ISBN 9788770668781

Løsninger til øvelser i kapitel 5

Før du regner

Indlæs følgende:
with(*Gym*) :
with(*plots*) :
with(*Student*[*MultivariateCalculus*])

[&x, `.`, *Angle*, *ApproximateInt*, *ApproximateIntTutor*, *AreOrthogonal*, *AreParallel*, *AreSkew*, *BoxProduct*, *CenterOfMass*, *ChangeOfVariables*, *Contains*, *CrossProduct*, *CrossSection*, *CrossSectionTutor*, *Del*, *DirectionalDerivative*, *DirectionalDerivativeTutor*, *Distance*, *DotProduct*, *Equal*, *FunctionAverage*, *GetDimension*, *GetDirection*, *GetIntersection*, *GetNormal*, *GetPlot*, *GetPoint*, *GetRepresentation*, *Gradient*, *GradientTutor*, *Intersects*, *Jacobian*, *LagrangeMultipliers*, *Line*, *MultiInt*, ∇, *Norm*, *Normalize*, *Plane*, *Projection*, *Revert*, *SecondDerivativeTest*, *SurfaceArea*, *TaylorApproximation*, *TaylorApproximationTutor*, *TripleScalarProduct*, *diff*] **(1)**

(Bemærk: *Student*[*MultivariateCalculus*] indlæses for at få et værktøj, der umiddelbart kan beregne gradienter og samtidig give svaret i den notation, vi anvender i gymnasiet. Både *Student*[*VectorCalculus*] og *LinearAlgebra* kunne også anvendes, menher vil vi få svaret leveret i en anden notation, og skal bruge kræfter på at omforme det til noget vi kender. Hvis de pakker er indlæst, så *unwith* dem før du skal beregne en gradient.)

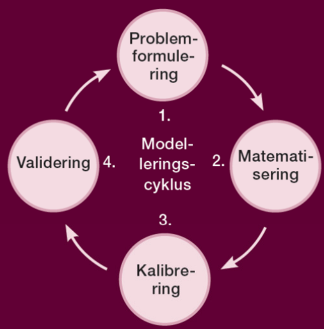
Øvelse 5.1

Giv et referat af praxisboksen i HEM2 s 244:

Den matematiske modellering kan opdeles i fire faser:

Praxis: De fire faser i en matematisk modellering

1. Problemet, der skal løses, eller systemet, der skal beskrives, foreligger i en *sproglig formulering*, hvor der kan være angivet bestemte sammenhænge eller oplyst bestemte naturlove, der gælder for systemet. Der vil normalt også være opgivet nogle talværdier, fx startværdier, som vi skal tage udgangspunkt i, eller *tabeller over observationer*.
2. *Matematisering*, hvor vi indfører passende variable og evt. visualiserer oplysningerne i form af *grafer og diagrammer*, og hvor vi oversætter den sproglige formulering af sammenhængene til ligninger mellem *formeludtryk*. Variable, der beskriver et systems tilstand, kaldes for *tilstandsvariable*.
3. Matematisk løsning af de opstillede ligninger. Evt. konstanter og parametre bestemmes ud fra de oplyste talværdier. Teknikken vil afhænge af det konkrete problem. At bestemme konstanterne kaldes også at *kalibrere modellen*.
4. Den matematiske løsning sammenholdes med det oprindelige problem, fx ved at sammenligne *empiriske værdier* med *modelværdier*, og der gives en fortolkning af resultatet, herunder hvad de eventuelle parametre og konstanter betyder. At sammenholde model og virkelighed kaldes også at *validere* modellen. Valideringen kan føre til, at vi finder modellen utilfredsstillende og starter forfra med punkt 1 og 2: Måske har vi set bort fra information, der er væsentlig?



Skal man fx modellere et *frit fald* tager man udgangspunkt i Galileis faldlov, som er en naturlov:

$$s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2,\quad v=g\cdot t$$

Derefter inddrages gnidningsmodstanden, som fx kan antages at være proportional med kvadratet på hastigheden, dvs. v^2. Proportionalitetskonstanten afhænger da af forskellige parametre, såsom luftens densitet ρ og formparameteren c_W, som må slås op i tabeller.

Øvelse 5.2

a)
(Bemærk: Man kan næsten altid skære en bid ud af en definitionsmængde, hvor inden for en given funktion opfylder de to kriterier. Her ser vi på funktionerne *uden* begrænsninger på definitionsmængderne).

ISBN 9788770668781

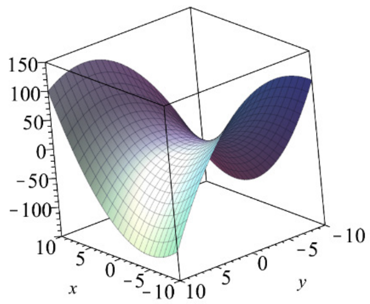
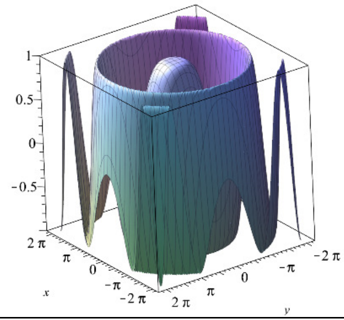
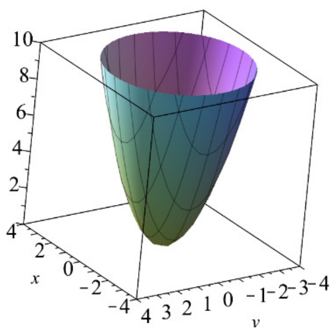
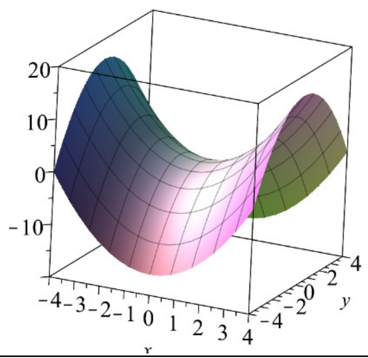
	Polynomier af ulige grad kan godt være voksende (som x og x^3), men den anden afledede er enten 0 (for x), eller antager både negative og positive værdier: Grafen har et vendepunkt, hvor den skifter mellem at krumme opad og krumme nedad. *Polynomier af lige grad* er ikke kun voksende. *Eksponentialfunktioner* kan godt være voksende, men graferne krummer altid opad. Deres anden aflede er altid positiv: $\left(e^{k\cdot x}\right)'' = k\cdot\left(e^{k\cdot x}\right)' = k^2\cdot e^{k\cdot x} > 0$ *Logistiske funktioner* (de normale typer) er voksende, men graferne har altid et vendepunkt. *Trigonometriske funktioner* skifter hele tiden mellem intervaller, hvor de er voksende til intervaller, hvor de er aftagende. Og i hvert sådan inteval er der et vendepunkt. b) Lad $f(x) = x^a,\ 0 < a < 1$. $f'(x) = a\cdot x^{a-1} > 0$, så potensfunktioner er voksende. $f''(x) = (a-1)\cdot a\cdot x^{a-1} < 0$, når $a < 1$, så graferne krummer nedad, når $0 < a < 1$ c) Alle logaritmefunktioner er proportionale, så vi ser kun på $\ln(x)$: $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x} > 0$, da $x > 0$, så $\ln(x)$ er voksende. $\left(\ln(x)\right)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\cdot x^{-2} < 0$, så grafen krummer nedad.
Øvelse 5.3	a) Svaret står i opgaven. b) Formlen for priselasticitet er: $e = \frac{(V_{efter} - V_{før})/V_{før}}{(p_{efter} - p_{før})/p_{før}}$. *Tælleren* $\frac{V_{efter} - V_{før}}{V_{før}}$ er formlen for *procentvækst i vandforbruget*. Har du glemt formlen for procentvækst? Af HEM1, s. 109 har vi: $V_{efter} = V_{før}\cdot(1+r)$ Gang ind og roker rundt: $V_{efter} = V_{før} + V_{før}\cdot r \Leftrightarrow V_{efter} - V_{før} = V_{før}\cdot r \Leftrightarrow \frac{V_{efter} - V_{før}}{V_{før}} = r$ *Nævneren* $\frac{p_{efter} - p_{før}}{p_{før}}$ er på samme måde formlen for *procentvækst på prisen*. c) Formlen for priselasticitet kan omskrives: $e = \frac{(V_{efter} - V_{før})/V_{før}}{(p_{efter} - p_{før})/p_{før}} \Leftrightarrow \frac{V_{efter} - V_{før}}{V_{før}} = e\cdot\frac{p_{efter} - p_{før}}{p_{før}}$ Indsæt $e = -0{,}14$ og $\frac{p_{efter} - p_{før}}{p_{før}} = 1\%$: $\frac{V_{efter} - V_{før}}{V_{før}} = -0{,}14\cdot 1\% = -0{,}14\%$ Et minus betyder fald, så når prisen *stiger* med 1%, så *falder* forbruget med 0,14%. d) En *prisstigning* vil i alle normale situationer føre til et *fald* i forbrug. Og omvendt vil et *prisfald* i alle normale situationer føre til en *stigning* i forbrug. Derfor er et af tallene i formlen for *e* negativ, så brøken er negativ.
Øvelse 5.4	Vi forlænger først med z_0 og forkorter, og derefter med $\frac{f(z_0)}{\Delta z}$ og forkorter:

ISBN 9788770668781

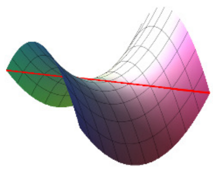
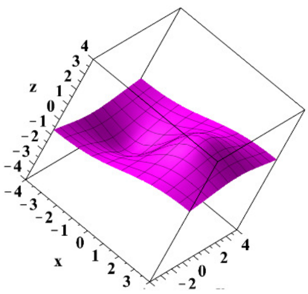
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">

$$e(f;z)=\frac{\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{f(z_0)}}{\dfrac{\Delta z}{z_0}}=\frac{\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{f(z_0)}\cdot z_0}{\dfrac{\Delta z}{\cancel{z_0}}\cdot\cancel{z_0}}=\frac{\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{f(z_0)}}{\Delta z}\cdot z_0=$$

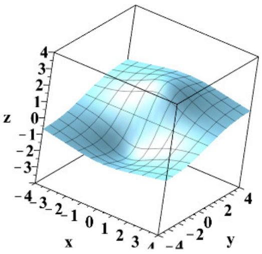
$$\frac{\dfrac{\cancel{f(z_0)}}{\Delta z}\cdot\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\cancel{f(z_0)}}}{\dfrac{f(z_0)}{\cancel{\Delta z}}\cdot\cancel{\Delta z}}\cdot z_0=\frac{\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}}{f(z_0)}\cdot z_0$$

Lad $\Delta z\rightarrow 0$, så vil tælleren gå mod $f'(z_0)$, hvilket giver formlen</td></tr>
<tr><td>**Øvelse 5.5**</td><td colspan="2">Nr. 2 og 4 er højrehåndssystemer</td></tr>
<tr><td>**Øvelse 5.6**</td><td>a)
Vi vælger et z-interval fra: -150 til 150, ved fx at se på funktionsværdier i $(\pm 10,5)$</td><td>b)
Vi vælger et *z*-interval fra -1 til 1 pga at cos svinger mellem de to værdier</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>c 1)
Det centrale er hvad der sker omkring $(0,0)$, så vi vælger definitionsmængden som: $[-4;4]\,x[-4;4]$. Og da $4^2=16$ vælger vi z-intervallet til $[0;10]$, så vi kan se figuren, uden den bliver skåret skrået igennem</td><td>c 2)
Det centrale er hvad der sker omkring $(0,0)$, så vi vælger definitionsmængden som: $[-4;4]\,x[-4;4]$. Og da $4^2=16$ og $-4^2=-16$ vælger vi z-intervallet til $[-10;10]$, det giver et indtryk af figuren i sin helhed.</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>**Øvelse 5.7**</td><td colspan="2">Svarene er givet i øvelsen</td></tr>
<tr><td>**Øvelse 5.8**</td><td colspan="2">a)
Er tegnet i 5.6 c-1)
b)
Snitfunktionen **(Bemærk, at i den blå snitkurve på siden overfor s. 250 er der en trykfejl:** $x=1$ **skal indsættes alle steder, så** $f_{blå}(y)=10\cdot e^{-1-y^2}$):
$y=2:\ f_{y=2}(x)=x^2+4$
c)</td></tr>
</table>

ISBN 9788770668781

	$x=1:\ f_{x=1}(y)=1+y^2$ d) Parameterfremstillingen er: $x=1{,}5+2t$, $y=4+1{,}5t$. Dette indsættes: $f(1.5+2t,4+1.5t)=(1.5+2t)^2+(4+1.5t)^2=6.25t^2+18t+18.25$
Øvelse 5.9	Grafen er tegnet i 5.6 c-2) a) $y=2:\ f_{y=2}(x)=x^2-4$ b) $x=2:\ f_{x=2}(y)=4-y^2$  c) Parameterfremstillingen er: $x=t$, $y=-t$. Dette indsættes: $f(t,-t)=t^2-(-t)^2=0$ Det er måske overraskende, men lægges det ind i en samlet tegning, ser vi det godt kan lade sig gøre at have en ret linje på en saddelfigur:
Øvelse 5.10	Svarene er givet i øvelsen
Øvelse 5.11	a) $x^2+y^2=81$. Det er en cirkel med centrum i $(0,0)$, og radius 9 b) Ingen niveaukurve for negative værdier af *a*
Øvelse 5.12	*Bemærk. Vi kalder i det følgende f og g for f1 og f2.* Betragt de to funktioner: $f1(x,y) := \dfrac{6x}{x^2+y^2+3}$: og $f2(x,y) := \dfrac{6y}{x^2+y^2+3}$: **snitfunktioner med $y=2$** $g1(t) := \dfrac{6t}{t^2+7}$: , $g2(t) := \dfrac{12}{t^2+7}$: **snitfunktioner med $x=-2$** $h1(t) := \dfrac{-12}{t^2+7}$: , $h2(t) := \dfrac{6t}{t^2+7}$: Vi giver i det følgende både illustrationer og Maplekommandoer
	a) *plot3d*(*f1*, *color* = *magenta*, *labels* = ["x", "y", "z"], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 30], *axesfont* = [*arial*, *bold*, 30], *view* = [-4 ..4, -4 ..4, -4 ..4])  *plot3d*(*f2*, *color* = "SkyBlue", *labels* = ["x", "y", "z"], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 30], *axesfont* = [*arial*, *bold*, 30], *view* = [-4 ..4, -4 ..4, -4 ..4])

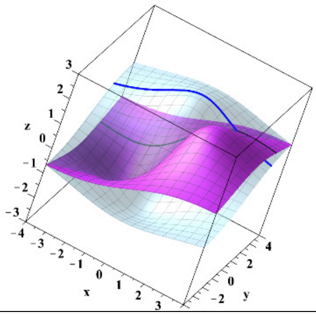
ISBN 9788770668781



b)

Snitkurver for $y=2$ indtegnet på de to grafer:

```
display(plot3d(f1(x, y), view = [-4..4, -4..4, -3..3], grid = [200, 200], color = magenta, labels
  = ["x", "y", "z"], labelfont = [arial, bold, 30], axesfont = [arial, bold, 30]), plot3d(f2(x, y),
  view = [-4..4, -4..4, -3..3], grid = [200, 200], color = "SkyBlue", transparency = 0.6, labels
  = ["x", "y", "z"], labelfont = [arial, bold, 30], axesfont = [arial, bold, 30]), spacecurve([t, 2,
  g1(t), t=-4..4], thickness = 6, color = black), spacecurve([t, 2, g2(t), t=-4..4], thickness = 6,
  color = blue))
```

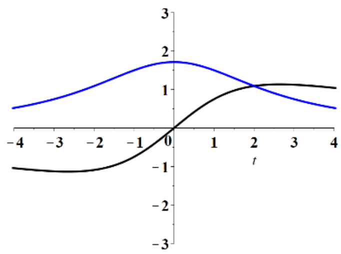


b)

Snitfunktionerne som funktion af en variabel *x*:

$$g1(x)=\frac{6x}{x^2+7},\quad g2(x)=\frac{12}{x^2+7},$$

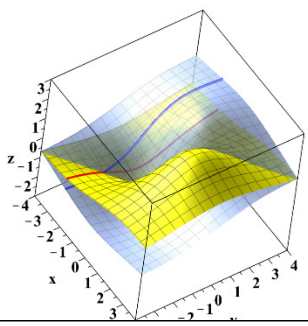
Snitgraferne i alm koordinatsystem, hvor den sorte hører til *f1*, den blå til *f2*:



c)

Snitkurver for $x=-2$ indtegnet på de to grafer:

```
display(plot3d(f1(x, y), view = [-4..4, -4..4, -3..3], grid = [200, 200], color = yellow, labels
  = ["x", "y", "z"], labelfont = [arial, bold, 30], axesfont = [arial, bold, 30]), plot3d(f2(x, y),
  view = [-4..4, -4..4, -3..3], grid = [200, 200], color = "SkyBlue", transparency = 0.5, labels
  = ["x", "y", "z"], labelfont = [arial, bold, 30], axesfont = [arial, bold, 30]), spacecurve([-2, t,
  h1(t), t=-4..4], thickness = 6, color = red), spacecurve([-2, t, h2(t), t=-4..4], thickness = 6,
  color = blue))
```



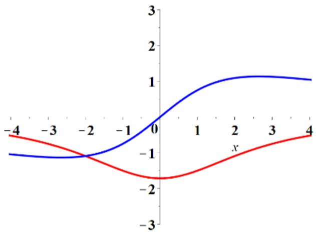
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

c)
Snitfunktionerne som funktion af en variabel x:

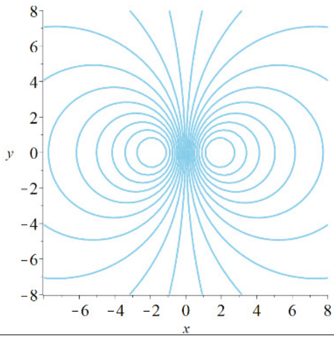
$$h1(x)=\frac{-12}{x^2+7},\quad h2(x)=\frac{6x}{x^2+7},$$

Snitgraferne i alm koordinatsystem, hvor den røde hører til $f1$, den blå til $f2$:



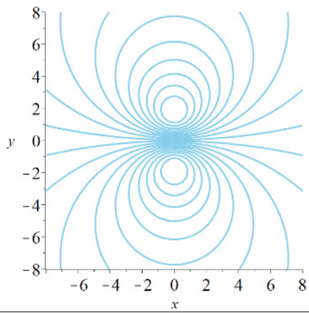
Vi tegner først et konturplot med 20 konturer, hvor Maple vælger positive og negative parameterværdier - kører man cursoren hen over dem, får man oplyst hvilket tal den enkelte kontur svarer til. for $f1$:

$$contourplot\left(\frac{6\,x}{x^2+y^2+3}, x=-8..8, y=-8..8, color=\text{"SkyBlue"}, axes=frame, thickness=4, contours=20, scaling=constrained\right)$$



For $f2$:

$$contourplot\left(\frac{6\,y}{x^2+y^2+3}, x=-8..8, y=-8..8, color=\text{"SkyBlue"}, axes=frame, thickness=4, contours=20, scaling=constrained\right)$$



Vi tegner dernæst konturen for $a = 1$ for begge funktioner - det første tomme plot tages blot med for at definere et grafrum

$$display\left(plot([-6], tickmarks=[[-8,0,8],[-4,0,4]], view=[-8..8,-5..5]), contourplot\left(\frac{6\,x}{x^2+y^2+3}, x=-8..8, y=-4..8, axes=frame, thickness=6, contours=[1], color=\text{"SkyBlue"}, scaling=constrained\right), contourplot\left(\frac{6\,y}{x^2+y^2+3}, x=-8..8, y=-4..8, axes=frame, thickness=6, contours=[1], color=red, scaling=constrained\right)\right)$$

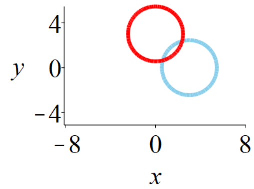
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Ekstra

Kan vi bestemme en ligning for niveaukurverne?

Det ligner cirkler. Lad os se på den blå:



Ligningen kan bestemmes af:

$\frac{6\,x}{x^2+y^2+3} = 1$ der giver: $6\,x = x^2+y^2+3$, eller: $0 = x^2+y^2-6\,x+3$ der med tenikken fra cirkelomskrivninger kan omskrives til:

$$(x-3)^2+y^2 = 6$$

altså niveaukurven er en cirkel med centrum i $(3, 0)$ og radius lig med $\sqrt{6}$

Øvelse 5.13

a)

Rumfangsfunktionen:

$V(r, h) := \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$V := (r, h) \mapsto \pi\, r^2\, h$$

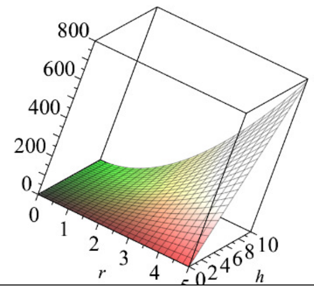
b)

Vi lader radius løbe fra 0 til 5, højden løbe fra 0 til 10, undersøger grafrummet, ved at udregne maks værdi:

$evalf(V(5, 10), 3) = 785.$

Derfor:

$plot3d(V(r, h), r = 0..5, h = 0..10, view = [0..5, 0..10, 0..800])$



Vi vil tegne en højdeplan ind i 300 og samtidig tegner skæringskurven mellem grafen og denne højdeplan. Når værdien er 300 har vi: $\pi \cdot r^2 \cdot h = 300$, hvoraf: $h = \frac{300}{\pi \cdot r^2}$. Idet vi opfatter r som 1. koordinat og h som 2. koordinat kan vi bestemme niveaukurven ved at brstemme h som funktion af r.

Så forskriften for niveaukurven er:

$n(r) := \frac{300}{\pi \cdot r^2}$

$$n := r \mapsto \frac{300}{\pi\, r^2} \qquad (3.2)$$

Skæingskurven vil være grafen for n løftet op til z=300, så det er følgende spacecurve:

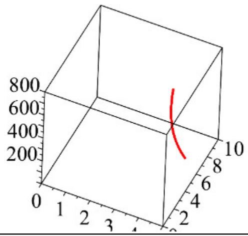
$u(t) := \langle t, n(t), 300 \rangle$

$$u := t \mapsto \langle t, n(t), 300 \rangle \qquad (3.3)$$

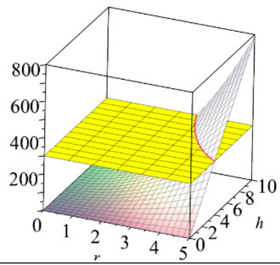
Vi tjekker at den ser rigtig ud. Da n(t) ikke er defineret i 0, lader vi t-intervallet køre fra 0.1:

$spacecurve(u(t), t = 0.1..5, view = [0..5, 0..10, 0..800], linestyle = solid, thickness = 4, color = red, numpoints = 10000)$

ISBN 9788770668781



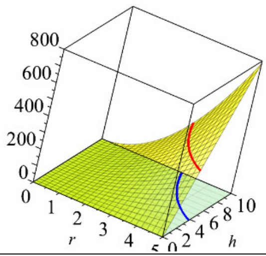
Vi tegner det nu sammen:
display(plot3d(V(r, h), r = 0 ..5, h = 0 ..10, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800]), plot3d(300, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800], color = yellow), spacecurve(u(t), t = 0.1 ..5, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800], linestyle = solid, thickness = 4, color = red, numpoints = 10000))



Niveaukurven skal tegnes nede i xy-planen. Vi definerer:
$v(t) := \langle t, n(t), 0\rangle$

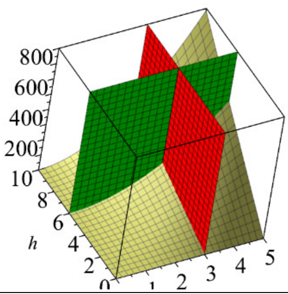
$$v := t \mapsto \langle t, n(t), 0\rangle \qquad \textbf{(3.4)}$$

display(plot3d(V(r, h), r = 0 ..5, h = 0 ..10, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800], color = yellow, transparency = 0.4), spacecurve(u(t), t = 0.1 ..5, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800], linestyle = solid, thickness = 4, color = red, numpoints = 10000), spacecurve(v(t), t = 0.1 ..5, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800], linestyle = solid, thickness = 4, color = blue, numpoints = 10000))



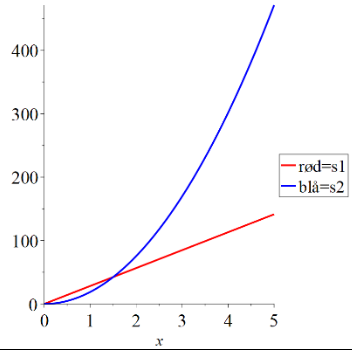
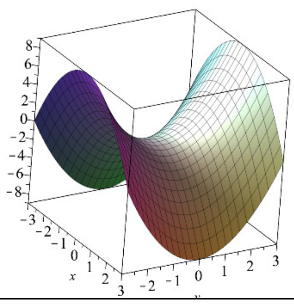
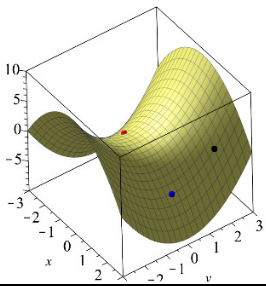
Snitfunktion. Som eksempel snitter vi med planerne $r = 3$ og $h = 6$
(Bemærk, vi har drejet koordinatsystemet, så vi ser det "bagfra", idet akserne peger modsat af hvad vi plejer - for at få et bedre indtryk af snitplanen)

display(plot3d(V(r, h), r = 0 ..5, h = 0 ..10, color = yellow, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800]), plot3d([3, s, t], s = 0 ..10, t = 0 ..800, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800], color = red, numpoints = 10000), plot3d([s, 6, t], s = 0 ..5, t = 0 ..800, view = [0 ..5, 0 ..10, 0 ..800], color = green, numpoints = 10000))



Snitkurverne er grafer for funktioner, som vi kan bestemme således – og tegne grafer af:

ISBN 9788770668781

	$s1(h) := V(3,h);\ s2(r) := V(r,6)$ $s1 := h \mapsto V(3,h)$ $s2 := r \mapsto V(r,6)$ **(3.5)** $s1(h) = 9\pi h$ $s2(r) = 6\pi r^2$ Vi ser af funktionsudtrykkene, at $s1$ er lineær, og at $s2$ er et andengradspolynomium. Det ville også gælde for andre snit. Graferne: $plot([s1(x), s2(x)], x = 0..5, thickness = 4, color = [red, blue], legend = [$"rød=s1", "blå=s2"$], legendstyle = [font = [helvetica, 30], location = right], size = [800, 800])$ 
Øvelse 5.14	a) $g(x, y) := -x^2 + y^2 :$ a) $plot3d(g(x, y), x = -3..3, y = -3..3)$ 
	b) A: $g(-1, 0) = -1$ B: $g(2, 0) = -4$ C: $g(2, 2) = 0$ Punkterne er A1, B1 og C1 er derfor: $[-1, 0, -1], [2, 0, -4], [2, 2, 0]:$ Punkternes farve på grafen: A1 er rød, B1 er blå, C1 er sort. Graf med punkterne afsat: $display(plot3d(g(x, y), x = -3..3, y = -3..3, color = yellow), pointplot3d([[-1, 0, -1], [2, 0, -4], [2, 2, 0]], view = [-3..3, -3..3, -10..10], color = [red, blue, black], symbol = solidsphere, symbolsize = 20))$ 
	c)

ISBN 9788770668781

$\vec{r} := \langle 1, 1 \rangle :$
$\vec{s} := \langle -1, 1 \rangle : :$
$\vec{t} := \langle \sqrt{2}, 0 \rangle :$

$len(\vec{r});\ len(\vec{s});\ len(\vec{t})$

$$\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}$$

d og e)

Udgangspunktet er $B(x_0, y_0) = B(2,0)$

Ifølge definitionen s 254, skal vi se på funktionerne:

$\vec{r}$'s retning: $f_{\vec{r}}(t) = f(x_o + t\cdot h, y_0 + t\cdot k) = f(2+t\cdot 1, 0+t\cdot 1) = f(2+t,t) = -(2+t)^2 + t^2 = -4t-4$

$\vec{s}$'s retning: $f_{\vec{s}}(t) = f(x_o + t\cdot h, y_0 + t\cdot k) = f(2+t\cdot(-1), 0+t\cdot 1) = f(2-t,t) = -(2-t)^2 + t^2 = 4t-4$

$\vec{t}$'s retning:

$f_{\vec{t}}(t) = f(x_o + t\cdot h, y_0 + t\cdot k) = f(2+t\cdot\sqrt{2}, 0+t\cdot 0) = f(2+\sqrt{2}\cdot t, 0) = -(2+\sqrt{2}\cdot t)^2 = -2t^2 - 4\sqrt{2}\cdot t - 4$

Vi differentierer og sætter $t=0$ (da vi skal finde den afledede i B):

$(f_{\vec{r}}(t))' = (-4t-4)' = -4$, så $\qquad f_{\vec{r}}'(0) = -4$

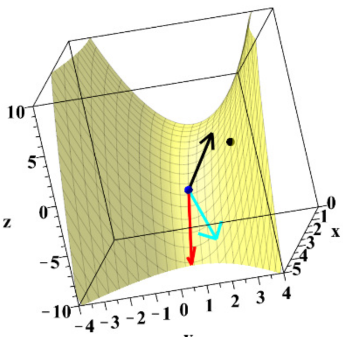
$(f_{\vec{s}}(t))' = (4t-4)' = 4$, så $\qquad f_{\vec{s}}'(0) = 4$

$(f_{\vec{t}}(t))' = \left(-2t^2 - 4\sqrt{2}\cdot t - 4\right)' = -4t - 4\sqrt{2}$, så: $\qquad f_{\vec{t}}'(0) = -4\sqrt{2} \approx -5{,}66$ (og ikke bogens 5,64!)

e)

Det passer fint med tegningen: Stå i B og se, om du går ned eller op ved at følge de angivne retninger. Man kan også tegne vektorerne ind på grafen i Maple ved hjælp af 'arrow':

```
display(plot3d(g(x, y), x = 0 ..5, y = -4 ..4, color = yellow, transparency = 0.5 , labels = ["x", "y",
    "z"], labelfont = [arial, bold, 30], axesfont = [arial, bold, 30]), pointplot3d([[-1, 0, -1], [2, 0,
    -4], [2, 2, 0]], view = [0 ..5, -4 ..4, -10 ..10], color = [red, blue, black], symbol = solidsphere,
    symbolsize = 20), arrow(⟨2, 0, -4⟩, ⟨3, 1, -8⟩, difference, color = "Cyan", shape
    = cylindrical_arrow, thickness = 6 , shape = arrow, head_width = [1.0], head_length = [1.0]),
    arrow(⟨2, 0, -4⟩, ⟨1, 1, 0⟩, difference, color = black, shape = cylindrical_arrow, thickness = 6 ,
    shape = arrow, head_width = [1.0], head_length = [1.0]), arrow(⟨2, 0, -4⟩, ⟨2 + √2, 0,
    -9.64⟩, difference, color = red, shape = cylindrical_arrow, thickness = 6 , shape = arrow,
    head_width = [1.0], head_length = [1.0]))
```



Øvelse 5.15

a)

$f(x,y) = x^2 - y^2$, $f_x'(x,y) = 2x$, $f_y'(x,y) = -2y$

b)

$f(x,y) = e^{x+y}$, $f_x'(x,y) = e^{x+y}$, $f_y'(x,y) = e^{x+y}$

c)

ISBN 9788770668781

	$f(x,y)=(x+y)^3+4\ ,\ f_x'(x,y)=3\cdot(x+y)^2\ ,\ f_y'(x,y)=3\cdot(x+y)^2$ d) $f(x,y)=\dfrac{6x}{x^2+y^2+3}\ ,$ $f_x'(x,y)\xrightarrow{brøkregel}\left(6x\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2+3}\right)'\xrightarrow{produktregel}(6x)'\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2+3}+6x\cdot\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+3}\right)'$ $\xrightarrow{sammensat\ diff}6\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2+3}+6x\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2+y^2+3}\right)^2\cdot 2x=\dfrac{6}{x^2+y^2+3}+\dfrac{12x^2}{(x^2+y^2+3)^2}$ Det sidste kunne sættes på fælles brækstreg, men pænt bliver det ikke. $f_y'(x,y)=\xrightarrow{brøkregel}\left(6x\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2+3}\right)'\xrightarrow{konstantfaktor}6x\cdot\left(\dfrac{1}{x^2+y^2+3}\right)'$ $\xrightarrow{sammensat\ diff}6x\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2+y^2+3}\right)^2\cdot 2y=\dfrac{12xy}{(x^2+y^2+3)^2}$
Øvelse 5.16	**a)** $f1(x,y):=\dfrac{10\,x\cdot y}{e^{x^2+y^2}}:$ $\dfrac{\partial}{\partial x}(f1(x,y))=\dfrac{10\,y}{e^{x^2+y^2}}-\dfrac{20}{e^{x^2}}$ $\dfrac{\partial}{\partial y}(f1(x,y))=\dfrac{10\,x}{e^{x^2+y^2}}-\dfrac{20}{e^{x^2}}$ **b)** $f2(x,y):=y\cdot\ln(x^2)+2\,y^2:$ $\dfrac{\partial}{\partial x}(f2(x,y))=\dfrac{2\,y}{x}$ $\dfrac{\partial}{\partial y}(f2(x,y))=\ln(x^2)+4\,y$ **c)** $f3(x,y):=\dfrac{\sin(x)\cdot\sin(y)}{x\cdot y}:$ $\dfrac{\partial}{\partial x}(f3(x,y))=\dfrac{\cos(x)\,\sin(y)}{xy}$ $\dfrac{\partial}{\partial y}(f3(x,y))=\dfrac{\sin(x)\,\cos(y)}{xy}$ **d)** $f4(x,y):=x^3+y+\dfrac{1}{x\cdot y}:$ $\dfrac{\partial}{\partial x}(f4(x,y))=3\,x^2-\dfrac{1}{y\,x^2}$ $\dfrac{\partial}{\partial y}(f4(x,y))=1-\dfrac{1}{y^2\,x}$
Øvelse 5.17	$g(x,y):=\cos(x)+\sin(y):$ $\dfrac{\partial}{\partial x}(g(x,y))=-\sin(x)$ $\dfrac{\partial}{\partial y}(g(x,y))=\cos(y)$ Så gradienten er: $G(x,y):=\langle-\sin(x),\cos(y)\rangle:$ $G(0,5.0)=\begin{bmatrix}0\\0.2836621855\end{bmatrix}$ $G(-1.0,0)\begin{bmatrix}0.8414709848\\1\end{bmatrix}$ $G(4.0,4.0)=\begin{bmatrix}0.7568024953\\-0.6536436209\end{bmatrix}$ $G(1.0,3.0)=\begin{bmatrix}-0.8414709848\\-0.9899924966\end{bmatrix}$
Øvelse 5.18	Facit er i 5.15 og 5.16, hvor de to partielle afledede bestemmes. Stil dem op som koordinater:

ISBN 9788770668781

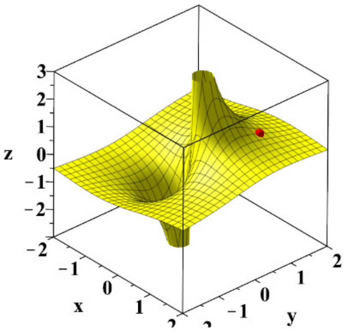
L&R Uddannelse EGMONT

	$\text{Gradient}(f(x,y)) = \nabla(f(x,y)) = \begin{pmatrix} f_x'(x,y) \\ f_y'(x,y) \end{pmatrix}$ Maple kan beregne gradienten således – **husk at indlæse *Student*[*MultivariateCalculus*]!** a) $h1(x,y) := \frac{6x}{x^2+y^2+3}:$ $Gradient(h1(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} \frac{6}{x^2+y^2+3} - \frac{12x^2}{(x^2+y^2+3)^2} \\ -\frac{12xy}{(x^2+y^2+3)^2} \end{bmatrix}$ b) $h2(x,y) := x^3 \cdot y + \frac{1}{x+y}:$ $Gradient(h2(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} 3x^2y - \frac{1}{(x+y)^2} \\ x^3 - \frac{1}{(x+y)^2} \end{bmatrix}$ c) $h3(x,y) := (x+y)^3 + 4:$ $Gradient(h3(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} 3(x+y)^2 \\ 3(x+y)^2 \end{bmatrix}$ d) $h4(x,y) := e^{x+y}:$ $Gradient(h4(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} e^{x+y} \\ e^{x+y} \end{bmatrix}$
Øvelse 5.19	$f(x,y) := \frac{x+y}{x^2+y^2}:$ $g(x,y) := \sqrt{16-2x^2-y^2}:$ a) $Gradient(f(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2(x+y)x}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2(x+y)y}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$ **Gradienten i et punkt kan beregnes med én udregning:** $Gradient(f(x,y),[x,y]=[1,1]) = \left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right]$

ISBN 9788770668781

b)
Ændringen i funktionsværdien er størst i den retninge som gradienten angiver. Størst positiv i den ene retning og størst negativ i den anden retning. For at se, hvilken der er positiv og hvilken negativ må vi tegne grafen

c)
Punktet er: $[1, 1, f(1, 1)] = [1, 1, 1]$
$display(plot3d(f(x, y), x=-2..2, y=-2..2, color=yellow, labels=["x", "y", "z"], labelfont=[arial, bold, 30], axesfont=[arial, bold, 30]), pointplot3d([1, 1, 1], view=[-2..2, -2..2, -3..3], color=red, symbol=solidsphere, symbolsize=25))$



Vi ser af tegningen, at der ud fra punktet er størst positiv stigning i den retning som gradienten peger (som er skråt til venstre, og dermed kommer vi til at gå op af bjerget), og størst negativ i modsatte retning.

d)

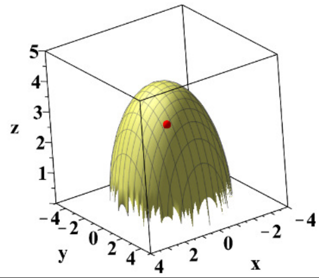
$$Gradient(g(x, y), [x, y]) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2x}{\sqrt{-2x^2 - y^2 + 16}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{-2x^2 - y^2 + 16}} \end{bmatrix}$$

Gradienten i et punkt kan beregnes med én udregning:

$$Gradient(g(x, y), [x, y] = [1.0, 1.0]) = \left[\begin{bmatrix} -0.5547001962 \\ -0.2773500981 \end{bmatrix}\right]$$

e)
Ændringen i funktionsværdien er størst i den retninge som gradienten angiver. Størst positiv i den ene retning og størst negativ i den anden retning. For at se, hvilken der er positiv og hvilken negativ må vi tegne grafen

f)
Punktet er: $[1, 2, g(1, 2.0)] = [1, 2, 3.162277660]$
$display(plot3d(g(x, y), x=-4..4, y=-5..5, color=yellow, labels=["x", "y", "z"], labelfont=[arial, bold, 30], axesfont=[arial, bold, 30], numpoints=10000), pointplot3d([1, 2, 3.162277660], view=[-4..4, -5..5, 0..5], color=red, symbol=solidsphere, symbolsize=25))$



ISBN 9788770668781

Vi ser af tegningen, at der ud fra punktet er størst positiv stigning i den retning som gradienten peger (gradienten peger ind i skærmen, så i den retning går vi op af bjerget), og størst negativ i modsatte retning.

Øvelse 5.20

$g(x,y) := x\cdot y:\quad h(x,y) := x^3 + x\cdot y^2:$

1. Differentiere produktet partielt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(x,y)\cdot h(x,y)) = y\left(x^3 + x\,y^2\right) + x\,y\left(3\,x^2 + y^2\right)$$

2. Udregne formlen fra produktreglen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(x,y))\cdot h(x,y) + g(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(h(x,y)) = y\left(x^3 + x\,y^2\right) + x\,y\left(3\,x^2 + y^2\right)$$

Vi ser det giver samme udtryk

Øvelse 5.21

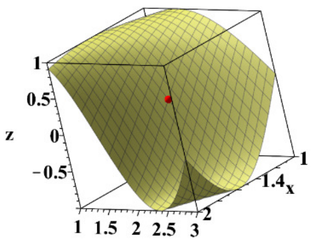
a)

$$Gradient(\sin(x\cdot y), [x, y] = [1.5, 2]) = \left[\left[\begin{matrix} -1.979984993 \\ -1.484988745 \end{matrix}\right]\right]$$

Punkt: $[1.5, 2, \sin(1.5\cdot 2)] = [1.5, 2, 0.1411200081]$

Grafen med punktet afsat:

$display(plot3d(\sin(x\cdot y), x = 1..2, y = 1..3, color = yellow, labels = ["x", "y", "z"], labelfont = [arial, bold, 30], axesfont = [arial, bold, 30], numpoints = 10000), pointplot3d([1.5, 2, 0.1411200081], view = [1..2, 1..3, -1..1], color = red, symbol = solidsphere, symbolsize = 25))$



Gradientens negative koordinater gør, at den peger "bagud", dvs ind i skærmen (siden). I den retning stiger vi op på bjerget. Så det er vejen med størst positiv stigning.

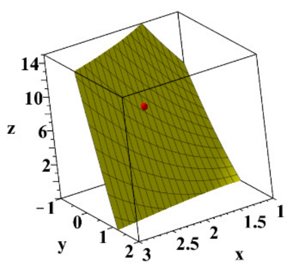
b)

$$Gradient\left(2\,x^2 - 6\,x\cdot y + y^2, [x, y] = [2, 0]\right) = \left[\left[\begin{matrix} 8 \\ -12 \end{matrix}\right]\right]$$

Punkt: $\left[2, 0, 2\,2^2 - 6\cdot 2\cdot 0 + 0^2\right] = [2, 0, 8]$

Grafen med punktet afsat:

$display\left(plot3d\left(2\,x^2 - 6\,x\cdot y + y^2, x = 1..3, y = -1..2, color = yellow, labels = ["x", "y", "z"], labelfont = [arial, bold, 30], axesfont = [arial, bold, 30], numpoints = 10000\right), pointplot3d([2, 0, 8], view = [1..3, -1..2, -2..15], color = red, symbol = solidsphere, symbolsize = 25)\right)$



Gradienten følger retningen diagonalt fra højre mod venstre. I den retning klatrer vi op af væggen, så det er retningen med størst stigning.

ISBN 9788770668781

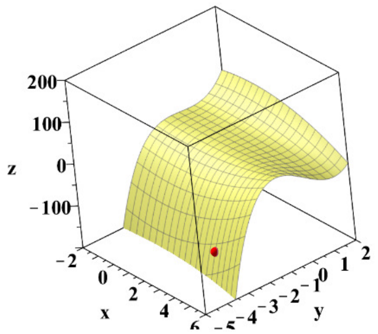
c)

$Gradient\left(-x^2\cdot y+7\,y^3,\ [x,y]=[4,-3]\right)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\173\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

Punkt: $[4,-3,-4^2\cdot(-3)+7\cdot(-3)^3]=[4,\ -3,\ -141]$

Grafen med punktet afsat:

$display\left(plot3d\left(-x^2\cdot y+7\,y^3,\ x=-2..6,\ y=-5..2,\ color=yellow,\ labels=["x","y","z"],\ labelfont=[arial,\ bold,\ 30],\ axesfont=[arial,\ bold,\ 30],\ numpoints=10000\right),\ pointplot3d([4,\ -3,\ -141],\ view=[-2..6,-5..2,-200..200],\ color=red,\ symbol=solidsphere,\ symbolsize=25)\right)$



Gradienten peger i y-aksens retning med en lille drejning mod x-aksens retning. Den største stigning ud fra punktet er altså ikke direkte op af bakken , men med en lille drejning mod højre, i x-aksens retning.

Øvelse 5.22

$p(x,y):=\dfrac{6\,x}{x^2+y^2+2}:$

Punktet: $[0,1,p(0,1)]=[0,1,0]$

a)

Gradienten: $Gradient(p(x,y),\ [x,y]=[0,1])=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$

Tangentligning:

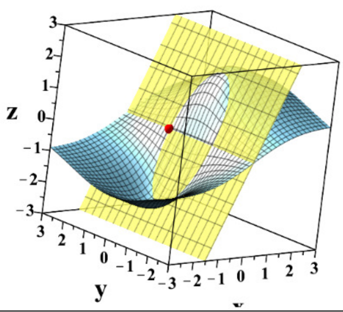
$z=0+2\cdot(x-0)+0\cdot(y-1)$

$$z=2\,x$$

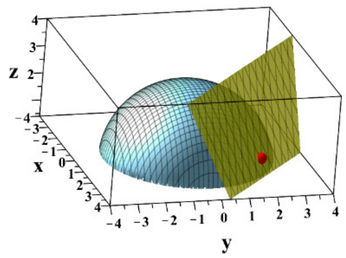
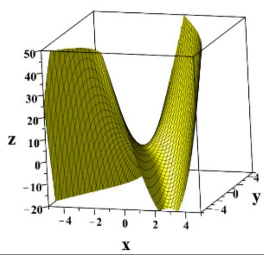
b)

Grafen med punkt og tangent:

$display(plot3d(p(x,y),\ view=[-3..3,-3..3,-3..3],\ axes=box,\ grid=[600,600],\ numpoints=5000,\ scaling=constrained,\ axesfont=[arial,\ bold,\ 20],\ labels=["x","y","z"],\ labelfont=[arial,\ bold,\ 30],\ color="SkyBlue"),\ pointplot3d([0,1,0],\ symbol=solidcircle,\ symbolsize=25,\ color=red),\ plot3d(2\,x,\ color=yellow,\ grid=[300,300],\ transparency=0.2,\ view=[-3..3,-3..3,-3..3]))$



ISBN 9788770668781

Øvelse 5.23	$q(x,y) := \sqrt{9-x^2-y^2}$: Punktet: $[2, 2, q(2,2)] = [2, 2, 1]$ a) De partielt afledede kan udregnes hver for sig: $\frac{\partial}{\partial x}(q(x,y)) = -\frac{x}{\sqrt{-x^2-y^2+9}}$ $\quad \frac{\partial}{\partial y}(q(x,y)) = -\frac{y}{\sqrt{-x^2-y^2+9}}$ hvorefter vi kan indsætte (2,2), og få -2 i begge. Man kan også udregne gradienten: $Gradient(q(x,y), [x,y]=[2,2]) = \left[\left[\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}\right]\right]$ b) Tangentligning: $z = 1 - 2\cdot(x-2) - 2\cdot(y-2)$ $z = 9 - 2x - 2y$ c) Grafen med punkt og tangent: *display*(*plot3d*(*q*(*x*, *y*), *view* = [-4..4, -4..4, 0.4..4], *axes* = *box*, *grid* = [600, 600], *numpoints* = 10000, *scaling* = *constrained*, *axesfont* = [*arial*, *bold*, 20], *labels* = ["x", "y", "z"], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 30], *color* = "SkyBlue"), *pointplot3d*([2, 2, 1], *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 25, *color* = *red*), *plot3d*(9 − 2 *x* − 2 *y*, *color* = *yellow*, *grid* = [300, 300], *transparency* = 0.2, *view* = [-4..4, -4..4, 0.4..4])) 
Øvelse 5.24	$f(x,y) := x^3 + y^2 + 5\,x\cdot y$: *plot3d*(*f*(*x*, *y*), *view* = [-5..5, -5..5, -20..50], *axes* = *box*, *grid* = [400, 400], *numpoints* = 10000, *axesfont* = [*arial*, *bold*, 20], *labels* = ["x", "y", "z"], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 30], *color* = *yellow*) 

ISBN 9788770668781

Der kunne godt se ud til at være et saddelpunkt.
Man kan undersøæge grafen med snitgrafer ved en explore, men man kan også starte med at se på:

$$Gradient(f(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} 3x^2+5y \\ 5x+2y \end{bmatrix}$$

Hvor er begge de partielle afledede 0?

$$solve(\{3x^2+5y=0, 5x+2y=0\}, \{x,y\})$$

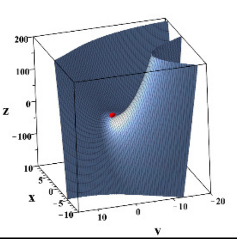
$$\{x=0, y=0\}, \left\{x=\frac{25}{6}, y=-\frac{125}{12}\right\} \qquad (13.1)$$

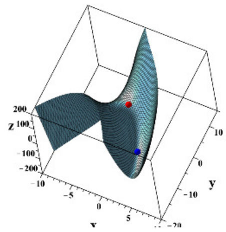
$$evalf\left(\left\{x=\frac{25}{6}, y=-\frac{125}{12}\right\}, 3\right)$$

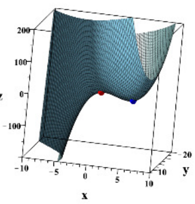
$$\{x=4.17, y=-10.4\} \qquad (13.2)$$

punkterne er: $[0,0,0]$ og $[4.17,-10.4,f(4.17,-10.4)] = [4.17, -10.4, -36.168287]$

Vi indtegner punkterne på grafen og tjekker – grafen er lidt kompliceret at studere, så vi bringer tre billeder fra forskellige vinkler:







Billedet af grafen understøtter vores formodning. Men det er jo ikke et bevis.

Øvelse 5.25

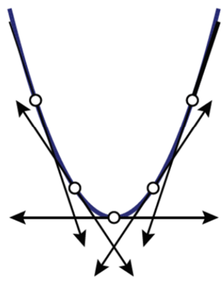
De centrale dele er:

For at give præcise svar, skal vi imidlertid have præcise definitioner.

Definition: Krumning – konvekse og konkave funktioner

En graf siges at *krumme opad*, eller at være *konveks* i et interval [*a*;*b*], hvis grafen ligger over enhver af sine tangenter i pågældende område (bortset fra i selve røringspunktet). Et andet ord for at krumme opad er at være *opad hul*.

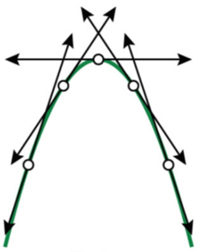
En graf siges at *krumme nedad*, eller at være *konkav* i et interval [*a*;*b*], hvis grafen ligger under enhver af sine tangenter i pågældende område (bortset fra i selve røringspunktet). Et andet ord for at krumme nedad er at være *nedad hul*.



Konveks

ISBN 9788770668781

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

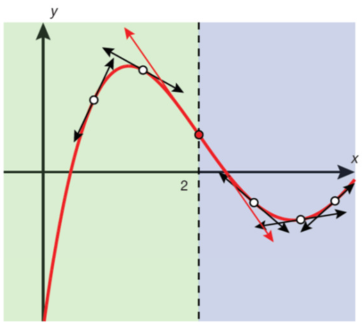


Konkav

Den anden afledede $f''(x)$ af en funktion $f(x)$ er jo den afledede funktion (differentialkvotienten) af $f'(x)$. Vi ved fra monotonisætningen, at hvis den afledede er positiv, så er funktionen voksende. Dvs.:

- Hvis $f''(x)$ er positiv, så er $f'(x)$ voksende
- Hvis $f''(x)$ er negativ, så er $f'(x)$ aftagende

Vi ved yderligere fra maks-min-sætningen, at der, hvor $f'(x)$ har et maksimum eller et minimum, er $f''(x) = 0$. Vi prøver først at skabe et intuitivt billede af, hvad vi har med at gøre. Lad os antage, at vi har differentieret f to gange, at vi har løst ligningen $f''(x) = 0$, og fx fået $x = 2$, og endelig at vi har beregnet nogle værdier, så vi kan tegne en fortegnslinje for $f''(x)$:



Da $f''(x)$ er negativ frem til $x = 2$, er $f'(x)$ aftagende, dvs. hældningskoefficienten for tangenterne bliver mindre og mindre, mens vi bevæger os mod højre. Så i $x = 2$ har vi nået den mindste hældningskoefficient for tangenterne, og efter 2 bliver hældningskoefficienten for tangenterne igen større og større. Men dette må alt i alt betyde, at:

- Frem til $x = 2$ er grafen nedad hul
- I området, hvor x er større end 2, er grafen opad hul
- I $x = 2$ har vi derfor et vendepunkt, og tangenten her er en vendetangent.

Følgende sætning viser, at vores intuitive opfattelse af det grafiske forløb er helt korrekt.

Sætning 29: Krumningsforholdene bestemmes af den dobbelt afledede funktion

Antag, at f er to gange differentiabel i intervallet $[a;b]$. Så gælder:

1. Hvis $f''(x) > 0$ for alle x, så ligger grafen for f helt over tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$, bortset fra i dette fælles punkt.
2. Hvis $f''(x) < 0$ for alle x, så ligger grafen for f helt under tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$, bortset fra i dette fælles punkt.

Sætning 30: Bestemmelse af vendetangenter

Antag, at f er to gange differentiabel i intervallet $[a;b]$, og at der gælder: $f''(a) = 0$ samt $f''(x) > 0$, når $x > a$, og $f''(x) < 0$, når $x < a$ (dvs. fortegnslinjen for $f''(x)$ er: – 0 +). Så gælder følgende: Grafen for f ligger *under* tangenten *i* $(a, f(a))$, når vi befinder os til venstre for a (når $x < a$), og *over* tangenten, når vi befinder os til højre for a (når $x > a$). En sådan tangent kaldes derfor en *vendetangent*.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Øvelse 5.26</td>
<td>De blandede afledede, der blev udregnet i eksemplet s. 267 er ens</td>
</tr>
</table>

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 5.27	a) $f1(x,y) := \frac{6x}{x^2+y^2+3}:$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f1(x,y)) = -\frac{36x}{(x^2+y^2+3)^2} + \frac{48x^3}{(x^2+y^2+3)^3}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f1(x,y)) = \frac{48xy^2}{(x^2+y^2+3)^3} - \frac{12x}{(x^2+y^2+3)^2}$ $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f1(x,y)) = -\frac{12y}{(x^2+y^2+3)^2} + \frac{48x^2y}{(x^2+y^2+3)^3}$ $\quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(f1(x,y)) = -\frac{12y}{(x^2+y^2+3)^2} + \frac{48x^2y}{(x^2+y^2+3)^3}$ b) $f2(x,y) := x^3+y^2+5x\cdot y:$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f2(x,y)) = 6x \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f2(x,y)) = 2$ $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f2(x,y)) = 5 \quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(f2(x,y)) = 5$ c) $f3(x,y) := (x^2+y^2)^2 + 8\cdot x\cdot y:$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f3(x,y)) = 12x^2+4y^2 \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f3(x,y)) = 4x^2+12y^2$ $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f3(x,y)) = 8yx+8 \quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(f3(x,y)) = 8yx+8$

ISBN 9788770668781

Øvelse 5.28

Vi bestemmer for hver funktion først gradienten (dvs de partielle afledede), og undersøger, hvornår de samtidig er 0. Det giver de stationære punkter.
Dernæst undersøges arten heraf med sætning 11 (andenordenskriteriet). Som redskab hertil udregnes de dobbelte og blandede afledede.

a)

$$g1(x, y) := (x^2 + y^2)^2 + 8 \cdot x \cdot y:$$

$$Gradient(g1(x, y), [x, y]) = \begin{bmatrix} 4(x^2+y^2)x + 8y \\ 4(x^2+y^2)y + 8x \end{bmatrix}$$

$$solve(\{4(x^2+y^2)x + 8y = 0, 4(x^2+y^2)y + 8x = 0\}, \{x, y\})$$

$$\{x=0, y=0\}, \{x=-1, y=1\}, \{x=1, y=-1\}, \{x = RootOf(\_Z^2+1), y = RootOf(\_Z^2+1)\} \quad (15.1)$$

Vi kan se, at de sidste ligninger i RootOf ikke har løsninger i reelle tal. Ellers kan vi p.røve at anvende 'allvalues'.
Så der er stationære punkter i: $\{x=0, y=0\}, \{x=-1, y=1\}, \{x=1, y=-1\}$
De stationære punkter er:
$[0, 0, g1(0,0)];\ [-1, 1, g1(-1,1)];\ [1, -1, g1(1,-1)]$

$$[0, 0, 0]$$
$$[-1, 1, -4]$$
$$[1, -1, -4] \quad (15.2)$$

Anden ordens test og de dobbelte og blandede afledede:
Den hurtigste måde at udregne disse på er ved at tage gradienten af de afledede funktioner, og evaluere disse i de stationære punkter:
Punktet (0,0):

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g1(x, y)), [x, y] = [0, 0]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: r=0, s=8}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g1(x, y)), [x, y] = [0, 0]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: s=8, t=0}$$

Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:
$0 \cdot 0 - 8^2 = -64$
Konklusion: punktet (0,0,0) er et saddelpunkt

Punktet (-1,1):

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g1(x, y)), [x, y] = [-1, 1]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: r=16, s=0}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g1(x, y)), [x, y] = [-1, 1]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: s=0, t=16}$$

Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:
$16 \cdot 16 - 0^2 = 256$
Konklusion: Da r > 0 er punktet (-1,1,-4) et minimumspunkt

Punktet (1,-1):

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g1(x, y)), [x, y] = [1, -1]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: r=16, s=0}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g1(x, y)), [x, y] = [1, -1]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: s=0, t=16}$$

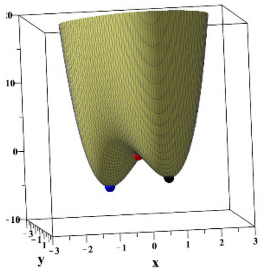
Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:
$16 \cdot 16 - 0^2 = 256$
Konklusion: Da r > 0 er punktet (1,-1,-4) et minimumspunkt

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Grafen med de stationære punkter:

$display(plot3d(g1(x, y), x=-3..3, y=-3..3, axes=box, grid=[400, 400], numpoints=10000, axesfont=[arial, bold, 20], labels=["x", "y", "z"], labelfont=[arial, bold, 30], color=yellow), pointplot3d([[0, 0, 0], [-1, 1, -4], [1, -1, -4]], view=[-3..3, -3..3, -10..20], color=[red, blue, black], symbol=solidsphere, symbolsize=25))$



Det grafiske billede bekræfter beregningsresultatet

b)

$g2(x, y) := x^3 + y^2 + 5\,x\cdot y:$

$$Gradient(g2(x, y), [x, y]) = \begin{bmatrix} 3\,x^2 + 5\,y \\ 5\,x + 2\,y \end{bmatrix}$$

$solve(\{3\,x^2 + 5\,y = 0, 5\,x + 2\,y = 0\}, \{x, y\})$

$$\{x = 0, y = 0\}, \left\{x = \frac{25}{6}, y = -\frac{125}{12}\right\} \qquad \textbf{(15.3)}$$

Så der er stationære punkter i: $\{x = 0, y = 0\}, \left\{x = \frac{25}{6}, y = -\frac{125}{12}\right\}$

eller: $\{x = 0, y = 0\}, evalf\left(\left\{x = \frac{25}{6}, y = -\frac{125}{12}\right\}, 3\right) = \{x = 0, y = 0\}, \{x = 4.17, y = -10.4\}$

De stationære punkter er:

$[0, 0, g2(0, 0)];\ [4.17, -10.4, g2(4.17, -10.4)]$

$$[0, 0, 0]$$

$$[4.17, -10.4, -36.168287] \qquad \textbf{(15.4)}$$

Anden ordens test og de dobbelte og blandede afledede:

Den hurtigste måde at udregne disse på er ved at tage gradienten af de afledede funktioner, og evaluere disse i de stationære punkter:

Punktet (0,0):

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g2(x, y)), [x, y] = [0, 0]\right) = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right], \quad \text{dvs: r=0, s=5}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g2(x, y)), [x, y] = [0, 0]\right) = \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right], \quad \text{dvs: s=5, t=2}$$

Indsæt og udregn $q = r\cdot t - s^2$:

$0\cdot 2 - 5^2 = -25$

Konklusion: punktet (0,0,0) er et saddelpunkt

Punktet $(4.17, -10.4)$**:**

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g2(x, y)), [x, y] = [4.17, -10.4]\right) = \left[\begin{bmatrix} 25.02 \\ 5 \end{bmatrix}\right], \quad \text{dvs: r=25.2, s=5}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g2(x, y)), [x, y] = [4.17, -10.4]\right) = \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right], \quad \text{dvs: s=5, t=2}$$

Indsæt og udregn $q = r\cdot t - s^2$:

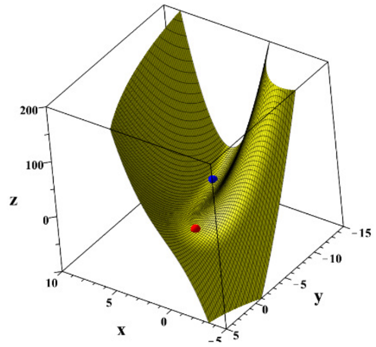
$25.2\cdot 2 - 5^2 = 25.4$

Konklusion: Da r > 0 er punktet $(4.17, -10.4, -36.168287)$ et m**inimumspunkt**

ISBN 9788770668781

Grafen med de stationære punkter:

display(*plot3d*(*g2*(*x*, *y*), *x* = −5 ..10, *y* = −15 ..5, *axes* = *box*, *grid* = [400, 400], *numpoints* = 10000, *axesfont* = [*arial*, *bold*, 20], *labels* = ["x", "y", "z"], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 30], *color* = *yellow*), *pointplot3d*([[0, 0, 0], [4.17, −10.4, −36.168287]], *view* = [−5 ..10, −15 ..5, −100 ..200], *color* = [*red*, *blue*], *symbol* = *solidsphere*, *symbolsize* = 25))



Det grafiske billede bekræfter beregningsresultatet. Se også øvelse 5.24

c)

$$g3(x,y) := \frac{10\,x\cdot y}{e^{x^2+y^2}} :$$

$$Gradient(g3(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} \frac{10\,y}{e^{x^2+y^2}} - \frac{20\,y\,x^2}{e^{x^2+y^2}} \\ \frac{10\,x}{e^{x^2+y^2}} - \frac{20\,y^2\,x}{e^{x^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

$$solve\left(\left\{\frac{10\,y}{e^{x^2+y^2}} - \frac{20\,y\,x^2}{e^{x^2+y^2}} = 0, \frac{10\,x}{e^{x^2+y^2}} - \frac{20\,y^2\,x}{e^{x^2+y^2}} = 0\right\}, \{x,y\}\right)$$

$$\{x=0, y=0\}, \{x = RootOf(2\_Z^2-1, label=\_L3), y = RootOf(2\_Z^2-1, label=\_L4)\} \qquad \textbf{(15.5)}$$

$$\xrightarrow{\text{all values}}$$

$$\left\{\{x=0,y=0\}, \left\{x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right\}, \left\{\{x=0,y=0\}, \left\{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right\}, \left\{\{x=0,y=0\}, \left\{x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right\}, \left\{\{x=0,y=0\}, \left\{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right\} \qquad \textbf{(15.6)}$$

Så der er stationære punkter i:

$$\{x=0,y=0\}, \left\{x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

De stationære punkter er:

$$[0,0,g3(0,0)];\ \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, g3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right];\ \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, g3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right];\ \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, g3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right];\ \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, g3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$[0,0,0]$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right]$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right]$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right]$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right] \qquad \textbf{(15.7)}$$

ISBN 9788770668781

Anden ordens test og de dobbelte og blandede afledede:
Den hurtigste måde at udregne disse på er ved at tage gradienten af de afledede funktioner, og evaluere disse i de stationære punkter:

Punktet (0,0,0):

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g3(x,y)),\ [x,y]=[0,0]\right) = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: r=0, s=10}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g3(x,y)),\ [x,y]=[0,0]\right) = \left[\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: s=10, t=0}$$

Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:

$0 \cdot 0 - 10^2 = -100$

Konklusion: punktet (0,0,0) er et saddelpunkt (sort)

Punktet $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right]$**:**

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g3(x,y)),\ [x,y]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\begin{bmatrix} -\frac{20}{e} \\ 0 \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: r=}-\frac{20}{e}\text{, s=0}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g3(x,y)),\ [x,y]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{20}{e} \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: s=0, t=}-\frac{20}{e}$$

Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:

$$-\frac{20}{e} \cdot \left(-\frac{20}{e}\right) - 0^2 = \frac{400}{(e)^2}$$

Konklusion: Da r < 0 er punktet $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right]$ **et maximumspunkt (blå)**

Punktet $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right]$**:**

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g3(x,y)),\ [x,y]=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\begin{bmatrix} \frac{20}{e} \\ 0 \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: r=}\frac{20}{e}\text{, s=0}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g3(x,y)),\ [x,y]=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{20}{e} \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: s=0, t=}\frac{20}{e}$$

Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:

$$\frac{20}{e} \cdot \left(\frac{20}{e}\right) - 0^2 = \frac{400}{(e)^2}$$

Konklusion: Da r > 0 er punktet $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right]$ **et minimumspunkt (rød)**

Punktet $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right]$**:**

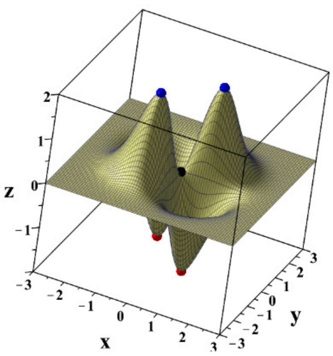
$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g3(x,y)),\ [x,y]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\begin{bmatrix} \frac{20}{e} \\ 0 \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: r=}\frac{20}{e}\text{, s=0}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g3(x,y)),\ [x,y]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{20}{e} \end{bmatrix}\right],\quad \text{dvs: s=0, t=}\frac{20}{e}$$

Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:

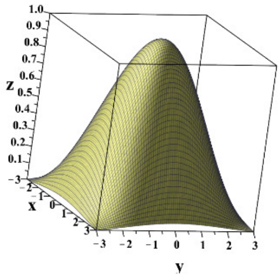
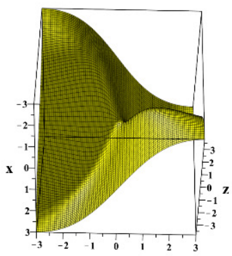
$$\frac{20}{e} \cdot \left(\frac{20}{e}\right) - 0^2 = \frac{400}{(e)^2}$$

Konklusion: Da r > 0 er punktet $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right]$ **et minimumspunkt (rød)**

	Punktet $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right]$**:** $Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(g3(x,y)), [x,y] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\left[\begin{matrix}-\frac{20}{e}\\ 0\end{matrix}\right]\right]$, dvs: $r=-\frac{20}{e}$, s=0 $Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}(g3(x,y)), [x,y] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left[\left[\begin{matrix}0\\ -\frac{20}{e}\end{matrix}\right]\right]$, dvs: s=0, $t=-\frac{20}{e}$ Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$: $-\frac{20}{e} \cdot \left(-\frac{20}{e}\right) - 0^2 = \frac{400}{(e)^2}$ **Konklusion: Da r < 0 er punktet** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right]$ **et maximumspunkt (blå)** **Grafen med de stationære punkter**: $display\left(plot3d(g3(x,y), x=-3..3, y=-3..3, axes=box, grid=[400,400], numpoints=10000, axesfont=[arial, bold, 20], labels=["x","y","z"], labelfont=[arial, bold, 30], color=yellow), pointplot3d\left(\left[[0,0,0], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5}{e}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{e}\right]\right], view=[-3..3, -3..3, -2..2], color=[black, blue, red, red, blue], symbol=solidsphere, symbolsize=25\right)\right)$  **Det grafiske billede bekræfter beregningsresultatet**

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

	d) $g4(x,y) := \frac{\sin(x)\cdot\sin(y)}{x\cdot y}:$ $Gradient(g4(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(x)\sin(y)}{y\,x} - \frac{\sin(x)\sin(y)}{y\,x^2} \\ \frac{\sin(x)\cos(y)}{y\,x} - \frac{\sin(x)\sin(y)}{y^2\,x} \end{bmatrix}$ $solve\left(\left\{\frac{\cos(x)\sin(y)}{y\,x} - \frac{\sin(x)\sin(y)}{y\,x^2} = 0, \frac{\sin(x)\cos(y)}{y\,x} - \frac{\sin(x)\sin(y)}{y^2\,x} = 0\right\}, \{x,y\}\right)$ $\{x = RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z), y = RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z)\}$ **(15.8)** $\xrightarrow{\text{all values}}$ $\{x = RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z, -4.493409458), y = RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z, -4.493409458)\}, \{x = RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z, 4.493409458), y = RootOf(-\tan(\_Z) + \_Z, 4.493409458)\}, \{x = 0, y = 0\}$ **(15.9)** Ligningen $\tan(x) = x$ har ingen løsninger i tangensfunktionens første interval $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ (bortset fra i 0, men det er forbudt område her). Det er let at se ud fra grafen: tan(x) vokser hurtigere end x, så linjen y=x vil ikke skære grafen. Men den skærer i de næste intervaller, fx i $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$. Det er her vi finder løsningen 4,4934: Kontroller ved at udregne: $\tan(4.493409458) = 4.493409460$ Vi vil her begrænse os til standardintervallerne som definitionsmængde: Både x og y er i $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ fraregnet 0. **Så der er ingen stationære punkter** **Grafen** $plot3d(g4(x,y), x=-3..3, y=-3..3, axes=box, grid=[400,400], axesfont=[arial, bold, 20], labels=["x","y","z"], labelfont=[arial, bold, 30], color=yellow)$  Her bliver man let snydt, ved kun at se på grafen, for der ser klart ud til at være et maksimum. Men det er i (0,0), og g4 er ikke defineret her! Det er i ét punkt, så man vil ikke kunne se det på grafen uanset indzoomning.
Øvelse 5.29	$h1(x,y) := \frac{8\,x\cdot y}{x^2+y^2+1}:$ Her er ingen problemer med definitionsmængden. a) Grafen: $plot3d(h1(x,y), x=-3..3, y=-3..3, axes=box, grid=[400,400], axesfont=[arial, bold, 20], labels=["x","y","z"], labelfont=[arial, bold, 30], color=yellow)$ 

ISBN 9788770668781

b)
Stationære punkter bestemmes lettest ved at beregne gradienten:

$$Gradient(h1(x,y),[x,y]) = \begin{bmatrix} \frac{8y}{x^2+y^2+1} - \frac{16x^2y}{(x^2+y^2+1)^2} \\ \frac{8x}{x^2+y^2+1} - \frac{16xy^2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{bmatrix}$$

og løse ligningssystemet:

$$solve\left(\left\{\frac{8y}{x^2+y^2+1} - \frac{16x^2y}{(x^2+y^2+1)^2} = 0, \frac{8x}{x^2+y^2+1} - \frac{16xy^2}{(x^2+y^2+1)^2} = 0\right\}, \{x,y\}\right)$$

$$\{x=0, y=0\} \qquad \textbf{(16.1)}$$

Som grafen også illustrerer er der ét stationært punkt, og det må være et saddelpunkt:

c) **Vi beregner de anden ordens afledede til brug for 2.ordenstestet:**
Punktet $[0, 0, h1(0,0)] = [0, 0, 0]$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial x}(h1(x,y)), [x,y]=[0,0]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: r=0, s=8}$$

$$Gradient\left(\frac{\partial}{\partial y}h1(x,y), [x,y]=[0,0]\right) = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad \text{dvs: s=8, t=0}$$

Indsæt og udregn $q = r \cdot t - s^2$:
$0 \cdot 0 - 8^2 = -64$
Konklusion: Punktet $[0, 0, 0]$ **er et saddelpunkt.**

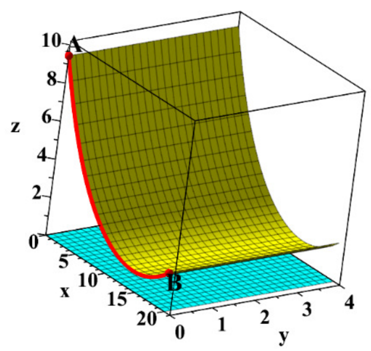
Øvelse 5.30

$$h2(x,y) := 2 \cdot e^{\frac{x}{8} - \frac{9}{5}} + 2 \cdot e^{-\frac{x}{8} + \frac{9}{5}} - 3 :$$

Definitionsmængden: $0 \le x \le 20 \quad 0 \le y \le 4$
Punktet A og punkt B er givet ved:
$A(0, 0, h2(0,0))$ og $B(20, 0, h2(20,0))$

Tegning af vandrutsjebanen:

```
display(plot3d([s, t, h2(s, t)], s=0..20, t=0..4, axesfont=[arial, bold, 25], labels=["x", "y",
    "z"], labelfont=[arial, bold, 25], color=yellow, axes=box), plot3d([[s, t, 0]], s=0..20, t=0
    ..4, axesfont=[arial, bold, 25], labels=["x", "y", "z"], labelfont=[arial, bold, 25], color
    ="Cyan"), pointplot3d([[0, 0, h2(0, 0)], [20, 0, h2(20, 0)]], symbol=solidcircle, symbolsize
    =20, color=red), textplot3d([[0.5, 0, 10.2, "A"], [21, 0, 1.8, "B"]], 'font'=[arial, bold, 30]),
    spacecurve([t, 0, h2(t, 0), t=0..20], thickness=6, color=red))
```



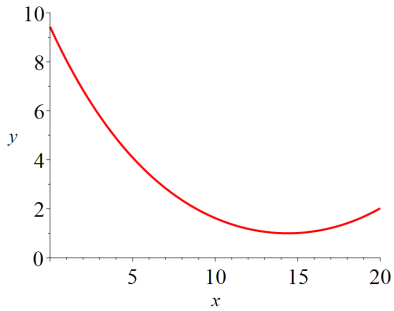
a)
Højden over xy-planet i punktet A:
$evalf(h2(0,0),4) = 9.43$

b)
Den røde kurve kan indtegnes i et almindeligt koordinatsystem. Funktionen er:

$$h2(x,0) = 2e^{\frac{x}{8} - \frac{9}{5}} + 2e^{-\frac{x}{8} + \frac{9}{5}} - 3$$

$plot(h2(x,0), x=0..20, y=0..10, thickness=4, color=red)$

ISBN 9788770668781



Punktet med kortest afstand er minimum:

$$\left(2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{8}-\frac{9}{5}}+2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{8}+\frac{9}{5}}-3\right)' = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{8}-\frac{9}{5}}}{4}-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{8}+\frac{9}{5}}}{4}$$

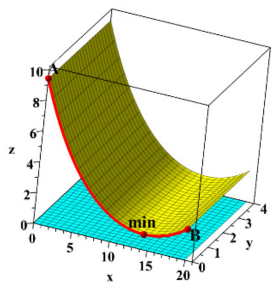
$$x = evalf\left(solve\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{8}-\frac{9}{5}}}{4}-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{8}+\frac{9}{5}}}{4}=0, x\right), 4\right)$$

$$x = 14.40$$

Punktet på den røde kant er så:

$[14.40, 0, h2(14.40, 0)] = [14.40, 0, 1.]$

display(*plot3d*([*s*, *t*, *h2*(*s*, *t*)], *s* = 0 ..20, *t* = 0 ..4, *axesfont* = [*arial*, *bold*, 25], *labels* = ["x", "y", "z"], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 25], *color* = *yellow*, *axes* = *box*), *plot3d*([[*s*, *t*, 0]], *s* = 0 ..20, *t* = 0 ..4, *axesfont* = [*arial*, *bold*, 25], *labels* = ["x", "y", "z"], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 25], *color* = "Cyan"), *pointplot3d*([[0, 0, *h2*(0, 0)], [20, 0, *h2*(20, 0)], [14.40, 0, 1.]], *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 20, *color* = *red*), *textplot3d*([[0.5, 0, 10.2, "A"], [21, 0, 1.8, "B"], [14.0, 0, 1.8, "min"]], '*font*' = [*arial*, *bold*, 30]), *spacecurve*([*t*, 0, *h2*(*t*, 0), *t* = 0 ..20], *thickness* = 6, *color* = *red*))



c)

Længden af kanten er længden af grafen tegnet ovenfor :

Anvend formlen i kapitel 2, afsnit 3, sidev 121 - eller den samme formel, skrevet i kapitel 7, afsnit 3, sætning 6, side 328:

Vi har ovenfor fundet funktionens differentialkvotient, så vi indsætter:

$$evalf\left(Int\left(\sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{8}-\frac{9}{5}}}{4}-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{8}+\frac{9}{5}}}{4}\right)^2+1}, x = 0 ..20\right), 4\right) = 23.14$$

som er længden af kanten