ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 3B

Øvelse 3.42	Energiomsætning foregår på celleniveau, hvorfor Ud-leddet med rimelighed kan antages at være proportional med vægten. Næring optages gennem tarmens slimhinder, og disse får et større areal, men ændrer ikke struktur, når organismen vokser.
Øvelse 3.43	a) $b\cdot w(t)=k\cdot r^3$ giver: $\frac{b}{k}\cdot w(t)=r^3$ opløft i $\frac{1}{3}$ og udnyt potensregneregel: $\left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(w(t))^{\frac{1}{3}}=r$ b) Indsæt denne formel for r i: $Ind=c\cdot e\cdot r^2$: $Ind=c\cdot e\cdot\left(\left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(w(t))^{\frac{1}{3}}\right)^2$ udnyt potensregel: $Ind=c\cdot e\cdot\left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot(w(t))^{\frac{2}{3}}$ kald $c\cdot e\cdot\left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{2}{3}}$ for h: $Ind=h\cdot(w(t))^{\frac{2}{3}}$
Øvelse 3.44	a) Bernouillis differentialligning er: $y'=ay^{\alpha}-by$ Bertalanffys differentialligning er: $w'(t)=h\cdot(w(t))^{\frac{2}{3}}-k\cdot w(t)$ Sammenlign: $a=h$, $b=k$, $\alpha=\frac{2}{3}$, $y=w(t)$ b) Indsæt det fundne fra a) i $y^{1-\alpha}=c\cdot e^{-(1-\alpha)b\cdot t}+\frac{a}{b}$: $w(t)^{1-\frac{2}{3}}=c\cdot e^{-(1-\frac{2}{3})k\cdot t}+\frac{h}{k}$ $w(t)^{\frac{1}{3}}=c\cdot e^{-\frac{k}{3}\cdot t}+\frac{h}{k}$ c) Indsæt $w(0)=0$ i $w(t)^{\frac{1}{3}}=c\cdot e^{-\frac{k}{3}\cdot t}+\frac{h}{k}$: $0=c\cdot e^0+\frac{h}{k}$, eller: $c=-\frac{h}{k}$, så: $w(t)^{\frac{1}{3}}=-\frac{h}{k}\cdot e^{-\frac{k}{3}\cdot t}+\frac{h}{k}$ d) Sæt $\frac{h}{k}$ uden for parentes: $w(t)^{\frac{1}{3}}=\frac{h}{k}\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)$, og opløft i tredje: $w(t)=\left(\frac{h}{k}\right)^3\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3$ e) Maple giver:

L&R Uddannelse EGMONT

	$dsolve\left(w'(t)=h\cdot(w(t))^{\frac{2}{3}}-k\cdot w(t),\, w(t)\right)$ $-\frac{h}{k}-e^{-\frac{kt}{3}}\_C1+w(t)^{1/3}=0$ Bestem først konstanten: Indsæt $t=0$ og $w(0)=0$: $C1=solve\left(-\frac{h}{k}-e^{-\frac{k\cdot 0}{3}}\cdot C1+0=0,\, C1\right)$ $C1=-\frac{h}{k}$ $w(t)=solve\left(-\frac{h}{k}-e^{-\frac{kt}{3}}\cdot\left(-\frac{h}{k}\right)+w(t)^{1/3}=0,\, w(t)\right)$ $w(t)=-\frac{h^3\left(e^{-\frac{kt}{3}}-1\right)^3}{k^3}$ altså samme udtryk
Øvelse 3.45	a) Løsning givet i bogen b) $w(t)=\left(\frac{h}{k}\right)^3\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3\rightarrow\left(\frac{h}{k}\right)^3\cdot(1-0)^3=\left(\frac{h}{k}\right)^3$ når $t\rightarrow\infty$, fordi $e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\rightarrow 0$ når $t\rightarrow\infty$, idet k er positiv. c) Grænseværdien er den øvre grænse for den vægt pågældende fisk kan opnå
Øvelse 3.46	a) $N'(t)$ angiver ændring pr tidsenhed i variablen $N(t)$. Ændring i antallet af fisk sker alene ved naturlig død. Dødsraten for pågældende fiskeart betegnes med a. Deraf ligningen $N'(t)=-a\cdot N(t)$. Minustegnet angiver, at der er tale om et fald i antallet. b) Løsningen til differentialligningen er iflg sætning 1 i kapitel 3A: $N(t)=c\cdot e^{-a\cdot t}$ Antal fisk til tiden 0 kaldes N_0: $N_0=N(0)=c\cdot e^{-a\cdot 0}=c\cdot 1=c$, giver: $N(t)=N_0\cdot e^{-a\cdot t}$
Øvelse 3.47	a) Fisk i samme årgang vejer stort set det samme. Så samlede vægt, $B(t)$ er antallet, $N(t)$ gange vægten af én fisk, $w(t)$, dvs: $B(t)=N(t)\cdot w(t)$ b) Indsæt udtrykkene fundet i øvelse 3.44 og 4.46: $B(t)=N(t)\cdot w(t)=N_0\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(\frac{h}{k}\right)^3\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3$
Øvelse 3.48	a) $N_0\cdot\left(\frac{h}{k}\right)^3$ er konstanter, så vi optimerer $B(t)$ ved at optimere $e^{-a\cdot t}\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3$. Dette sker ved at undersøge ligningen $\frac{d}{dt}\left(e^{-a\cdot t}\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3\right)=0$ b) Anvend produktreglen: $\left(e^{-a\cdot t}\right)'\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3+e^{-a\cdot t}\cdot\left(\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3\right)'=0$ Anvend sammensat differentiation, på sidste led to gange:

ISBN 9788770668781

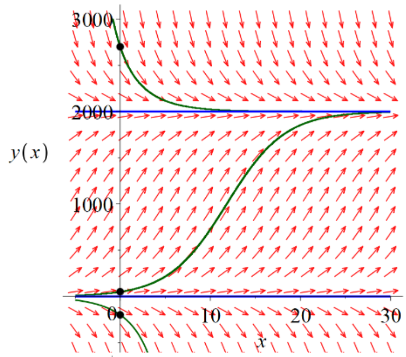
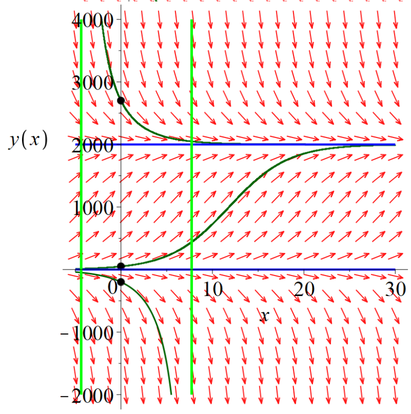
	$(-a)\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3+e^{-a\cdot t}\cdot 3\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^2\cdot\left(-\left(-\frac{k}{3}\right)e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)=0$, eller: $a\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^3=e^{-a\cdot t}\cdot 3\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)^2\cdot\frac{k}{3}\cdot e^{-\frac{k}{3}\cdot t}$ $1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}$ er kun 0, hvis $t=0$, og $e^{-a\cdot t}$ er aldrig 0. Så vi kan forkorte og får: $a\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{3}\cdot t}\right)=k\cdot e^{-\frac{k}{3}\cdot t}$ $a=k\cdot e^{-\frac{k}{3}\cdot t}+a\cdot e^{-\frac{k}{3}\cdot t}$ $a=(a+k)e^{-\frac{k}{3}\cdot t}$ $\frac{a}{a+k}=e^{-\frac{k}{3}\cdot t}$ $\ln\left(\frac{a}{a+k}\right)=-\frac{k}{3}\cdot t$ $t=-\frac{3}{k}\cdot\ln\left(\frac{a}{a+k}\right)$ c) Svaret er givet i opgaven d) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$ giver: $t=-\frac{3}{k}\cdot\ln\left(\frac{a}{a+k}\right)=\frac{3}{k}\cdot\ln\left(\frac{1}{\frac{a}{a+k}}\right)=\frac{3}{k}\cdot\ln\left(\frac{a+k}{a}\right)$ e) Indsæt $a=0{,}2$ og $k=1{,}3$: $t=\frac{3}{1{,}3}\cdot\ln\left(\frac{0{,}2+1{,}3}{0{,}2}\right)\approx 4{,}6498$
Øvelse 3.49	svaret givet i opgaven
Øvelse 3.50	a) Værdi på venstre gren: $N_0\cdot e^{-M\cdot t_c}$ Værdi på højre gren: $k\cdot e^{-(M+f)\cdot t_c}$ Ligningen: $k\cdot e^{-(M+f)\cdot t_c}=N_0\cdot e^{-M\cdot t_c}$ reduceres til: $k\cdot e^{-f\cdot t_c}=N_0$, som giver: $k=N_0\cdot e^{f\cdot t_c}$ (ved at gange med $e^{f\cdot t_c}$) b) svaret er givet i opgaven
Øvelse 3.51	Årgangene er spredt så der fanges samme andel *f* af hver årgang, i mængde: $f\cdot B(t)$. Netmaskernes størrelse giver, at vi fanger fisk fra årgang t_c og op. Dvs vi summerer bidragene $f\cdot B(t)$ fra årgang t_c til årgang *T*, da fiskene ikke bliver ældre. En sum kan udregnes som et integral, som beskrevet i bogen, så: Samlet fangst = $\int_{t_c}^{T} f\cdot B(t)dt=f\cdot\int_{t_c}^{T}B(t)dt$, og indsæt heri udtrykket for $B(t)$: $Y=f\cdot\int_{t_c}^{T}w_\infty\cdot N_0\cdot e^{f\cdot t_c}\cdot e^{-(M+f)t}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3\ dt$
Øvelse 3.52	a) Svaret givet i opgaven. b) Opsplitning: $e^{-(M+f)t}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3=e^{-ft-Mt}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3$ $=e^{-ft}\cdot e^{-Mt}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3$ Indsæt *M* og *k*: $e^{-Mt}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3=e^{-0{,}1\cdot t}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}1{,}5\cdot t}\right)^3=e^{-0{,}1\cdot t}\cdot\left(1-e^{-0{,}5\cdot t}\right)^3$ Anvend binomialformlen på 3.gradsleddet:

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

	$e^{-0,1\cdot t}\cdot\left(1-e^{-0,5\cdot t}\right)^3=e^{-0,1\cdot t}\cdot\left(1-3e^{-0,5\cdot t}+3\left(e^{-0,5\cdot t}\right)^2-\left(e^{-0,5\cdot t}\right)^3\right)$ $=e^{-0,1\cdot t}\cdot\left(1-3e^{-0,5\cdot t}+3e^{-2\cdot 0,5\cdot t}-e^{-3\cdot 0,5\cdot t}\right)$ $=e^{-0,1\cdot t}\cdot\left(1-3e^{-0,5\cdot t}+3e^{-t}-e^{-1,5\cdot t}\right)$ Gange ind og udnyt potensregel: $e^{-0,1\cdot t}\cdot\left(1-3e^{-0,5\cdot t}+3e^{-t}-e^{-1,5\cdot t}\right)=e^{-0,1\cdot t}-3e^{-0,6\cdot t}+3e^{-1,1t}-e^{-1,6\cdot t}$ c) Vi indsætter talværdierne og ovenstående i udtrykket fra øvelse 3.51: $Y=f\cdot\int_{t_c}^{T}w_\infty\cdot N_0\cdot e^{f\cdot t_c}\cdot e^{-(M+f)t}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3\ dt$ $Y=f\cdot w_\infty\cdot N_0\cdot e^{f\cdot t_c}\cdot\int_{t_c}^{T}e^{-ft}\cdot e^{-Mt}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3\ dt$ $Y=0,3\cdot 10^6\cdot e^{0,6}\cdot\int_2^{16}e^{-0,3t}\cdot\left(e^{-0,1\cdot t}-3e^{-0,6\cdot t}+3e^{-1,1t}-e^{-1,6\cdot t}\right)\ dt$ $Y=0,3\cdot 10^6\cdot e^{0,6}\cdot\int_2^{16}\left(e^{-0,4\cdot t}-3e^{-0,9\cdot t}+3e^{-1,4t}-e^{-1,9\cdot t}\right)\ dt$ Det er let at finde stamfunktioner til funktionerne under integraltegnet, fx er en stamfunktion til $e^{-0,4\cdot t}$ lig med $-\frac{1}{0,4}e^{-0,4\cdot t}$. Så integralet kan beregnes med stamfunktioner, hvis vi ville det.
Øvelse 3.53	a) Dette er indeholdt i udregningerne ovenfor b) Fra udregningen ovenfor har vi: $Y=f\cdot w_\infty\cdot N_0\cdot e^{f\cdot t_c}\cdot\int_{t_c}^{T}e^{-ft}\cdot e^{-Mt}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3\ dt$ $w_\infty\cdot N_0=10^6$ anvendes som enhed, så de faktorer udgår. t_c holdes fast på værdien 2, f omdøbes til x, og værdierne $M=0,1$ og $k=1,5$ indsættes: $Y=x\cdot e^{2x}\cdot\int_2^{T}e^{-xt}\cdot e^{-0,1t}\cdot\left(1-e^{-0,5t}\right)^3\ dt$ c) og d) Svarene er givet i opgaven.
Øvelse 3.54	a) og b) Svarene er givet i opgaven.
Øvelse 3.55	a) Differentialligningen er skrevet som den 3. form i sætning 5 b) svaret er givet i opgaven c) og d) Svarene er givet i opgaven
Øvelse 3.56	En løsning til opgaven, med angivelse af parametrenes betydning er givet på website. Anvend QR-koden.
Øvelse 3.57	En løsning til opgaven, med forklaring på forløbet af de logistiske kurver uden for det normale område, er givet på website. Anvend QR-koden.
Øvelse 3.58	a) Løsningsformlen, der udledes i beviset, er den som i sætningen er anført hørende til den 2. form: $y=\dfrac{\frac{b}{a}}{1+c\cdot e^{-bx}}$ Differentialligningen i 2. form er: $y'=y\cdot(b-a\cdot y)=b\cdot y-a\cdot y^2$ Differentialligningen i 3. form er: $y'=ay\cdot(M-y)=M\cdot a\cdot y-a\cdot y^2$

L&R Uddannelse EGMONT

	Heraf ser vi, at sammenhængen er: $b = M \cdot a$. Indsæt det i løsningsformlen: $y = \dfrac{\frac{M \cdot a}{a}}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}} = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$, som er formlen til 3. form. b) Indsæt $y = 0$ i 1. form: Venstre side: $0' = 0$, Højre side: $b \cdot 0 - a \cdot 0^2 = 0$, altså det samme. Indsæt $y = \frac{b}{a}$: Venstre side: $\left(\frac{b}{a}\right)' = 0$, Højre side: $b \cdot \frac{b}{a} - a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{a} - a \cdot \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a} - \dfrac{b^2}{a} = 0$, altså det samme.
Øvelse 3.59	Svaret vedr asymptotiske forhold for logistisk vækst er givet på website. Anvend QR-koden.
Øvelse 3.60	*V* er vægten af en gris, *t* er tiden målt i døgn efter at grisen er begyndt at indtage fast føde. Vi får oplyst: $V(0) = 7{,}3$. V opfyldet Differentialligning: $\dfrac{dV}{dt} = 0{,}000193 \cdot V(t) \cdot (139{,}6 - V(t))$ a) Forskrift (sætning 5, 3. form): $V(t) = \dfrac{139{,}6}{1 + c \cdot e^{-139{,}6 \cdot 0{,}000193 \cdot t}} = \dfrac{139{,}6}{1 + c \cdot e^{-0.02694 \cdot t}}$ $V(0) = 7{,}3$: $\dfrac{139{,}6}{1 + c \cdot e^{-0.02694 \cdot 0}} = 7{,}3 \Leftrightarrow \dfrac{139{,}6}{1 + c} = 7{,}3 \Leftrightarrow c = \dfrac{139{,}6}{7{,}3} - 1 = 18{,}12$, indsæt: $V(t) = \dfrac{139{,}6}{1 + 18{,}12 \cdot e^{-0.02694 \cdot t}}$ b) Vækshastighed størst ved $V(t) = 0{,}5 \cdot 139{,}6$, som løses til: $t = 107{,}54$ Grisens vægt: $V(107{,}54) = 69{,}8$
Øvelse 3.61	**Der er en fejl i angivelsen af *t*-intervallet: Det skal være** $[-5;30]$ a), b), c), d) Der er indtegnet løsningskurver gennem punkterne $(0{,}50)$, $(0{,}2700)$ og $(0{,}-200)$. (De tre mørkgrønne kurver). De tre punkter er afsat. De to konstante løsninger er indtegnet (de blå kurver). Disse er også asymptoter til de andre grafer.  e) Den generelle løsningsformel er $B(t) = \dfrac{2000}{1 + c \cdot e^{-0.31t}}$ 1) Gennem $(0{,}50)$: $B(t) = \dfrac{2000}{1 + 39 \cdot e^{-0.31t}}$ 2) Gennem $(0{,}2700)$: $B(t) = \dfrac{2000}{1 - 0{,}259 \cdot e^{-0.31t}}$ 3) Gennem $(0{,}-200)$: $B(t) = \dfrac{2000}{1 - 11 \cdot e^{-0.31t}}$ I de to sidste udtryk kan nævneren blive 0: I 2) sker det i $x = -4{,}35$, i 3) sker det i $x = 7{,}74$ Det giver en lodret asymptote (de grønne linjer) Definitionsmængden er så: I 2): $]-4{,}35\,;\infty[$ i 3): $]\infty\,;7{,}74[$ 
Øvelse 3.62	a) *Geometrisk argument*:

ISBN 9788770668781

I punktet $P_v=(x_v, y_v)$ er der maksimal væksthastighed. Væksthastighed er hældning af tangenten. Tangenthældning må så være mindre før punktet og mindre efter punktet. Derfor må grafen både før og efter P_v krumme væk fra tangenten, så det er en vendetangent.

Analytisk argument:

I vendepunktet er $y''=0$.

Differentier differentialligningen $y'=b\cdot y-a\cdot y^2$: $\quad y''=b\cdot y'-a\cdot 2\cdot y\cdot y'$

Sæt $y''=0$: $\quad 0=b\cdot y'-a\cdot 2\cdot y\cdot y' \Leftrightarrow 0=b-a\cdot 2\cdot y \Leftrightarrow y=\frac{b}{2a}$

og $y''>0$ giver $0<b\cdot y'-a\cdot 2\cdot y\cdot y' \Leftrightarrow 0<b-a\cdot 2\cdot y \Leftrightarrow y<\frac{b}{2a}$

og $y''<0$ giver $0>b\cdot y'-a\cdot 2\cdot y\cdot y' \Leftrightarrow 0>b-a\cdot 2\cdot y \Leftrightarrow y>\frac{b}{2a}$

Her står, at kurven krummer opad når *y* ligger under $\frac{b}{2a}$ og nedad, når y ligger over. Da *y* er voksende svarer det til at kurven krummer opad når *x* ligger til venstre for x_v og nedad, når *x* ligger til højre for x_v. Så det er en vendetangent.

b)

$$y=\frac{\frac{b}{a}}{1+c\cdot e^{-bx}}=\frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{1}{1+c\cdot e^{-bx}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+c\cdot e^{-bx}=2 \Leftrightarrow e^{-bx}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow x=-\frac{\ln\left(\frac{1}{c}\right)}{b}=\frac{\ln(c)}{b}$$

c)

I eksemplet s 191 så vi: $b=0{,}31$, og $c=39$, så $x_v=\dfrac{\ln(c)}{b}=\dfrac{\ln(39)}{0{,}31}=11.82$

Halvdelen af øvre grænse på 2000 er $\frac{b}{2a}=1000$, så $P_v=(x_v, y_v)=(11{,}82\ ,1000)$

d)

Geometrisk argument for symmetri: I Maple kan det se således ud:

Eksemplet s 191

Vi definerer først vendepunktet:

$$xv := \frac{\ln(39.)}{0.31} = 11.81794079$$

$$yv := \frac{2000}{2} = 1000$$

$$B(x) := \frac{2000.}{1. + 39.\, e^{-0.3100x}} :$$

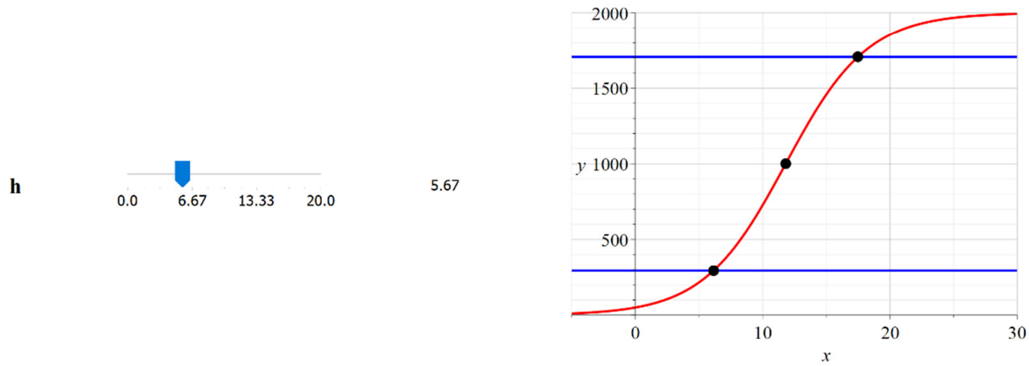
Vi går h frem og h tilbage **på x-aksen** og bestemmer de tilsvarende t-værdier:

$y2 := B(xv+h)$:

$y1 := B(xv-h)$:

Vi opretter en explore, der giver en eksperimentel undersøgelse af symmetrien, ved at afsætte de to punkiter svarende til ovenstående værdier:

```
Explore(display(plot(B(x), x=-5..30, y=0..2000, thickness=5, color=red, axesfont=[arial, 20],
    gridlines, size=[1000, 800]), pointplot([xv, yv], symbol=solidcircle, symbolsize=20, color
    =black), plot([B(xv+h), B(xv-h)], x=-5..30, y=0..2000, color=[blue, blue]),
   pointplot([[xv-h, y1], [xv+h, y2]], view=[-5..30, 0..2000], symbol=solidcircle,
   symbolsize=20, color=black)), parameters=[h=0.0..20.0], placement=left)
```



ISBN 9788770668781

	Det ser tydeligt ud til, at grafen er symmetrisk om vendepunktet. e) *Analytisk argument:* Står vi i punktet $P_v = (x_v, y_v)$, skal vi få samme ændring i y-værdien y_v når vi går *h* frem som når vi går *h* tilbage fra v_v. *h* frem fører til $x_v + h$, og *h* tilbage fører til $x_v - h$ Ændring i *y*-værdierne er: frem: $B(x_v + h) - B(x_v)$, og tilbage: $B(x_v) - B(x_v - h)$ Vi ønsker at vise, at en ligning som $B(xv+h) - B(xv) = B(xv) - B(xv-h)$ er sand for alle h. Det kræver at vi regner eksakt eller endnu bedre, at vi regner symbolsk. Lad os derfor se på *den generelle formel* : $f(t) := \dfrac{\frac{b}{a}}{1 + c\cdot e^{-b\cdot t}}$: **Vendepunktets koordinater er:** $\left(\dfrac{\ln(c)}{b}, \dfrac{b}{2\,a}\right)$: **Vi går samme stykke, *h* frem og tilbage fra** $\dfrac{\ln(c)}{b}$ **og vil tjekke, at vi på y-aksen har bevæget os lige langt op og ned:** **Frem på x-aksen:** $t1 := \dfrac{\ln(c)}{b} + h$: **Tilbage på x-asksen:** $t2 := \dfrac{\ln(c)}{b} - h$: **Vi udregner hvor meget vi er gået op og ned på y-aksen ift. vendepunktet.** **Op af y-aksen:** $simplify\left(f(t1) - \dfrac{b}{2\cdot a}\right) = -\dfrac{b\,(-1 + e^{-h\,b})}{2\,a\,(1 + e^{-h\,b})}$ **Ned af y-aksen:** $simplify\left(\dfrac{b}{2\,a} - f(t2)\right) = \dfrac{b\,(-1 + e^{h\,b})}{2\,a\,(1 + e^{h\,b})}$ **Vi kunne nu tjekke de var ens ved at omskrive, fx ved at forlænge den første med $e^{h\,b}$. Vi kan i stedet spørge Maple: Vi sætter dem lig hinanden og løser mht h:** $solve\left(-\dfrac{b\,(-1 + e^{-h\,b})}{2\,a\,(1 + e^{-h\,b})} = \dfrac{b\,(-1 + e^{h\,b})}{2\,a\,(1 + e^{h\,b})}, h\right)$ h **(5.1)** **Når Maple svarer med h, betyder dette, at ethvert h er en løsning, dvs de to udtryk er ens.**
Øvelse 3.63	**Bemærk: Øvelsen er i bogen fejlagtigt betegnet 6.39. Og Øvelsenm er fejlagtigt placeret i kapitel 3B, den hører hjemme i kapitel 3A, afsnit 3.3. Vi løser den her:**

ISBN 9788770668781

	a) $L1 := [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:$ $L2 := [0.23, 0.21, 0.203, 0.191, 0.171, 0.167, 0.152]:$ $f(x) := LinReg(L1, L2, x):$ $evalf(f(x), 4) = -0.01257\,x + 0.2771$ b) **Bemærk:** Der er ikke om en logistisk differentialligning, opgaven hører som sagt hjemme i kapitel 3A. $\frac{N'(t)}{N(t)} = f(t)$ giver: $N'(t) = N(t)\cdot(-0.01257\,t + 0.2771)$ c) $evalf(simplify(dsolve(\{N'(t) = N(t)\cdot(-0.01257\,t + 0.2771), N(7) = 780\}, N(t))), 3)$ $$N(t) = 780.\,e^{-1.63 - 0.00628\,t^2 + 0.277\,t} \quad (6.1)$$ $e^{-1.63}$skilles ud som en del af konstantleddet: $780.\,e^{-1.63} = 152.8250678$ Løsningen: $N(t) = 152.825 \cdot e^{-0.00628\,t^2 + 0.277\,t}$

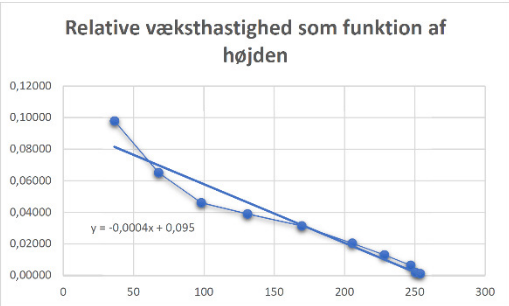
Øvelse 3.64

a) Vi har udregnet værdierne i excel

Dag	Højde i cm	Hældning	Rel. Væksthast
7	17,93		
14	36,36	3,559286	0,097890
21	67,76	4,410000	0,065083
28	98,1	4,517143	0,046046
35	131	5,100000	0,038931
42	169,5	5,321429	0,031395
49	205,5	4,200000	0,020438
56	228,3	2,971429	0,013015
63	247,1	1,585714	0,006417
70	250,5	0,478571	0,001910
77	253,8	0,285714	0,001126
84	254,5		

b) og c)

Graf tegnet i **excel**:



Eksport af data til **Maple** og grafttegning i Maple:

$N1 := [36.36, 67.76, 98.1, 131, 169.5, 205.5, 228.3, 247.1, 250.5, 253.8]:$

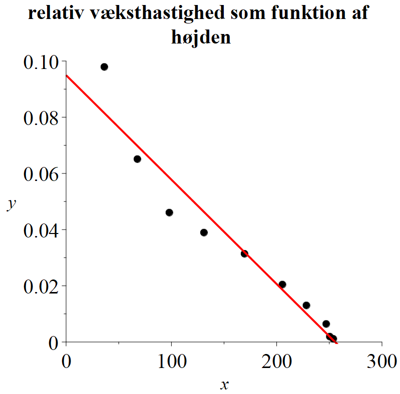
$N2 := [0.097890, 0.065083, 0.046046, 0.038931, 0.031395, 0.020438, 0.013015, 0.0064173, 0.0019105, 0.0011257]:$

$g(x) := LinReg(N1, N2, x)$

$$g := x \mapsto LinReg(N1, N2, x) \quad (7.1)$$

$evalf(g(x), 4) = -0.0003717\,x + 0.09496$

$display(pointplot([N1, N2], view = [0..300, 0..0.1], symbol = solidcircle, symbolsize = 15, size = [800, 800]), plot(g(x), x = 0..300, y = 0..0.1, thickness = 4, color = red))$



d)

Lad y være højden, så har vi fundet ud af:

$$\frac{y'}{y} = -0{,}0003717 \cdot y + 0.09496 \quad \text{, eller:} \quad y' = y \cdot (0.09496 - 0{,}0003717 \cdot y)$$

som kontrol ift data løser vi denne differentialligning:

e)

$evalf(dsolve(\{y' = y \cdot (-0.0003717\ y + 0.09496), y(35) = 131\}, y), 4)$

$$y(x) = \frac{4.480\ 10^6}{462700.\ e^{-0.09496\,x} + 17530.}$$

$$evalf\left(\frac{\frac{4.480\ 10^6}{17530}}{\frac{462700.}{17530} \cdot e^{-0.09496\,x} + \frac{17530.}{17530}}, 4\right) = \frac{255.6}{26.39\ e^{-0.09496\,x} + 1.000}$$

Det stemmer fint med tabellen s. 199 og grafen s 200 i bogen

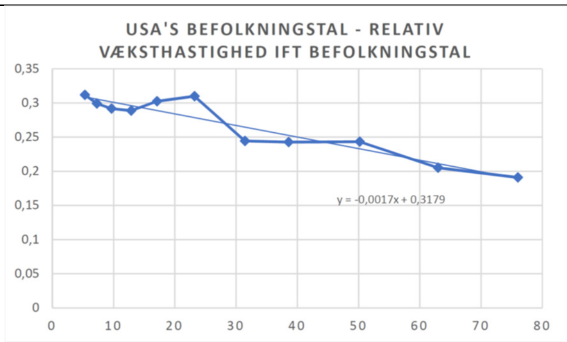
Øvelse 3.65

USA's befolkningstal. Vi har udregnet værdierne i excel

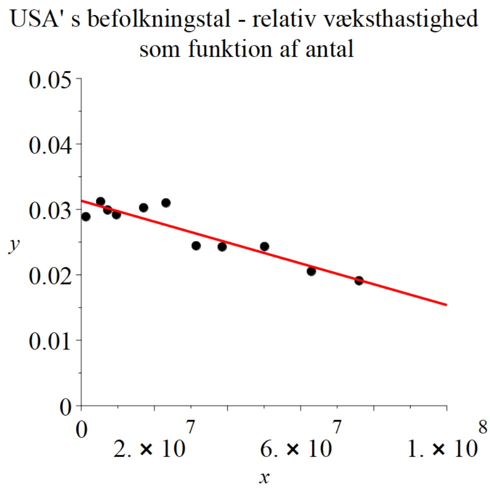
Årstal	år efter 1790	Antal indbyggere	Enhed million	Hældning, Væksthastighed	Relativ væksthastighed
1790	0	3929214	3,929		
1800	10	5308483	5,308	0,16553	0,03118
1810	20	7239881	7,240	0,21650	0,02990
1820	30	9638453	9,638	0,28131	0,02919
1830	40	12866020	12,866	0,37155	0,02888
1840	50	17069453	17,069	0,51629	0,03025
1850	60	23191876	23,192	0,71869	0,03099
1860	70	31443321	31,443	0,76832	0,02444
1870	80	38558371	38,558	0,93562	0,02427
1880	90	50155783	50,156	1,21947	0,02431
1890	100	62947714	62,948	1,29194	0,02052
1900	110	75994575	75,995	1,45123	0,01910
1910	120	91972266	91,972		

Graf tegnet i **excel**:

ISBN 9788770668781



Eksport af data til **Maple** og grafttegning i Maple:



regressionsformlen giver: *Relativ væksthastighed,* $\frac{y'}{y} = -1{,}594 \cdot y + 0{,}0313$. Dvs:

$y' = y \cdot (0{,}0313 - 1{,}594 \cdot y)$.

Løsning i Maple giver:

$$evalf\left(dsolve\left(\{y' = y \cdot (-1.59418452354381\ 10^{-10}\ y + 0.0313169530590565), y(50) = 17069453\}, y\right), 4\right)$$

$$y(x) = \frac{2.233\ 10^{20}}{5.719\ 10^{13}\ \mathrm{e}^{-0.03132\,x} + 1.137\ 10^{12}} \qquad \textbf{(8.4)}$$

$$evalf\left(\frac{\frac{2.233\ 10^{20}}{1.137\ 10^{12}}}{\frac{5.719\ 10^{13}}{1.137\ 10^{12}}\ \mathrm{e}^{-0.03132\,x} + 1}, 4\right)$$

$$\frac{1.964\ 10^{8}}{50.30\ \mathrm{e}^{-0.03132\,x} + 1.} \qquad \textbf{(8.5)}$$

Dvs øvre grænse var dengang 196,4 millioner

Øvelse 3.66

a) $h(x) = x$, og $g(y) = y + 1$; b) $h(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(y) = y^2$ c) $h(x) = 1$, $g(y) = \frac{y^2 - 4}{y}$

ISBN 9788770668781

Øvelse 3.67	Ved at opstille dsolve med angivelse af punktet får vi:

$$dsolve\left(\left\{y'=\frac{y^2}{x-3},\ y(2)=1\right\},\ y\right)$$

$$y(x) = -\frac{1}{-\mathrm{I}\,\pi+\ln(x-3)-1} \qquad (9.1)$$

Her indgår pludselig den komplekse enhed I. Vi prøver i stedet at gå tilbage til løsning uden punkt:

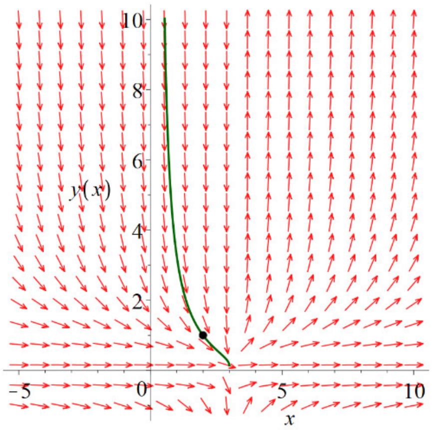
$$dsolve\left(y'=\frac{y^2}{x-3},\ y\right)$$

$$y(x) = -\frac{1}{\ln(x-3)-\_C1} \qquad (9.2)$$

I denne ligning kan vi se, at punktet ikke kan indsættes.
Man kunne tro, der ikke var nogen løsning, men i sådanne situationer tegner vi altid linjeelementer for at undersøge problemet (linjeelementer løser problemet numerisk.)

$$display\left(DEplot\left(\left[y'=\frac{y^2}{x-3}\right],[y(x)],x=-5..10,\ y=-1..10,\ [y(2)=1],\ arrows=smalltwo,\ linecolor=DarkGreen,\ thickness=4,\ numpoints=5000,\ size=[800,800]\right),\ pointplot([[2,1]],\ symbol=solidcircle,\ symbolsize=15,\ color=black)\right)$$

```
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were
issued:
   cannot evaluate the solution further right of 2.9999999,
probably a singularity
```



Vi får en advarsel om, at der kan være andre løsninger, men vi kan se, der er en gennem det søgte punkt. Problemet er, at Maple åbenbart vil bevare udtrykket $x-3$ som her er negativ.

Vi prøver nu at omskrive, ved at anvende numerisk værdi, som i Maple hedder absolut værdi:
$\mathrm{abs}(-7) = 7$
Den skrives også som vi kender det: $\mathrm{abs}(x-3) = |x-3|$
I området $x<3$ vil $x-3$ dette give en negativ værdi, derfor er $\mathrm{abs}(x-3) = -(x-3)$ i dette område, så
$-\mathrm{abs}(x-3) = (x-3)$ i dette område.
Derfor kan vi skrive:

$$dsolve\left(\left\{y'=\frac{y^2}{-\mathrm{abs}(x-3)},\ y(2)=1\right\},\ y\right)$$

$$y(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln(3-x)-1} & x<3 \\ undefined & x=3 \\ \dfrac{1}{1+\ln(x-3)} & 3<x \end{cases} \qquad (9.3)$$

Dvs løsningen i området $x<3$ er:

$$y(x) = -\frac{1}{\ln(3-x)-1} = \frac{1}{1-\ln(3-x)}$$

altså samme løsning vi fandt frem til ved atr regne i hånden

ISBN 9788770668781

Øvelse 3.68

I bogen skrives denne ved en fejl som : 4.48. Det er nr 3.68

De partikulære løsninger er:

$$dsolve\left(\left\{y'=\frac{x^2-1}{y},\ y(0.4)=1\right\},\ y(x)\right)$$

$$y(x)=\frac{\sqrt{3750\,x^3-11250\,x+9885}}{75} \qquad \textbf{(10.1)}$$

$$dsolve\left(\left\{y'=\frac{x^2-1}{y},\ y(-1)=1\right\},\ y(x)\right)$$

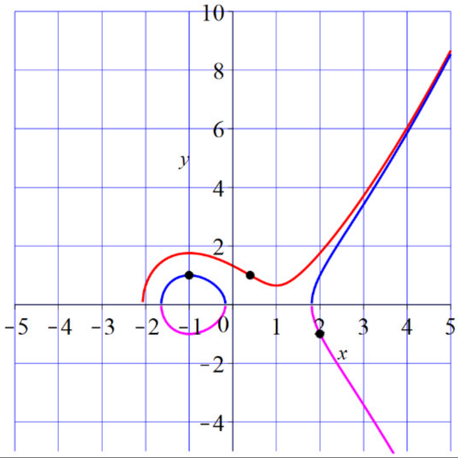
$$y(x)=\frac{\sqrt{6\,x^3-18\,x-3}}{3} \qquad \textbf{(10.2)}$$

$$dsolve\left(\left\{y'=\frac{x^2-1}{y},\ y(2)=-1\right\},\ y(x)\right)$$

$$y(x)=-\frac{\sqrt{6\,x^3-18\,x-3}}{3} \qquad \textbf{(10.3)}$$

Graferne af disse løsninger er den del af kurverne, som punktet ligger på:

$$display\left(plot\left(\left[\frac{\sqrt{3750\,x^3-11250\,x+9885}}{75},\ \frac{\sqrt{6\,x^3-18\,x-3}}{3},\ -\frac{\sqrt{6\,x^3-18\,x-3}}{3}\right], x=-5\,..5,\ y=-5\,..10,\ color=[red, blue, magenta], thickness=4\ , axis=[gridlines=[10, color=blue]], size=[800, 800]\right), pointplot([[0.4, 1], [-1, 1], [2,-1]], symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=black)\right)$$



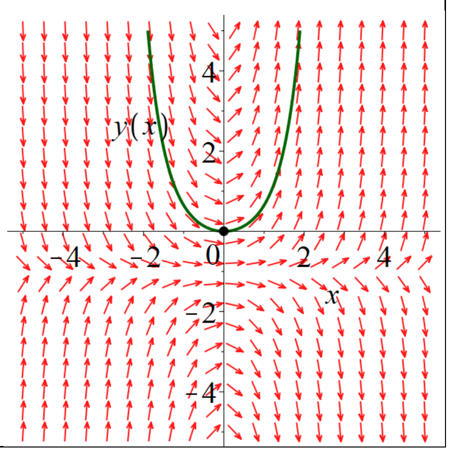
Øvelse 3.69

a)

$$display(DEplot([y'=x\cdot(y+1)], [y(x)], x=-5\,..5, y=-5\,..5, [y(0)=0], arrows=smalltwo, linecolor=DarkGreen, thickness=4, numpoints=5000, size=[600, 600]), pointplot([[0, 0]], symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=black))$$

$$dsolve\left(\left\{\ y'=\frac{x}{y},\ y(4)=3\right\},\ y(x)\right)$$

$$y(x)=\sqrt{x^2-7}$$

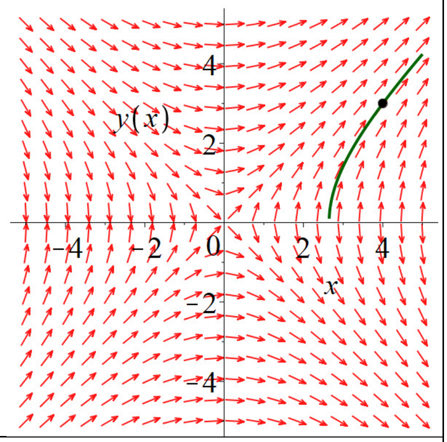


b)

$$display\left(DEplot\left(\left[y'=\frac{x}{y}\right], [y(x)], x=-5..5, y=-5..5, [y(4)=3], arrows=smalltwo, linecolor=DarkGreen, thickness=4, numpoints=5000, size=[600,600]\right), pointplot([[4,3]], symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=black)\right)$$

$$dsolve\left(\left\{y'=\frac{x}{y}, y(4)=3\right\}, y(x)\right)$$

$$y(x)=\sqrt{x^2-7}$$

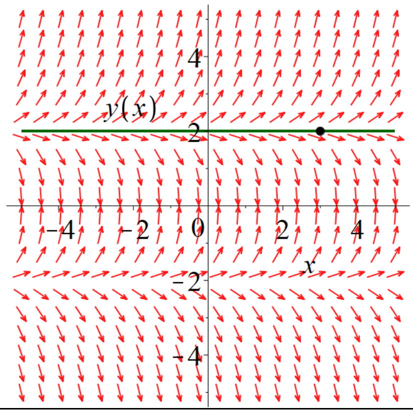


c)

$$display\left(DEplot\left(\left[y'=\frac{y^2-4}{y}\right], [y(x)], x=-5..5, y=-5..5, [y(3)=2], arrows=smalltwo, linecolor=DarkGreen, thickness=4, numpoints=5000, size=[600,600]\right), pointplot([[3,2]], symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=black)\right)$$

$$dsolve\left(\left\{y'=\frac{y^2-4}{y}, y(3)=2\right\}, y(x)\right)$$

$$y(x)=2$$



d)

$$display\left(DEplot\left(\left[y'=\frac{1}{(x+1)\cdot(2-y)}\right], [y(x)], x=-5..5, y=-5..5, [y(0)=0], arrows=smalltwo, linecolor=DarkGreen, thickness=4, numpoints=5000, size=[800,800]\right), pointplot([[0,0]], symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=black)\right)$$

ISBN 9788770668781

	$dsolve\left(\left\{y'=\frac{1}{(x+1)\cdot(2-y)}, y(0)=0\right\}, y(x)\right)$ $y(x)=2-\sqrt{4-2\ln(x+1)}$