(y-z\right)=0$$

hvor vi har udnyttet differens-regnereglen for differentiation.
Her står, at funktionen $y-z$ er en løsning til den homogene ligning.

b)

Antag $h(t)$ er en løsning til inhomogene og $y(t)$ er løsning til homogene:

$$a\cdot\left(h(t)\right)''+b\cdot\left(h(t)\right)'+c\cdot h(t)=f(t)$$
$$a\cdot\left(y(t)\right)''+b\cdot\left(y(t)\right)'+c\cdot y(t)=0$$

Læg sammen:

$$a\cdot\left(y(t)\right)''+a\cdot\left(h(t)\right)''+b\cdot\left(y(t)\right)'+b\cdot\left(h(t)\right)'+c\cdot y(t)+c\cdot h(t)=f(t)$$
$$a\cdot\left(\left(y(t)\right)''+\left(h(t)\right)''\right)+b\cdot\left(\left(y(t)\right)'+\left(h(t)\right)'\right)+c\cdot\left(y(t)+h(t)\right)=f(t)$$
$$a\cdot\left(y(t)+h(t)\right)''+b\cdot\left(y(t)+h(t)\right)'+c\cdot\left(y(t)+h(t)\right)=f(t)$$

hvor vi har udnyttet additions-regnereglen for differentiation.
Her står, at funktionen $y(t)+h(t)$ er en løsning til den inhomogene ligning.

Øvelse 6.27

a)

Differentialligningen: $y''+5y'+4y=4t^2$ med **gættemetoden:**

Den homogene løste vi i øvelse 6.20: $y=c_1\cdot e^{-t}+c_2\cdot e^{-4t}$

Vi *gætter* på et andengradspolynomium som løsning til inhomogene:

$$\left(at^2+bt+c\right)''+5\cdot\left(at^2+bt+c\right)'+4\cdot\left(at^2+bt+c\right)=4t^2$$
$$2a+5\cdot\left(2at+b\right)+4\cdot\left(at^2+bt+c\right)=4t^2$$
$$4at^2+(10a+4b)\cdot t+(2a+5b+4c)=4t^2$$

Da højre og venstre side er andengradspolynomier og de skal være ens er koefficienterne ens:
$4a=4$, så $a=1$. Indsæt i næste:
$10a+4b=0$, eller $10+4b=0$, dvs $b=-2{,}5$. Indsæt i næste:
$2a+5b+4c=0$, eller $2-12{,}5+4c=0$, dvs $c=2{,}625$

Konklusion: $t^2-2{,}5t+2{,}625$ er en løsning til inhomogene.

Fuldstændige løsning: $y=t^2-2{,}5t+2{,}625+c_1\cdot e^{-t}+c_2\cdot e^{-4t}$

Differentialligningen: $y''+5y'+4y=4x^2$ med **værktøj**:

$dsolve\left(y''+5\,y'+4\,y=4\cdot x^2\right)$

$$y(x)=e^{-4x}\_C2+e^{-x}\_C1+x^2-\frac{5\,x}{2}+\frac{21}{8}$$

b)

Differentialligningen $y''-3y'+2y=2t\cdot e^{3t}$.

Hvis vi ville løse med gættemetoden, så ville vi gætte på en funktion som $\left(bt+c\right)\cdot e^{3t}$.

Med **værktøj**:

$simplify\left(expand\left(dsolve\left(y''-3\,y'+2\,y=2\cdot x\cdot e^{3\cdot x}\right)\right)\right)$

$$y(x)=e^{2x}\_C1+x\,e^{3x}-\frac{3\,e^{3x}}{2}+e^{x}\_C2$$

c)

Differentialligningen $2y''-3y'+y=13\cdot\cos(1{,}5\cdot t)$

	Hvis vi ville løse med gættemetoden, så ville vi gætte på en funktion som $a\cdot\cos(1{,}5\cdot t)+b\cdot\sin(1{,}5\cdot t)$. Med **værktøj**: $dsolve(2\,y''-3\,y'+y=13\cdot\cos(1.5\cdot x))$ $y(x)=2\,e^{x}\_C1-\frac{7\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{5}-\frac{9\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{5}+e^{\frac{x}{2}}\_C2$
Øvelse 6.28	Differentialligningen: $m\cdot x''(t)+b\cdot x'(t)+k\cdot x(t)=E_1\cdot\cos(\omega\cdot t)$. Vi gætter på: $x_p=\alpha\cdot\cos(\omega\cdot t)+\beta\cdot\sin(\omega\cdot t)$ a) $x_p'=-\alpha\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)+\beta\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)$ og $x_p''=-\alpha\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)-\beta\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)$ Leddene i differentialligningen: $m\cdot x_p''=-\alpha\cdot m\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)-\beta\cdot m\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)$ $b\cdot x_p'=-\alpha\cdot b\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)+\beta\cdot b\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)$ $k\cdot x_p=\alpha\cdot k\cdot\cos(\omega\cdot t)+\beta\cdot k\cdot\sin(\omega\cdot t)$ Adder og saml alt der har med cosinus: $\alpha\cdot k\cdot\cos(\omega\cdot t)-\alpha\cdot m\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)+\beta\cdot b\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)$ $\left(\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\alpha+\beta\cdot b\cdot\omega\right)\cdot\cos(\omega\cdot t)$ og saml alt der har med sinus: $-\alpha\cdot b\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)+\beta\cdot k\cdot\sin(\omega\cdot t)-\beta\cdot m\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)$ $\left(-\alpha\cdot b\cdot\omega+\beta\cdot k-\beta\cdot m\cdot\omega^2\right)\cdot\sin(\omega\cdot t)$ $\left(-\alpha\cdot b\cdot\omega+\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\beta\right)\cdot\sin(\omega\cdot t)$ Så ligningen er: $\left(\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\alpha+\beta\cdot b\cdot\omega\right)\cdot\cos(\omega\cdot t)+\left(-\alpha\cdot b\cdot\omega+\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\beta\right)\cdot\sin(\omega\cdot t)=E_1\cdot\cos(\omega\cdot t)$ b) Dette skal være sandt for alle *t*. Indsætter vi $t=0$, så er cosinus 1, og sinus 0, så ligningen er: $\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\alpha+b\cdot\omega\cdot\beta=E_1$ (1) Indsætter vi et *t* så $\omega\cdot t=\frac{\pi}{2}$, så er cosinus 0, og sinus 1, så ligningen er: $-b\cdot\omega\cdot\alpha+\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\beta=0$ (2) Alle symboler, bortset fra α og β er størrelser der er fastlagt af de fysiske omstændigheder. Dvs. de repræsenterer talværdier. (1) og (2) er derfor 2 ligninger med 2 ubekendte, nemlig α og β . Den kan løses i hånden med determinant-metoden, men et værktøj kan også klare det: $solve\left(\left\{\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\alpha+b\cdot\omega\cdot\beta=E,-b\cdot\omega\cdot\alpha+\left(k-m\cdot\omega^2\right)\cdot\beta=0\right\},\{\alpha,\beta\}\right)$ $\left\{\alpha=\frac{\left(-m\,\omega^2+k\right)E}{m^2\,\omega^4+b^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+k^2},\ \beta=\frac{E\,b\,\omega}{m^2\,\omega^4+b^2\,\omega^2-2\,k\,m\,\omega^2+k^2}\right\}$ Nævneren kan omskrives til: $(k-m\cdot\omega^2)^2+b^2\cdot\omega^2$ som er positiv, så vi dividerer ikke med 0. Med disse værdier af α og β er $x_p=\alpha\cdot\cos(\omega\cdot t)+\beta\cdot\sin(\omega\cdot t)$ en løsning

L&R Uddannelse
EGMONT

Øvelse 6.29	Hvis $x_p = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t) + \beta \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ønskes omskrevet til én harmonisk svingning, bliver amplituden $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. α og β har fælles nævner, som vi kalder D. Når vi kvadrerer og adderer tællerne får vi, foruden størrelsen E $expand\left(\left(-m\cdot\omega^2 + k\right)^2 + (b\cdot\omega)^2\right) = m^2\,\omega^4 + b^2\,\omega^2 - 2\,k\,m\,\omega^2 + k^2$ men det er lig med D. Derfor er $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\frac{D \cdot E_1^{\,2}}{D^2}} = \frac{E_1}{\sqrt{D}}$ (*) Fra 6.28 har vi: $D = (k - m\cdot\omega^2)^2 + b^2 \cdot \omega^2$, og her sætter vi m^2 udenfor parentes: $D = (k - m\cdot\omega^2)^2 + b^2\cdot\omega^2 = m^2 \cdot \left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \omega^2\right)$ Deraf får vi $\sqrt{D} = m \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \omega^2\right)}$ Indsat i (*) giver det den ønskede formel for amplituden
Øvelse 6.30	a) $f(\omega) = \frac{E_1}{\sqrt{D}}$ Tilfældet $\omega = 0$ betyder, at den påtrykte kraft $E(t) = E_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) = E_1 \cdot \cos(0) = E_1$ er konstant. I dette tilfælde er $D = (k - m\cdot\omega^2)^2 + b^2\cdot\omega^2 = k^2$, så "amplituden" er $f(0) = \frac{E_1}{\sqrt{D}} = \frac{E_1}{k}$ b) Tilfældet $\omega \to \infty$ svarer til at svingningstiden for den påtrykte kraft bliver uendelig lille: $T = \frac{2\pi}{\omega} \to 0$, så denne vil ikke gå i resonans med noget. Når $\omega \to \infty$ vil $\sqrt{D} = m \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \cdot \omega^2\right)} \to \infty$, så $f(\omega) = \frac{E_1}{\sqrt{D}} \to 0$ c) Da *f* er en positiv funktion, der i 0 har en positiv værdi og som går mod 0, når $\omega \to \infty$ vil den havde et maksimum. Maksimum må indtræffe, hvor $D = (k - m\cdot\omega^2)^2 + b^2\cdot\omega^2$ har et minimum. $\frac{d}{d\omega}\left((k - m\cdot\omega^2)^2 + b^2\cdot\omega^2\right) = 4m^2\cdot\omega^3 - 2\cdot 2\cdot k\cdot m\cdot\omega + 2\cdot b^2\cdot\omega = \omega\cdot(4m^2\cdot\omega^2 - 4k\cdot m + 2b^2)$ Find ekstrema ved at sætte lig 0: $\omega\cdot(4m^2\cdot\omega^2 - 4k\cdot m + 2b^2) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \vee 4m^2\cdot\omega^2 - 4k\cdot m + 2b^2 = 0$ Første tilfælde har vi behandlet: Det er en konstant kraft, der ikke har nogen egen svingning. Andet tilfælde: $4m^2\cdot\omega^2 - 4k\cdot m + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$ Dette udtryk giver kun mening, hvis tallet under $\sqrt{\ }$ er positiv, dvs.: $k > \frac{b^2}{2m}$
Øvelse 6.31	a) *Resonansfrekvensen*: $\nu_{resonans} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$ Et dæmpet systems *egenfrekvens*: $\nu_{egen} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$

L&R Uddannelse EGMONT

	De to udtryk minder meget om hinanden, men i resonansfrekvensen trækkes et *større* tal fra tallet $\frac{k}{m}$, så *resonansfrekvensen er mindre end egenfrekvens* b) Hvis dæmpningen er meget beskeden, dvs. hvis *b* er meget lille, så er de to udtryk stort set ens. c) Vi vil udregne $f(\omega_{maks})$: $\omega_{maks}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{2m^2}}$, så $\omega_{maks}{}^2=\frac{k}{m}-\frac{b^2}{2m^2}$ Indsæt ω_{maks} i $\sqrt{D}=m\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\cdot\omega^2\right)}$: $$\sqrt{D}=m\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{k}{m}-\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{2m^2}\right)\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\cdot\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{2m^2}\right)\right)}$$ $$=m\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{b^2}{2m^2}\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\cdot\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{2m^2}\right)\right)}$$ $$=m\cdot\sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{b^2}{4m^2}\right)+\left(\frac{k}{m}-\frac{b^2}{2m^2}\right)\right)}$$ $$=b\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$$ Dette giver formlen: $$f(\omega_{maks})=\frac{E_1}{\sqrt{D}}=\frac{E_1}{b\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}}$$ d) Vi ser heraf, at hvis $b\to 0$, så vil $f(\omega_{maks})\to\infty$ Med en meget svag dæmpning, vil udsvinget i ω_{maks} blive meget stor.
Øvelse 6.32	Størrelserne E_1, m og k er uafhængige af hinanden og vi kan sætte dem til 1, så vi anvender disse størrelser som de enheder, vi måler i. a) Vi indsætter i $f(\omega)=\frac{E_1}{m\cdot\sqrt{\left(\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\cdot\omega^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+b^2\cdot\omega^2}}$ b) Resonansfrekvensen: $\nu_{resonans}=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{1-0.5b^2}$ $1-0.5b^2>0$ giver $2>b^2$ dvs $b<\sqrt{2}$ c) Graferne er tegnet i bogen s. 303. Vi ser, at *b*-værdierne på 2 og 1,5, der er større end $\sqrt{2}$, giver grafer uden nogen resonans. Vi ser også, at med en meget lille dæmpning peaker amplituden helt vildt.
Øvelse 6.33	a) Løsningen til differentialligningen $x''(t)+x(t)=\cos(t)$ findes med værktøjsprogram:

ISBN 9788770668781

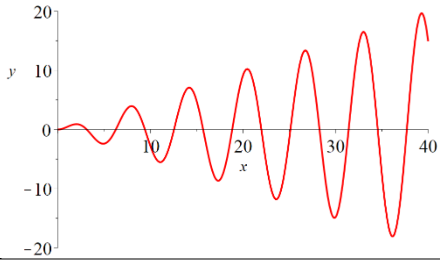
$dsolve(y''+y=\cos(x))$

$$y(x)=\sin(x)\ \_C2+\cos(x)\ \_C1+\frac{\sin(x)\,x}{2}$$

Grafen for det sidste led vil svinge mellem $-0.5\cdot x$ og $+0.5\cdot x$

b)

Der er ingen naturlige grænser for udsvingets størrelse, det bliver bare stadigt større, som vist på den empirisk bestemte graf s. 302



også

Øvelse 6.34

a)

Betragt $a\cdot y''+b\cdot y'+c\cdot y=0,\ a\neq 0$

Vi indfører ny variabel: $z=y'$ - når vi vender dette om får vi **første ligning:** $y'=z$

Vi differentierer på begge sider af ligningen: $z'=y''$.

Vi isolerer y'' i differentialligningen og indsætter i $z'=y''$:

$z'=-\frac{b}{a}\cdot y'-\frac{c}{a}\cdot y$. Dette er den **anden ligning**

Tilsammen udgør de systemet af koblede differentialligninger:

$$y'=z$$
$$z'=-\frac{b}{a}\cdot y'-\frac{c}{a}\cdot y$$

b)

1) $\begin{array}{l} y'=z \\ z'=-2\cdot y'+5\cdot y \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} y'=z \\ z'=-16\cdot y \end{array}$

Øvelse 6.35

a)

Givet systemet: $x'=a\cdot x+b\cdot y$ (1)

$y'=c\cdot x+d\cdot y$ (2)

Differentiation af (1): $x''=a\cdot x'+b\cdot y'$

Indsæt (2): $x''=a\cdot x'+b\cdot(c\cdot x+d\cdot y)\Leftrightarrow x''=a\cdot x'+b\cdot c\cdot x+b\cdot d\cdot y$ (3)

Isoler y i (1): $x'=a\cdot x+b\cdot y\Leftrightarrow y=\frac{1}{b}\cdot x'-\frac{a}{b}\cdot x$ (4)

Indsæt (4) i (3): $x''=a\cdot x'+b\cdot c\cdot x+b\cdot d\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot x'-\frac{a}{b}\cdot x\right)$

Reducer: $x''=(a+d)\cdot x'+(b\cdot c-a\cdot d)\cdot x\Leftrightarrow x''-(a+d)\cdot x'+(a\cdot d-b\cdot c)\cdot x=0$

I den sidste parentes gangede vi minus ind i parentesen og har derfor byttet om på de to led.

Vi lægger mærke til, at i ligningerne (1) og (2) står tallene a og d på samme plads, og tilsvarende står b og c på samme plads. Hvis vi havde taget udgangspunkt i ligning (2) ville vi derfor få den samme løsning, men hvor a og d har skiftet plads, og b og c har skiftet plads. Men se på løsningsformlen: At bytte rundt på disse par vil give samme formel. Derfor vil vi få det omskrevet til samme anden ordens differentialligning!

b)

$$x'=0{,}5x+y$$
$$y'=-0{,}75x+2{,}5y$$

Vi indsætter $a=0{,}5,\ b=1,\ c=-0{,}75,\ d=2{,}5$ i $x''-(a+d)\cdot x'+(a\cdot d-b\cdot c)\cdot x=0$:

$$x''-3\cdot x'+2\cdot x=0$$

ISBN 9788770668781

og samme for y: $y''-3\cdot y'+2\cdot y=0 \quad (**)$

c)

Hvis $x(0)=1$ og $y(0)=2$, så får vi: $x'(0)=0{,}5\cdot 1+2=2{,}5$ og $y'(0)=-0{,}75\cdot 1+2{,}5\cdot 2=4{,}25$

Vi løser de to ligninger $(**)$ med disse begyndelsesbetingelser

vha. sætning 3:

Rødder i karakteristiske polynomium, $x^2-3\cdot x+2=0$ er: $x_1=1$ og $x_2=2$. så:

- fuldstændige løsning: $x(t)=c_1\cdot e^t+c_2\cdot e^{2t}$

Den afledede $x'(t)=c_1\cdot e^t+2\cdot c_2\cdot e^{2t}$

Indsæt $x(0)=1$ $\quad 1=c_1\cdot e^0+c_2\cdot e^{2\cdot 0} \Leftrightarrow 1=c_1+c_2$

Indsæt $x'(0)=2{,}5$ $\quad 2{,}5=c_1\cdot e^0+2\cdot c_2\cdot e^{2\cdot 0} \Leftrightarrow 2{,}5=c_1+2\cdot c_2$

hvilket giver $c_1=-0{,}5$ og $c_2=1{,}5$, så $\underline{x(t)=-0{,}5\cdot e^t+1{,}5\cdot e^{2t}}$

Fuldstændige løsning for y: $y(t)=c_1\cdot e^t+c_2\cdot e^{2t}$

Indsæt $y(0)=2$ $\quad 2=c_1\cdot e^0+c_2\cdot e^{2\cdot 0} \Leftrightarrow 2=c_1+c_2$

Indsæt $y'(0)=4{,}25$ $\quad 4{,}25=c_1\cdot e^0+2\cdot c_2\cdot e^{2\cdot 0} \Leftrightarrow 4{,}25=c_1+2\cdot c_2$

hvilket giver $c_1=-0{,}25$ og $c_2=2{,}25$, så $\underline{y(t)=-0{,}25\cdot e^t+2{,}25\cdot e^{2t}}$

d)

Vi løser de to ligninger $(**)$ med begyndelsesbetingelser i punkt c)

vha. værktøj:

Første funktion der ovenfor kaldes $x(t)$:

$$dsolve(\{y''-3\,y'+2\,y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2.5\})$$

$$y(x)=-\frac{e^x}{2}+\frac{3\,e^{2x}}{2}$$

Del-konklusion: $x(t)=-\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}e^{2t}$

Anden funktion der ovenfor kaldes $y(t)$:

$$dsolve(\{y''-3\,y'+2\,y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=4.25\})$$

$$y(x)=-\frac{e^x}{4}+\frac{9\,e^{2x}}{4}$$

Del-konklusion: $y(t)=-\frac{1}{4}e^t+\frac{9}{4}e^{2t}$

Vi ser, at de to metoder giver det samme.

Øvelse 6.36

Lanchesters lineære model består af systemet

$$\frac{dx(t)}{dt}=-a\cdot x(t)\cdot y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=-b\cdot x(t)\cdot y(t)$$

a)

Begge funktioner må være monotont aftagende. *y* må også være en funktion af *x*: En given værdi af *x* svarer til en bestemt værdi af *t* (fordi *x* er monoton), og til denne værdi af *t* har *y* en bestemt værdi – man kan også argumentere ud fra omvendte funktioner.

Differentier $y(x(t))$ som en sammensat funktion:

$(y(x(t)))'=y'(x(t))\cdot x'(t)$, eller skrevet med $\frac{d}{dt}$: $\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

Indsæt ligningerne ovenfor: $\quad -b\cdot x(t)\cdot y(t)=\frac{dy}{dx}\cdot(-a\cdot x(t)\cdot y(t))$

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

	Isoler $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx}=\frac{-b\cdot x(t)\cdot y(t)}{-a\cdot x(t)\cdot y(t)}=\frac{b}{a}$ (*) b) Den fuldstændige løsning til (*) er: $y=\frac{b}{a}\cdot x+c$, hvor *c* er en ny konstant, dvs. *y* er en lineær funktion af *x* c) *y* vinder, hvis der stadig er en positiv værdi af *y*, når *x* er 0, dvs. hvis *c* er positiv: Indsæt (x_0,y_0) : $y_0=\frac{b}{a}\cdot x_0+c \Leftrightarrow c=y_0-\frac{b}{a}\cdot x_0$ og : $c>0 \Leftrightarrow y_0>\frac{b}{a}\cdot x_0$ *x* vinder, hvis der stadig er en positiv værdi af *x*, når *y* er 0, dvs. hvis *c* er negativ. Det er tilfældet når: $y_0<\frac{b}{a}\cdot x_0$
Øvelse 6.37	Lanchesters kvadratiske model består af systemet $\frac{dx(t)}{dt}=-a\cdot y(t)$ $\frac{dy(t)}{dt}=-b\cdot x(t)$ a) Begge funktioner må være monotont aftagende. *y* må også være en funktion af *x*: En given værdi af *x* svarer til en bestemt værdi af *t* (fordi *x* er monoton), og til denne værdi af *t* har *y* en bestemt værdi – man kan også argumentere ud fra omvendte funktioner. Differentier $y(x(t))$ som en sammensat funktion: $\left(y(x(t))\right)'=y'(x(t))\cdot x'(t)$, eller skrevet med $\frac{d}{dt}$: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ Indsæt ligningerne ovenfor: $-b\cdot x(t)=\frac{dy}{dx}\cdot\left(-a\cdot y(t)\right)$ Isoler $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx}=\frac{-b\cdot x(t)}{-a\cdot y(t)}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{y}$ (*) b) (*) er en separabel ligning. Vi kan løse den med værktøj eller direkte – det sidste er lettest at styre: $\int y\,dy=\int\frac{b}{a}\cdot x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2=\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+k\right) \Leftrightarrow y^2=\frac{b}{a}\cdot x^2+c$, hvor *c* er en ny konstant. Ligningen kan omskrives til $y^2-\frac{b}{a}\cdot x^2=c$, hvilket er ligningen for en hyperbel. (Denne ligning har givet navnet ”kvadratisk lov”). c) *y* vinder, hvis der stadig er en positiv værdi af *y*, når *x* er 0, dvs. hvis *c* er positiv: Indsæt (x_0,y_0) : $y_0{}^2=\frac{b}{a}\cdot x_0{}^2+c \Leftrightarrow c=y_0{}^2-\frac{b}{a}\cdot x_0{}^2$ og : $c>0 \Leftrightarrow y_0>\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot x_0$, da ale tal er positive. *x* vinder i de andre tilfælde, dvs. når: $y_0<\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot x_0$
Øvelse 6.38	Svarene afhænger af, hvilke værktøjsprogrammer man bruger