ISBN 9788770668781

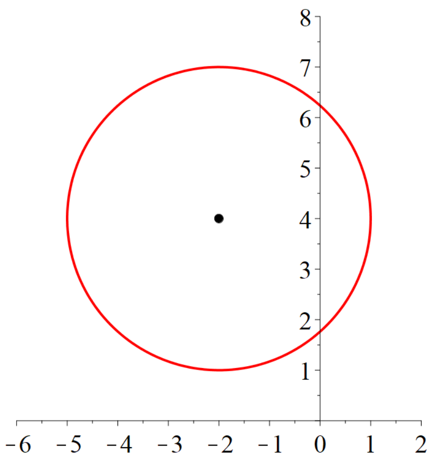
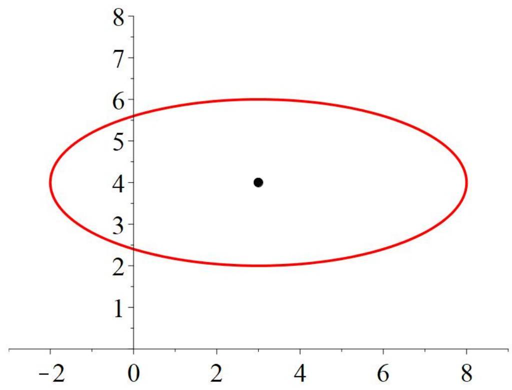
L&R Uddannelse EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 4

Øvelse 4.1	Svaret ligger på website
Øvelse 4.2	a) Længden er 1. Hastighedsvektorens retning er som tværvektoren til $\vec{r}(s)$, dvs. vinkelret på stedvektor. b) Ved sammensat differentiation får vi: $\vec{r}''(s)=\left(\vec{r}'(t)\right)'=\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{s}{R}\right)\\ \cos\left(\frac{s}{R}\right)\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{R}\cdot\cos\left(\frac{s}{R}\right)\\ -\frac{1}{R}\cdot\sin\left(\frac{s}{R}\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{R}\cdot\begin{pmatrix}-\cos\left(\frac{s}{R}\right)\\ -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{R}\cdot\begin{pmatrix}-\cos(\theta)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix}$ c) Vektoren har længde 1 og er modsat rettet stedvektoren
Øvelse 4.3	En klotoide er defineret som en kurve, hvis krumning vokser gradvist (jævnt) fra 0 til en cirkelkrumning. a) Ifølge linjerne lige over øvelsen er krumningen givet ved $\kappa=\frac{d\theta}{ds}$. Hvis krumningen skal vokse gradvist op fra 0, må den have formen $\kappa=k\cdot s$, hvor k er en (proportionalitets-)konstant. Kombinerer vi de to får vi $\frac{d\theta}{ds}=k\cdot s$. b) Ved at integrere formlen får vi: $\theta(s)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2+\text{konstant}$. (*) θ er vinklen, tangenten danner med 1. aksen. Når vi ikke har bevæget os ud af start er $s=0$, og her er også vinklen 0, så $\theta(0)=0$. Indsæt dette i (*), så ser vi konstanten er 0, dvs.: $\theta(s)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2$ c) Farten er det stykke vi bevæger os pr. tidsenhed. Hvis stykket vi bevæger os, s anvendes som målestok for tiden, så er stykket vi bevæger os når kurvelængden er 1, netop lig med 1. d) Enhedsvektoren $\vec{e}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ er en vektor langs tangenten. Ved at udnytte b) ser vi: $\vec{e}(s)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\\ \sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\end{pmatrix}$ Hastighedsvektoren $\vec{r}'(s)$ er også en vektor langs tangenten, og c) giver at det er en enhedsvektor, altså må der gælde: $\vec{r}'(s)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\\ \sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\end{pmatrix}$ e) Ved at integrere den sidste ligning får vi: $\vec{r}(s)=\begin{pmatrix}\int_0^s\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot t^2)dt\\ \int_0^s\sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot t^2)dt\end{pmatrix}$ Dernæst foretages en substitution: $k\cdot t^2$ erstattes af $\pi\cdot u^2$

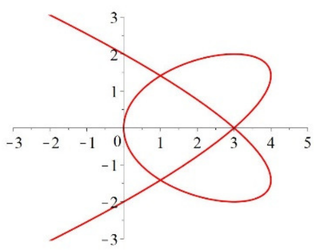
	dvs. $t=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot u$, så $dt=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot du$. Og grænserne: $t=0 \Rightarrow u=0$ og $t=s \Rightarrow u=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\cdot s$: $\vec{r}(s)=\begin{pmatrix}\int_0^s \cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot t^2)dt\\ \int_0^s \sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot t^2)dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{k}{\pi}}\cdot s}\cos(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot u^2)du\\ \sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{k}{\pi}}\cdot s}\sin(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot u^2)du\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot\begin{pmatrix}\int_0^{\sqrt{\frac{k}{\pi}}\cdot s}\cos(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot u^2)du\\ \int_0^{\sqrt{\frac{k}{\pi}}\cdot s}\sin(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot u^2)du\end{pmatrix}$
(**)	a) Vi har $\vec{r}'(s)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\\ \sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\end{pmatrix}$ Heraf: $\vec{r}''(s)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\\ \sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\end{pmatrix}'=k\cdot s\cdot\begin{pmatrix}-\sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\\ \cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\end{pmatrix}=k\cdot s\cdot\hat{\vec{r}}'(s)$ (*) b) Ser definitionen s. 216: Krumningen er tallet κ i $\frac{d\vec{e}}{ds}=\kappa\cdot\hat{\vec{e}}$. (**) $\vec{e}$ svarer til $\vec{r}'(s)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\\ \sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\end{pmatrix}$, $\vec{r}''(s)$ svarer derfor til $\frac{d\vec{e}}{ds}$, så (*) og (**) giver: $\kappa=k\cdot s$
Øvelse 4.5	a) Gør det selv, og undersøg samtidig, om Fresnel-funktionerne ikke findes som standard. b) Den *naturlige logaritmefunktion* er defineret som et integral, se øvelse 2.55 s. 123. *Sinusfunktionen* er defineret som den omvendte til arcussinus, der er defineret som et integral. Se s. 332. *Fordelingsfunktionen for en normalfordeling er en kumulering af tæthedsfunktionen, dvs. et integral.* *Gammafunktionen,* der er behandlet i projekt 2.8, der er en generalisering af fakultetsfunktionen, er defineret som et integral. χ^2 *-fordelingen*, der også er behandlet i projekt 2.8 og projekt 8.17, er defineret ud fra gammafunktionen
Øvelse 4.6	a) Banekurven for $\vec{r}'(s)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\\ \sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)\end{pmatrix}$ har vandret tangent, når $\sin(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)=0$, lodret tangent, når $\cos(\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2)=0$, dvs. Når $s=0$, er der vandret tangent Når $\frac{1}{2}\cdot k\cdot s^2=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow s=\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ er der lodret tangent b) Højden er afstanden fra 1. aksen og op til punktet, hvor der er lodret tangent. Vi indsætter den fundne *s*-værdi i klotoideformlens y-koordinat: $\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot\text{FresnelS}\left(s\cdot\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right)$: $\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot\text{FresnelS}\left(\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\cdot\text{FresnelS}(1)=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\text{FresnelS}(1)}{\sqrt{k}}=\frac{0.77682}{\sqrt{k}}$ *Bemærk: I bogens tekst står der tallet 0.438259 i tælleren, men dette tal er alene FresnelS(1), dvs.* $\sqrt{\pi}$ *er ikke blevet ganget på.* b) Hvis radius i cirklen, som klotoiden går over i, er *R*, så er *krumningen af cirklen* $\frac{1}{R}$.

ISBN 9788770668781

	Krumningen af klotoiden i dette punkt er $\kappa = k \cdot s = k \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k}} = \sqrt{k \cdot \pi}$, så: $\frac{1}{R} = \sqrt{k \cdot \pi} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{k \cdot \pi}}$	
Øvelse 4.7	a) og b) Fokuser på de lige vejstrækninger der er farvet røde og kløverbladet der er sort: Da vi kører i højre side af vejen kommer vi ind fra højre ad den røde vejstrækning – på grafen er krumningen her 0. Vi kører herefter ind i det kløverblad, der ligger i 2. kvadrant. Her kører vi først ad en klotoide, hvor krumningen vokser jævnt op fra 0. Det er den rette linje, der har negativ hældning. Da vi drejer mod koordinatsystemets retning er krumningen negativ. Da vi når lodret tangent kører vi over i en cirkelbue, der har konstant krumning. Det er det sorte vandrette linjestykke på grafen. Da vi når op til vandret tangent ophører cirkelbuen og går over i en klotoidebue, hvor krumningen falder jævnt ned mod 0. Det er den rette linje med positiv hældning på grafen. Da vi når den krydsende motorvej er krumningen kommet ned på 0, og vi fortsætter ad den rette røde linje. På grafen er vi tilbage på 1 aksen.	
Øvelse 4.8	Svaret ligger på website	
Øvelse 4.9	Svaret ligger på website	
Øvelse 4.10	a) Retningsvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i parameterfremstillingen viser, at når *t* vokser, så bliver *x*-værdierne mindre og *y*-værdierne større. Så linjen gennemløbes skråt op gennem 2. kvadrant. b) Ved at vælge den modsatte vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bliver gennemløbet modsat, skråt ned gennem 4. kvadrant. Ved at gange en tal på kan vi øge farten: $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, eller sænke farten: $\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$	
Øvelse 4.11	1) 	2) 
Øvelse 4.12	Maple giver:	

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

	Definer: $r(t) := \left\langle 9-t^2, \frac{1}{4}\cdot t^3 - 4t \right\rangle :$ Vi kontrolerer: $r(t) = \begin{bmatrix} -t^2+9 \\ \frac{1}{4}t^3 - 4t \end{bmatrix}$ Skæring med 2. aksen: $t = solve(r(t)[1]=0)$ $t = (-3, 3)$ **(9.1)** $r(-3); r(3)$ $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{21}{4} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{21}{4} \end{bmatrix}$ **(9.2)** Skæring med 1. aksen: $t = solve(r(t)[2]=0)$ $t = (0, 4, -4)$ **(9.3)** $r(0); r(-4); r(4)$ $\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(9.4)** Naturligvis de samme som ved håndregning
Øvelse 4.13	Definer: $s(t) := \langle 4t^2 - t^4, t^3 - 3t \rangle :$ Vi kontrollerer: $s(t) = \begin{bmatrix} -t^4 + 4t^2 \\ t^3 - 3t \end{bmatrix}$ **a)** banekurve: $plot([4t^2 - t^4, t^3 - 3t, t=-3..3], view=[-3..5, -3..3], thickness=4, color=red, scaling=constrained, size=[800, 800])$  **b)**

ISBN 9788770668781

Skæring med 2. aksen:

$t = solve(s(t)[1] = 0)$

$$t = (0, 0, 2, -2) \qquad \textbf{(10.1)}$$

$s(0); s(-2); s(2)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(10.2)}$$

Skæring med 1. aksen:

$t = solve(s(t)[2] = 0)$

$$t = \left(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right) \qquad \textbf{(10.3)}$$

$s(0); s\left(-\sqrt{3}\right); s\left(\sqrt{3}\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(10.4)}$$

Grafen og skæringspunkterne fortæller begge, at der er et dobbeltpunkt i (3,0)

Øvelse 4.14

Definer:

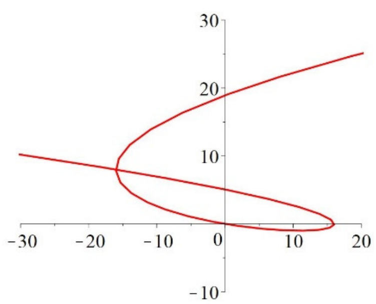
$r(t) := \langle t^3 - 12\,t, t^2 + 2\,t \rangle :$

Vi kontrollerer: $r(t) = \begin{bmatrix} t^3 - 12\,t \\ t^2 + 2\,t \end{bmatrix}$

a)

banekurve:

$plot\left(\left[t^3 - 12\,t, t^2 + 2\,t, t = -30..30\right], view = [-30..20, -10..30], thickness = 4, color = red, scaling = constrained, size = [800, 800]\right)$



Grafen viser, der er et dobbeltpunkt

ISBN 9788770668781

b)
Skæring med 2. aksen:
$t = solve(r(t)[1] = 0)$

$$t = \left(0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right) \quad \textbf{(6.1)}$$

$r(0); r(-2\sqrt{3}); r(2\sqrt{3})$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 12 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 12 + 4\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.2)}$$

Skæring med 1. aksen:
$t = solve(r(t)[2] = 0)$

$$t = (-2, 0) \quad \textbf{(6.3)}$$

$r(0); r(-2)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.4)}$$

c)
Dobbeltpunkt:
Kald de to parameterværdier i dobbeltpunktet for u og v:
$solve(\{u^3 - 12u = v^3 - 12v, u^2 + 2u = v^2 + 2v\})$

$$\{u = v, v = v\}, \{u = 2, v = -4\}, \{u = -4, v = 2\} \quad \textbf{(6.5)}$$

Den første er triviel, løsning nr 2 og 3 er de samme, blot byttet om på u og v. Så:
Der er dobbeltpunkt i:
$r(2); r(-4)$

$$\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.6)}$$

Kontrollen viser det er korrekt

Øvelse 4.15

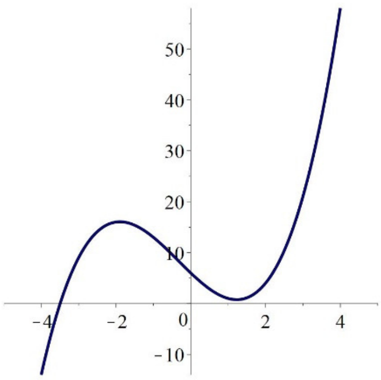
$h(x) := x^3 + x^2 - 7x + 6$

$$h := x \mapsto x^3 + x^2 - 7x + 6 \quad \textbf{(7.1)}$$

$s(x) := \langle x, h(x) \rangle$

$$s := x \mapsto \langle x, h(x) \rangle \quad \textbf{(7.2)}$$

$display(plot([x, h(x), x = -4..4], view = [-5..5, -10..30], thickness = 6, color = black, size = [800, 800]), plot(h(x), x = -4..4, thickness = 2, color = blue, size = [800, 800]))$

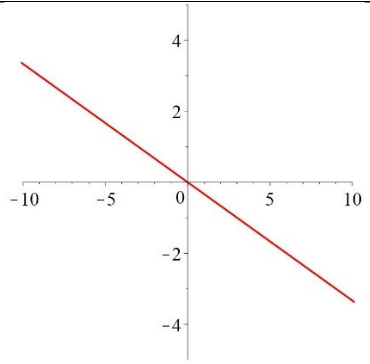
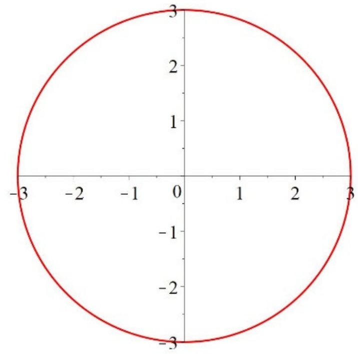
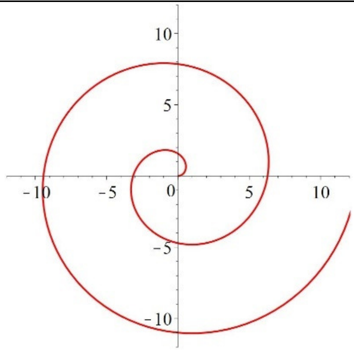
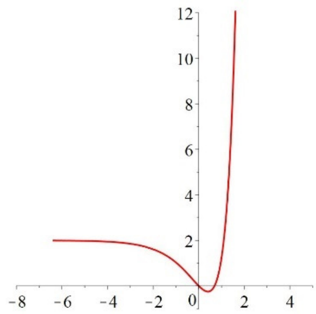


De to grafer er tegnet med blåt og sort, og er ikke til at skelne fra hinanden.

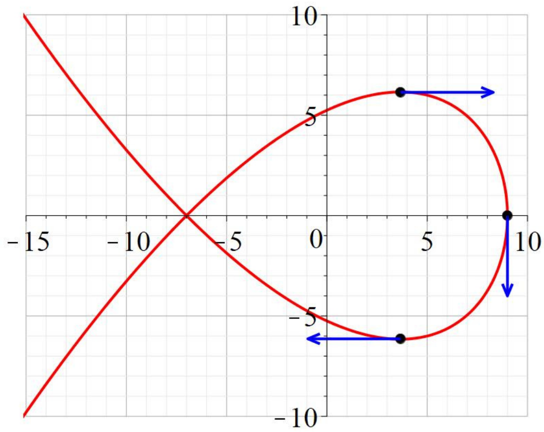
Øvelse 4.16
Svaret ligger på website

Øvelse 4.17 a) afledte	1) $\begin{pmatrix} 3t \\ -t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	2) $\begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix}$

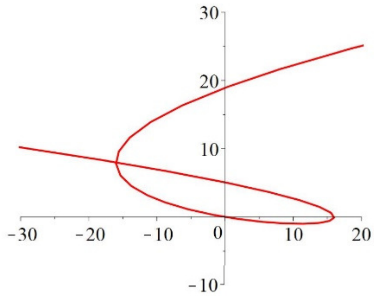
ISBN 9788770668781

	3) $\begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos(t)-t\cdot\sin(t) \\ \sin(t)+t\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$	4) $\begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^2-3t+2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2t-3 \end{pmatrix}$
b)banekurver	 1)	 2)
	 3)	 4)
c) afledte og banekurven	1) Afledte er en konstant, retningsvektoren for linjen 2) Afledte er tværvektor til stedvektor: Tangent til cirklen i ethvert punkt. 3) Afledte er sum af tværvektor til retningsvektor, og retningsvektor til enhedscirklen 4) Afledtes 1. koordinat går mod 0, mens 2. koordinaten vokser lineært op. Den nærmer sig en lodret position.	
Øvelse 4.18	Parameterfremstilling for tangent i $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (\ln(t_0), t_0{}^2 - 3t_0 + 2)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(t_0) \\ t_0{}^2-3t_0+2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{t_0} \\ 2t_0-3 \end{pmatrix}$	
Øvelse 4.19	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 9-t^2 \\ \frac{1}{4}t^3-4t \end{pmatrix}$, $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 9-t^2 \\ \frac{1}{4}t^3-4t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2t \\ \frac{3}{4}t^2-4 \end{pmatrix}$ a) **Lodret tangent**: $-2t=0 \Leftrightarrow t=0$, punkt: $P_0=(9,0)$, tangentvektor: $\vec{r}'(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ **vandrette tangenter**: $\frac{3}{4}t^2-4=0 \Leftrightarrow t=\frac{-4}{\sqrt{3}} \vee t=\frac{4}{\sqrt{3}}$, punkter: $P_{-4/\sqrt{3}}=(3.67, 6.14)$ $P_{4/\sqrt{3}}=(3.67, -6.14)$ tangentvektorer: $\vec{r}'\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}\right)=\begin{pmatrix} 4.62 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}'\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\begin{pmatrix} -4.62 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) Banekurve med punkter og tangentvektorer, tegnet i Maple:	

ISBN 9788770668781

	display(*plot*($[9-t^2, 0.25\,t^3-4\,t, t=-5..5]$, *view* = [−15..10, −10..10], *thickness* = 4, *color* = *red*, *scaling* = *constrained*, *size* = [1000, 1000]), *pointplot*([[9, 0], [3.67, 6.14], [3.67, −6.14]], *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 15, *color* = *black*), *arrow*(⟨9, 0⟩, ⟨9, −4⟩, *difference*, *color* = *blue*, *shape* = *arrow*, *thickness* = 4, *head_length* = 0.6, *head_width* = 0.5, *size* = [800, 800], *gridlines*), *arrow*(⟨3.67, 6.14⟩, ⟨8.29, 6.14⟩, *difference*, *color* = *blue*, *shape* = *arrow*, *thickness* = 4, *head_length* = 0.6, *head_width* = 0.5, *size* = [800, 800], *gridlines*), *arrow*(⟨3.67, −6.14⟩, ⟨−0.95, −6.14⟩, *difference*, *color* = *blue*, *shape* = *arrow*, *thickness* = 4, *head_length* = 0.6, *head_width* = 0.5, *size* = [800, 800], *gridlines*)) 
Øvelse 4.20	a) Vi har i eksemplet udregnet retningsvektoren, så vi indsætter bare: $l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) normalvektor til l_2 er $\widehat{\vec{s}'(2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$, så en ligning bliver: $-8\cdot(x-1)+4\cdot(y-0)=0$, eller: $-8\cdot x+4\cdot y-8=0$ (der kan reduceres til: $-2\cdot x+y-2=0$
Øvelse 4.21	a) Vi vender tilbage til øvelse 4.14: (*opgavenumre er derfra*) Definer: $r(t) := \langle t^3-12\,t, t^2+2\,t \rangle$: Vi kontrollerer: $r(t) = \begin{bmatrix} t^3-12\,t \\ t^2+2\,t \end{bmatrix}$ **a)** banekurve: *plot*($[t^3-12\,t, t^2+2\,t, t=-30..30]$, *view* = [−30..20, −10..30], *thickness* = 4, *color* = *red*, *scaling* = *constrained*, *size* = [800, 800])

L&R Uddannelse EGMONT



Grafen viser, der er et dobbeltpunkt

c)
Dobbeltpunkt:
Kald de to parameterværdier i dobbeltpunktet for u og v:

$solve(\{u^3 - 12\,u = v^3 - 12\,v,\ u^2 + 2\,u = v^2 + 2\,v\})$

$$\{u = v,\ v = v\},\ \{u = 2,\ v = -4\},\ \{u = -4,\ v = 2\} \qquad \textbf{(6.5)}$$

Den første er triviel, løsning nr 2 og 3 er de samme, blot byttet om på u og v. Så:
Der er dobbeltpunkt i:
$r(2);\ r(-4)$

$$\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.6)}$$

Kontrollen viser det er korrekt

b)

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 12 \\ 2t + 2 \end{pmatrix}$, så: $\vec{r}'(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{r}'(-4) = \begin{pmatrix} 36 \\ -6 \end{pmatrix}$

Vinklen findes med værktøj: 99,46°

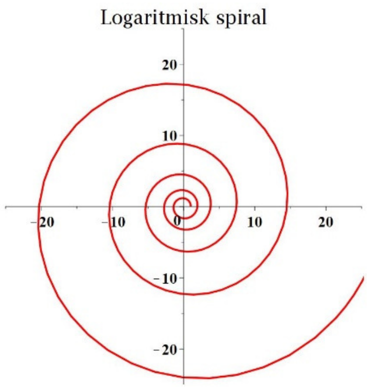
Øvelse 4.22

Via bogens øvelse kan man tilgå et dokument på website, som indeholder nedenstående. Samtidig er der her adgang til et aktivt mapledokument, med de animationer, der er beskrevet og hvorfra man kan kopiere kommandoerne.

a)

Vi opstiller en *Explore* i Maple:

$Explore(plot([e^{a\cdot t}\cdot \cos(t),\ e^{a\cdot t}\cdot \sin(t),\ t = 0..10\cdot\pi], -25..25, -25..25, scaling = constrained, title = \text{"Logaritmisk spiral"}, axesfont = [arial, bold, 25], titlefont = [Times, 30], thickness = 4, font = [arial, 20], color = red, size = [800, 800]), parameters = [a = 0.02..0.20])$



b)

Vi ser, at a afgør hvor tætte spiralerne ligger, dvs afstanden mellem vindingerne
Eksempel:

ISBN 9788770668781

Logaritmisk spiral med valgt parameter

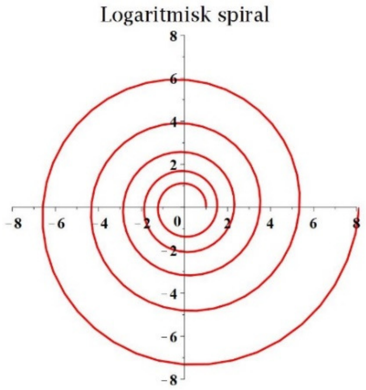
Vi starter med at vælge en parameterværdi på 1/15:

$$r1(t) := \left\langle e^{\frac{1}{15}\cdot t}\cdot\cos(t), e^{\frac{1}{15}\cdot t}\cdot\sin(t)\right\rangle :$$

$$r1(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{15}}\cos(t) \\ e^{\frac{t}{15}}\sin(t) \end{bmatrix}$$

Vi tegner banekurven for 5 omdrejninger (dvs for t løbende fra 0 til 10π)

$$plot\left(\left[e^{\frac{1}{15}\cdot t}\cdot\cos(t), e^{\frac{1}{15}\cdot t}\cdot\sin(t), t=0..10\pi\right], view=[-8..8,-8..8], scaling=constrained, title = \text{"Logaritmisk spiral"}, axesfont=[arial, bold, 25], titlefont=[Times, 30], thickness=4, font = [arial, 20], color=red, size=[800, 800]\right)$$



c) Hastighedsvektor

Logaritmisk spiral - stedvektor og tangent

Tangentvektor - først med den faste værdi af a:

$$r1'(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{t}{15}}\cos(t)}{15} - e^{\frac{t}{15}}\sin(t) \\ \frac{e^{\frac{t}{15}}\sin(t)}{15} + e^{\frac{t}{15}}\cos(t) \end{bmatrix}$$

Vi ser, at dette er lig med:

$$\frac{1}{15}\cdot r1(t) + hat(r1(t)) = \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{t}{15}}\cos(t)}{15} - e^{\frac{t}{15}}\sin(t) \\ \frac{e^{\frac{t}{15}}\sin(t)}{15} + e^{\frac{t}{15}}\cos(t) \end{bmatrix}$$

(*Bemærk*: *hat( )* angiver tværvektor)

ISBN 9788770668781

Vi indtegner nu den logariutmiske spiral med stedvektor og hastighedsvektor for den valgte parameter, og for et valgt punkt

$$r1(6.25\,\pi) = \begin{bmatrix} 2.618033187 \\ 2.618033213 \end{bmatrix}$$

Hastighedsvektoren er:

$$r1'(6.25\,\pi) = \begin{bmatrix} -2.443497667 \\ 2.792568734 \end{bmatrix}$$

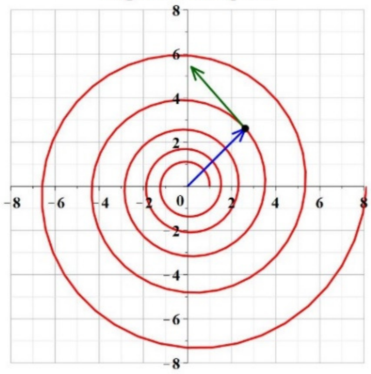
Afsættes hastighedsvektoren ud fra punktet, vil endepunktet være:

$$r1(6.25\,\pi) + r1'(6.25\,\pi) = \begin{bmatrix} 0.174535520000000 \\ 5.41060194700000 \end{bmatrix}$$

Nu har vi materialet til at tegne det ønskede

$$display\left(plot\left(\left[e^{\frac{1}{15}\cdot t}\cdot\cos(t), e^{\frac{1}{15}\cdot t}\cdot\sin(t), t=0..10\cdot\pi\right], view=[-8..8,-8..8], scaling\right.\right.$$
$$= constrained, title = \text{"Logaritmisk spiral"}, axesfont = [arial, bold, 25], titlefont = [Times, 30],$$
$$\left. thickness = 4, font = [arial, 20], color = red, size = [800, 800]\right), arrow\left(\langle 0, 0\rangle, \left\langle e^{\frac{1}{15}\cdot 6.25\pi}\right.\right.$$
$$\left.\cdot\cos(6.25\,\pi), e^{\frac{1}{15}\cdot 6.25\pi}\cdot\sin(6.25\,\pi)\right\rangle, difference, color = blue, shape = arrow, thickness = 4,$$
$$\left. head\_length = 0.6, head\_width = 0.5, size = [800, 800], gridlines\right), arrow(\langle r1(6.25\,\pi)[1],$$
$$r1(6.25\,\pi)[2]\rangle, \langle 0.174535520, 5.410601947\rangle, difference, color = \text{"DarkGreen"}, shape = arrow,$$
$$thickness = 4, head\_length = 0.6, head\_width = 0.5, size = [800, 800], gridlines),$$
$$pointplot([r1(6.25\,\pi)[1], r1(6.25\,\pi)[2]], symbol = solidcircle, symbolsize = 15))$$

Logaritmisk spiral



(***Bemærk***: **Vektorer tegnes lettest i Maple med brug af *arrow(<startpunkt>,<slutpunkt>,difference,...),* hvor prikkerne angiver, at vi her kan justere på vektorens form, fx pilehovedet med *'head_lenght' og 'head_width***)

Tangentvektor - med parameter a

$r2(t) := \langle e^{a\cdot t}\cdot \cos(t), e^{a\cdot t}\cdot \sin(t)\rangle$:

$$r2(t) = \begin{bmatrix} e^{at}\cos(t) \\ e^{at}\sin(t) \end{bmatrix}$$

$$r2'(t) = \begin{bmatrix} a\,e^{at}\cos(t) - e^{at}\sin(t) \\ a\,e^{at}\sin(t) + e^{at}\cos(t) \end{bmatrix}$$

Vi ser, at dette er lig med:

$$a\cdot r2(t) + hat(r2(t)) \quad \begin{bmatrix} a\,e^{at}\cos(t) - e^{at}\sin(t) \\ a\,e^{at}\sin(t) + e^{at}\cos(t) \end{bmatrix}$$

d) Konstruktion af stedvektor og hastighedsvektor på den logaritmiske spiral

Hvis vi har et fast punkt, P_k bestemt ved $t=k$ - der svarer til værdien 6.25 π ovenfor - så er punktet P_k's koordinater:

$$r2(k) = \begin{bmatrix} e^{ak}\cos(k) \\ e^{ak}\sin(k) \end{bmatrix}$$

Dette er også koordinaterne tiol stedvektoren OP_k til dette punkt.

Hastighedsvektoren i dette punkt er:

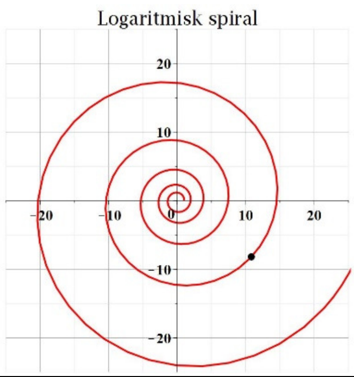
$$r2'(k) = \begin{bmatrix} a\,e^{ak}\cos(k) - e^{ak}\sin(k) \\ a\,e^{ak}\sin(k) + e^{ak}\cos(k) \end{bmatrix}$$

Hvis denne vektor afsættes ud fra punktet P_k så vil spidsen af vektorsummen $r2(k) + r2'(k)$ have koordinaterne:

$$r2(k) + r2'(k) = \begin{bmatrix} e^{ak}\cos(k) + a\,e^{ak}\cos(k) - e^{ak}\sin(k) \\ e^{ak}\sin(k) + a\,e^{ak}\sin(k) + e^{ak}\cos(k) \end{bmatrix}$$

Vi laver en Explore på spiralen med punktet, og de to parametre; a og k:

$Explore(display(plot([e^{a\cdot t}\cdot \cos(t), e^{a\cdot t}\cdot \sin(t), t = 0..10\cdot\pi], view = [-25..25, -25..25], scaling = constrained, title = \text{"Logaritmisk spiral"}, axesfont = [arial, bold, 25], titlefont = [Times, 30], thickness = 4, font = [arial, 20], color = red, gridlines, size = [800, 800]), pointplot([e^{a\cdot k}\cdot \cos(k), e^{a\cdot k}\cdot \sin(k)], symbol = solidcircle, symbolsize = 15)), parameters = [a = 0.05..0.5, k = 0..10\,\pi])$

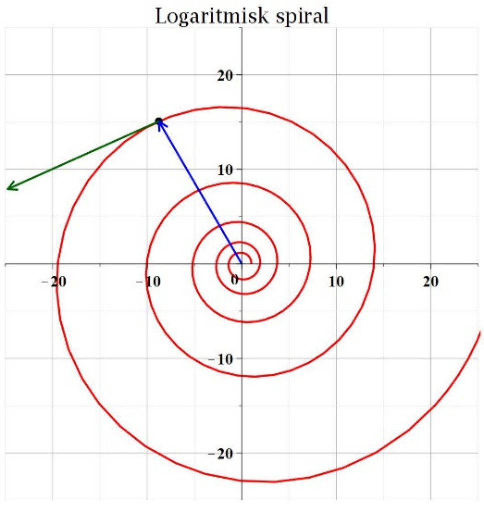


ISBN 9788770668781

Logaritmisk spiral med stedvektor og hastighedsvektor afsat i en explore

Vi udnytter nu det vi har fundet ud af, og afsætter stedvektor ud til punktet og hastighedsvektor langs kurven, bestemt ved parametrene a og k:

$$Explore\Big(display\Big(plot\big(\big[e^{a\cdot t}\cdot\cos(t), e^{a\cdot t}\cdot\sin(t), t=0..10\cdot\pi\big], view=[-25..25,-25..25], scaling=constrained, title="\text{Logaritmisk spiral}", axesfont=[arial, bold, 25], titlefont=[Times, 30], thickness=4, font=[arial, 20], color=red, gridlines, size=[1000, 1000]\big), pointplot\big(\big[e^{a\cdot k}\cdot\cos(k), e^{a\cdot k}\cdot\sin(k)\big], symbol=solidcircle, symbolsize=12\big), arrow\big(\langle 0, 0\rangle, \langle e^{a\cdot k}\cdot\cos(k), e^{a\cdot k}\cdot\sin(k)\rangle, difference, view=[-4..4,-1..6], color=blue, shape=arrow, thickness=4, head\_length=1.0, head\_width=1.0, size=[1000, 1000], gridlines\big), arrow\big(\langle e^{a\cdot k}\cdot\cos(k), e^{a\cdot k}\cdot\sin(k)\rangle, \langle e^{a k}\cos(k)+a\,e^{a k}\cos(k)-e^{a k}\sin(k), e^{a k}\sin(k)+a\,e^{a k}\sin(k)+e^{a k}\cos(k)\rangle, difference, view=[-4..4,-1..6], color="\text{DarkGreen}", shape=arrow, thickness=4, head\_length=1.0, head\_width=1.0, size=[1000, 1000], gridlines\big)\Big), parameters=[a=0.01..0.20, k=0..10\,\pi]\Big)$$



Ved at køre rundt med de to vektorer, ser vi, at vinklen mellem de to hele tiden er den samme

e)

Logaritmisk spiral - vinklen mellem stedvektor og hastighedsvektor er konstant

Vi har fra c):

$r2'(t) = a\cdot r2(t) + hat(r2(t))$

$$\begin{bmatrix} a\,e^{a t}\cos(t) - e^{a t}\sin(t) \\ a\,e^{a t}\sin(t) + e^{a t}\cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,e^{a t}\cos(t) - e^{a t}\sin(t) \\ a\,e^{a t}\sin(t) + e^{a t}\cos(t) \end{bmatrix}$$

Vinklen mellem to vektorer kan udregnes med formlen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}\ :$$

Tæller:

$r2(t)\cdot r2'(t) = r2(t)\cdot(a\cdot r2(t) + hat(r2(t))) = a\cdot(r2(t))^2 + r2(t)\cdot hat(r2(t)) = a\cdot(r2(t))^2$

hvor vi har udnyttet at skalarproduktet af en vektor med sin tværvektor er 0

ISBN 9788770668781

Nævner: $|r2'(t)| = \sqrt{(a \cdot r2(t))^2 + (hat(r2(t)))^2} = \sqrt{a^2 \cdot (r2(t))^2 + (r2(t))^2} =$
$\sqrt{(r2(t))^2 \cdot (a^2+1)} = |r2(t)| \cdot \sqrt{a^2+1}$
hvor vi har udnyttet, at en vektor og dens tværvektor er ortogoinale, så vi kan bruge Pythagoras. Og at længden af en vektor og dens tværvektor er det samme.

Sæt ind i formlen:

$$\cos(\alpha) = \frac{a \cdot (r2(t))^2}{|r2(t)| \cdot |r2(t)| \cdot \sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

Men denne formel siger, at for en given logaritmisk spiral(med et bestemt a er vinklen mellem stedvektor og tangent konstant.

Vi ser også, at tallet er positiv, så vinklen er mindre end 90 grader.

Øvelse 4.23

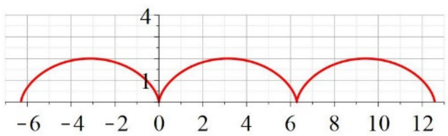
a)

Banekurven for cykloiden, $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$:

b)

Hastighedsvektor:

$$\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



Accelerationsvektor:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{s}\,''(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

c)

Hastighedsvektoren lig nulvektoren:

$$intervalsolve(1 - \cos(t) = 0, t = -2\pi..4\pi) = [-2\pi, 0, 2\pi, 4\pi]$$
$$intervalsolve(\sin(t) = 0, t = -2\pi..4\pi) = [-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi]$$

Fællesmængden: $[-2\pi, 0, 2\pi, 4\pi]$

Accelerationsvektoren til de tidspunkter:

$$\vec{a}(-2\pi) = \vec{a}(0) = \vec{a}(2\pi) = \vec{a}(4\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)

Funktionen er klart differentiabel, da koordinatfunktionerne er det. Farten kører blødt og glat ned til 0 og vokser så op igen, men som vektor ændres retningen 180 grader, fra nedad til opad, så der bliver en **spids** på kurven. Så kurven som **graf** for en almindelig funktion vil ikke være differentiabel for x-værdierne:

$[-2\pi, 0, 2\pi, 4\pi]$

Øvelse 4.24

Krumningen for en banekurve er givet ved: $\kappa = \frac{\vec{a} \cdot \hat{\vec{v}}}{v^3} = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}}$

Grafen for funktionen $f(x)$ er lige med banekurven for $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

Indsæt i formlen: $\kappa = \frac{1 \cdot f''(x) - f'(x) \cdot 0}{\left((1)^2 + (f'(x))^2\right)^{3/2}} = \frac{f''(x)}{\left(\left(1 + (f'(x))^2\right)^{1/2}\right)^3} = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right)^3}$,

ISBN 9788770668781

	hvilket er sætning 4
Øvelse 4.25	a) Sammenhængen mellem buelængden, *s* på en cirkel med radius R, og vinklen, θ målt i radianer er : $s=\theta\cdot R$ b) Sætning 5 siger: $\kappa=\frac{d\theta}{ds}$, og fra a) har vi: $\theta=\frac{s}{R}=\frac{1}{R}\cdot s$, så krumningen for en cirkel er: $\kappa=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\cdot s\right)=\frac{1}{R}$ c) Antag en bevægelse opfylder: $\theta=k\cdot s$. Så er **krumningen konstant**: $\kappa=\frac{d\theta}{ds}=\frac{d}{ds}(k\cdot s)=k$ Lad $\vec{r}(t)$ være vektorfunktionen. Når vi parametriserer med buelængde *s*, så er $\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}'(s)$ en enhedsvektor langs tangenten, som vi skriver: $\vec{e}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(k\cdot s)\\ \sin(k\cdot s)\end{pmatrix}$ Så $\vec{r}'(s)=\begin{pmatrix}\cos(k\cdot s)\\ \sin(k\cdot s)\end{pmatrix}$ Integrer: $\vec{r}(s)=\frac{1}{k}\begin{pmatrix}\sin(k\cdot s)\\ -\cos(k\cdot s)\end{pmatrix}$ Banekurven for denne er en cirkel med radius $\frac{1}{k}$: stedvektoren kan skrives: $-\frac{1}{k}\widehat{\begin{pmatrix}\cos(k\cdot s)\\ \sin(k\cdot s)\end{pmatrix}}$, som følger en kvart omgang efter den normale cirkelbevægelse
Øvelse 4.26	a) Skæring med y-aksen: $4t^2-t^4=0 \Leftrightarrow t^2\cdot(4-t^2)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=2 \vee t=-2$ (I $t=0$ er der en "berøring", uden skæring) b) Banekurvens længde fra $P_{-2}(0,-2)$ til $P_2(0,2)$: $\int_{-2}^{2}\sqrt{\left(\left(4t^2-t^4\right)'\right)^2+\left(\left(t^3-3t\right)'\right)^2}\,dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{\left(8t-4t^3\right)^2+\left(3t^2-3\right)^2}\,dt=21{,}189$ (Værdien er beregnet numerisk af Maple)
Øvelse 4.27	a) Omkredsen af en cirkel med radius 3: $\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left(\left(3\cos(t)\right)'\right)^2+\left(\left(3\sin(t)\right)'\right)^2}\,dt=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left(-3\sin(t)\right)^2+\left(3\cos(t)\right)^2}\,dt$ $=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{3^2\left(\left(\sin(t)\right)^2+\left(\cos(t)\right)^2\right)}\,dt=3\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1}\,dt=3\cdot 2\pi=6\pi$ En numerisk beregning giver 18.850 b) Omkredsen af en ellipse med halvakser 5 og 2: $\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left(\left(5\cos(t)\right)'\right)^2+\left(\left(2\sin(t)\right)'\right)^2}\,dt=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left(-5\sin(t)\right)^2+\left(2\cos(t)\right)^2}\,dt\approx 23.014$ (Værdien er beregnet numerisk af Maple)

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

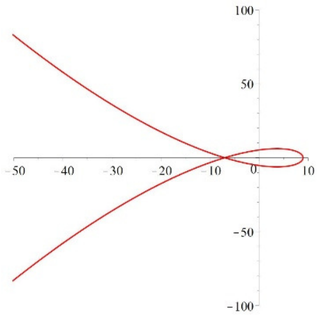
Øvelse 4.28

$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} 9-t^2 \\ \frac{1}{4}t^3-4t \end{pmatrix}$. Banekurven er behandlet i øvelse 4.19.

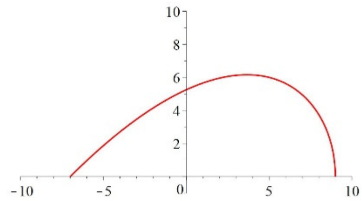
a)

Banekurven t.h.: t løber fra -10 til 10: Banekurven t.v.: t løber fra -4 til 0:

a)



b)



b) fortsat:

Vi kan isolere t i $x=9-t^2$: $t=-\sqrt{9-x}$ - vi vælger den negatrive løsning, da t løber fra -4 til 0 – og indsætter i $y=\frac{1}{4}t^3-4t$. Dette giver funktionsudtrykket:

$$y=\tfrac{1}{4}\left(-\sqrt{9-x}\right)^3-4\left(-\sqrt{9-x}\right)=-\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{9-x}\right)^3+4\sqrt{9-x}\ ,$$

dvs. y er i dette område en funktion af x.

c)

Vi kan bruge sætning 7:

$$\text{Areal} = \int_{-4}^{0}\left(\tfrac{1}{4}t^3-4\right)\cdot\left(9-t^2\right)'\,dt=68.267$$

Øvelse 4.29

Opgaven er først behandlet i øvelse 4.14:

Definer:

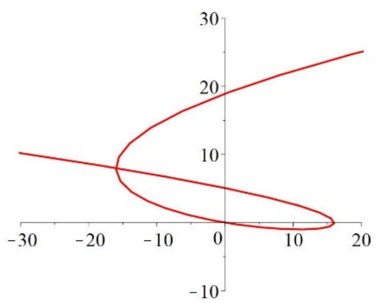
$r(t) := \langle t^3-12\,t, t^2+2\,t\rangle$:

Vi kontrollerer: $r(t)=\begin{bmatrix} t^3-12\,t \\ t^2+2\,t \end{bmatrix}$

a)

banekurve:

$plot([t^3-12\,t, t^2+2\,t, t=-30..30], view=[-30..20, -10..30], thickness=4, color=red, scaling$
$=constrained, size=[800, 800])$



Grafen viser, der er et dobbeltpunkt

Vi vil udnytte sætning 8 til beregning af arealet af sløjfen. I 4.21 fandt vi:

<table>
<tr><td></td><td>

c)
Dobbeltpunkt:
Kald de to parameterværdier i dobbeltpunktet for u og v:
$solve(\{u^3 - 12\,u = v^3 - 12\,v,\ u^2 + 2\,u = v^2 + 2\,v\})$
$\{u = v,\ v = v\},\ \{u = 2,\ v = -4\},\ \{u = -4,\ v = 2\}$ **(6.5)**
Den første er triviel, løsning nr 2 og 3 er de samme, blot byttet om på u og v. Så:
Der er dobbeltpunkt i:
$r(2);\ r(-4)$
$\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$ **(6.6)**
Kontrollen viser det er korrekt

Parameterfremstillingen viser, at $x = t^3 - 12t$ er negativ, når *t* er stort negativ, og positiv, når *t* er stor positiv. Dvs. gennemløbet er fra venstre, ind i sløjfen og ud mod højre. Men det betyder, at stedvektoren overstryger området i negativ omløbsretning. Derfor skal vi integrere fra 2 til -4:
$\text{Areal} = \frac{1}{2}\int_2^{-4} \vec{r}'(t)\cdot\widehat{\vec{r}(t)}\,dt$
Vi udregner integranden: $\begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 + 2t \end{pmatrix}' \bullet \widehat{\begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 + 2t \end{pmatrix}} = -t^4 - 4\cdot t^3 - 12\cdot t^2$,
så $\text{Areal} = \frac{1}{2}\int_2^{-4} \vec{r}'(t)\cdot\widehat{\vec{r}(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^{-4} -t^4 - 4\cdot t^3 - 12\cdot t^2\,dt = 129.6$

</td></tr>
<tr><td>

Øvelse 4.30

</td><td>

a)
areal af cirklen: $\begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$:
Vi udregner integranden: $\begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}' \bullet \widehat{\begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}} = 9(\sin(t))^2 + 9(\cos(t))^2 = 9$
så $\text{Areal} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vec{r}'(t)\cdot\widehat{\vec{r}(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\,dt = 9\cdot\pi$ $(\pi\cdot r^2$ *som vi kender*$)$
b)
areal af ellipsen: $\begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$:
Vi udregner integranden: $\begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}' \bullet \widehat{\begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}} = 10(\sin(t))^2 + 10(\cos(t))^2 = 10$
så $\text{Areal} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vec{r}'(t)\cdot\widehat{\vec{r}(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 10\,dt = 10\cdot\pi$ $(\pi\cdot a\cdot b$ *som vi kender*$)$
c)
Generelt for en cirkel med radius r: Integranden bliver r^2
så $\text{Areal} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vec{r}'(t)\cdot\widehat{\vec{r}(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt = r^2\cdot\pi$
Generelt for en ellipse med halvakser *a* og *b*: Integranden bliver $a\cdot b$
så $\text{Areal} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vec{r}'(t)\cdot\widehat{\vec{r}(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cdot b\,dt = a\cdot b\cdot\pi$

</td></tr>
</table>