ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 3A

Øvelse 3.1

Hent inspiration via linket, hvis der er planer om et samarbejde med billedkunst / dansk eller et andet fag.

Øvelse 3.2

a)
Halveringstiden er det stykke på 1.-aksen, man skal gå frem fra et givet udgangspunkt, for at nå det punkt, hvor aktiviteten (værdien på 2.-aksen er halvt så stor som ved udgangspunktet

b)
$N(t) = N_0 \cdot e^{-k\cdot t}$, så ligningen til at bestemme $T_{½}$ er:

$$N_0 \cdot e^{-k\cdot\left(t+T_{½}\right)} = \frac{1}{2}\cdot N_0 \cdot e^{-k\cdot t}$$

Med værktøj: $N_0 \cdot e^{-k\cdot\left(t+T_{½}\right)} = \frac{1}{2}\cdot N_0 \cdot e^{-k\cdot t} \xrightarrow{\text{solve for T\_½}} \left[\left[T_{½} = \frac{\ln(2)}{k}\right]\right]$

Løst i hånden:

$$N_0 \cdot e^{-k\cdot t - k\cdot T_{½}} = \frac{1}{2}\cdot N_0 \cdot e^{-k\cdot t} \quad \text{(potensregel)}$$

$$N_0 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot e^{-k\cdot T_{½}} = \frac{1}{2}\cdot N_0 \cdot e^{-k\cdot t} \quad \text{(forkort)}$$

$e^{-k\cdot T_{½}} = \frac{1}{2}$, tag nu ln på begge sider: $-k\cdot T_{½} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, og heraf: $T_{½} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-k}$

udnyt at $\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-1}$, $-k\cdot T_{½} = \ln\left(2^{-1}\right) = -\ln(2)$, så : $T_{½} = \dfrac{\ln(2)}{k}$

Gange nu over i de to formler med k og divider med $T_{½}$,så får du de to formler for k

c) Udfyld skemaet:

Stof	$T_{\frac{1}{2}}$	k
U-238	4,47 mia. år	
Bly-210	22,3 år	

Indsæt i $k = \dfrac{\ln(2)}{T_{½}}$:

U-238: $k = \dfrac{\ln(2.0)}{4.47\cdot 10^9} = k = 1.550664833\ 10^{-10}$

Bly-210: $k = \dfrac{\ln(2.0)}{22.3} = k = 0.03108283321$

Øvelse 3.3

Udgangspunktet er: $k_2 \cdot N_2(t) = k_2 \cdot c \cdot e^{-k_2\cdot t} + R$

a) Sæt *t*=0, og træk *R* over på venstre side, så har vi dér det ønskede udtryk.
Sæt *t*=0 ind i eksponentialfunktionen og udnyt, at $a^0 = 1$ for alle tal *a*, så har vi højre side
b) Gang ligningen igennem med $e^{k_2\cdot t}$, og udnyt $e^{-k_2\cdot t}\cdot e^{k_2\cdot t} = e^0 = 1$, så har vi det ønskede

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

	c) Indsættes a) i b) får vi $k_2 \cdot N_2(t) \cdot e^{k_2 \cdot t} = k_2 \cdot c + R \cdot e^{k_2 \cdot t}$ $k_2 \cdot N_2(t) \cdot e^{k_2 \cdot t} = k_2 \cdot N_2(0) - R + R \cdot e^{k_2 \cdot t}$ $k_2 \cdot N_2(t) \cdot e^{k_2 \cdot t} = k_2 \cdot N_2(0) + R \cdot \left(e^{k_2 \cdot t} - 1\right)$ $k_2 \cdot N_2(t) \cdot e^{k_2 \cdot t} - R \cdot \left(e^{k_2 \cdot t} - 1\right) = k_2 \cdot N_2(0)$ d) *t* regnes fra 1665. I 1965 er *t*=300. Indsæt dette og $k_2 = 0.0311$, og udregn: $e^{0.0311 \cdot 300} - 1 = 11270.13149$ e) Forskellen på om vi medtager "-1" ovenfor eller ej er underv 0,1 promille, så den sidste ligning i c) bliver i 1965 til: $k_2 \cdot N_2(300) \cdot 11270 - R \cdot 11270 = k_2 \cdot N_2(0)$, og når vi kalder $k_2 \cdot N_2(300)$ for *B* får vi: $B \cdot 11270 - R \cdot 11270 = k_2 \cdot N_2(0)$ $(B - R) \cdot 11270 = k_2 \cdot N_2(0)$
Øvelse 3.4	a) Aktiviteten i mængden af det radioaktive bly til tiden *t* er $k_2 \cdot N_2(t)$. Aktiviteten ved starttidspunktet for 300 år siden er derfor $k_2 \cdot N_2(0)$ b) Ved indsættelse af formlen fra øvelse 3.2 ser vi: $e^{-k_2 \cdot t} = e^{-\ln(2) \cdot \frac{t}{T_{½}}}$ Hvis tidsenheden skifter fra år til døgn, så ganges *t* med 365.Men det gør halveringstiden jo også, da den også skal måles i døgn. I brøken $\frac{t}{T_{½}}$ forkortes de to gange 365 væk, så der bliver ingen forskel om vi regner i år eller døgn. Eller en anden tidsenhed.
Øvelse 3.5	1 mol u-238 vejer 238 g. Indeholder $6.02 \cdot 10^{23}$ atomer a) 1 g U-238 indeholder: $\frac{6.02 \cdot 10^{23}}{238} = 2.529411765\ 10^{21}$ atomer b) 1 g med 4% rent U-238 indeholder: $0.04 \cdot \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{238} = 1.011764706\ 10^{20}$ c) Antal omdannelser er $k \cdot N$ hvor *k* er henfaldskonstanten og *N* er antal atomer (1 g med 4% rent U-238). *k* er opgivet i enheden år, så vi udrergner først antal omdennelsert pr grapr år: $1.550664833\ 10^{-10} \cdot 1.011764706\ 10^{20} = 1.568907949\ 10^{10}$ Omdannelser pr minut: $\frac{1.568907949\ 10^{10}}{365 \cdot 24 \cdot 60} = 29849.84682$ **Altså cirka 30.000**
Øvelse 3.6	De 87000 for det første maleri i tabellen kom fra udregningen: $(B - R) \cdot 11270$ 1. Kristus og disciplene $(8.5 - 0.8) \cdot 11270 = 86779.0$ Vi udregner det samme for de øvrige: 2. Fødderne vaskes $(12.6 - 0.26) \cdot 11270 = 139071.80$ 3. En kvinde læser noder $(10.3 - 0.3) \cdot 11270 = 112700.0$ 4. En kvinde spillerf Luth $(8.2 - 0.17) \cdot 11270 = 90498.10$ 5. Kniplersken $(1.5 - 1.4) \cdot 11270 = 1127.0$ 6. Soldaten og den smilende pige $(5.2 - 6.0) \cdot 11270 = -9016.0$ **De 4 første er falsknerier, de to sidste frikendes** (Det negative tal må skyldes måleusikkerhed)

ISBN 9788770668781

Løsninger til øvelser i kapitel 3A

Øvelse 3.7

a)

$dsolve(\{y'(x) = 2, y(1) = 2\}) =$

$$y(x) = 2x$$

b)

$dsolve(\{y'(x) = 4x + 3, y(0) = 8\})$

$$y(x) = 2x^2 + 3x + 8$$

Øvelse 3.8

Tegning af et enkelt linjeelement, i dette tilfælde et linjeelemenet til en løsningskurve til differentialligningen: $y'(x) = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x$ der går gennem et bestemt punkt, hvor $y' = 0$:

a)

$y' = 0$ giver $0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x = 0$, dvs: $\boldsymbol{y = x}$

Vi vælger nogle punkter, f.ex: $(-2, -2)$, $(3, 3)$, $(7, 7)$

En metode til **selv** at tegne et linjeelement er:

1. Afsæt punktet

2. Udregn hældningen a med differentialligningen, opstil en retningsvektor: $\langle 1, a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$, og

dernæst en enhedsvektor parallel med retningsvektoren: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$

3. Opstil en parameterfremstilling for et linjestykke gennem puinktet og med denne retningsvektor. Lad parameteren løbe fra feks. -1 til +1, og tegn denne.

I spørgsmål a) er der vandret tangent, så $a = 0$ og retningsvektoren er $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Parameterfremstillinger for linjer gennem de tre punkter er derfor:

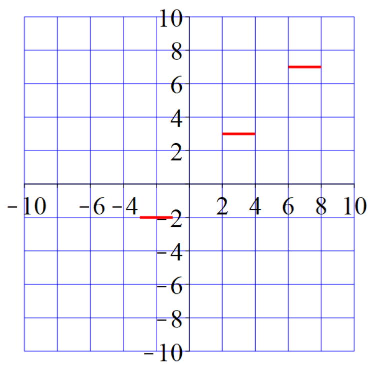
$(-2, -2)$: $\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -2 + t \\ -2 \end{bmatrix}\right)$

$(3, 3)$: $\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 3 + t \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

$(7, 7)$: $\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 7 + t \\ 7 \end{bmatrix}\right)$

Tegning af linjeelementer:

$plot([[-2 + t, -2, t = -1..1], [3 + t, 3, t = -1..1], [7 + t, 7, t = -1..1]], view = [-10..10, -10..10],$
$\quad axis = [gridlines = [10, color = blue]], color = red, thickness = 4, size = [600, 600])$



ISBN 9788770668781

b)

Tegne linjeelementerv med hældning 1 og hældning -1:

$y' = -1$ giver ligningen: $-1 = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x$ eller: $\underline{y = x - 2}$

Eksempler på punkter: $(-3, -5)\,(1, -1),\ (6, 4)$

Eksempler på parameterfremstillinger

$$(-3,-5): \qquad \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -3 + \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -5 - \frac{t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right)$$

$$(6,4): \qquad \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 6 + \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 4 - \frac{t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right)$$

$y' + -1$ giver ligningen: $1 = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x$ eller: $\underline{y = x + 2}$

Eksempler på punkter: $(-3, -1)\,(1, 3),\ (6, 8)$

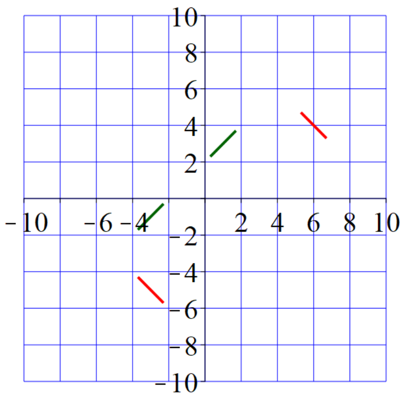
Eksempler på parameterfremstillinger

$$(-3,-1): \qquad \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -3 + \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right)$$

$$(1,3): \qquad \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 3 + \frac{t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right)$$

Grafisk billede:

$$\mathit{display}\left(\mathit{plot}\left(\left[\left[-3 + \frac{t}{\sqrt{2}}, -5 - \frac{t}{\sqrt{2}}, t = -1..1\right], \left[6 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 4 - \frac{t}{\sqrt{2}}, t = -1..1\right]\right], \mathit{view} = [-10..10, -10..10], \mathit{axis} = [\mathit{gridlines} = [10, \mathit{color} = \mathit{blue}]], \mathit{color} = \mathit{red}, \mathit{thickness} = 4, \mathit{size} = [600, 600]\right), \mathit{plot}\left(\left[\left[-3 + \frac{t}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, t = -1..1\right], \left[1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 3 + \frac{t}{\sqrt{2}}, t = -1..1\right]\right], \mathit{view} = [-10..10, -10..10], \mathit{axis} = [\mathit{gridlines} = [10, \mathit{color} = \mathit{blue}]], \mathit{color} = \text{"DarkGreen"}, \mathit{thickness} = 4, \mathit{size} = [600, 600]\right)\right)$$



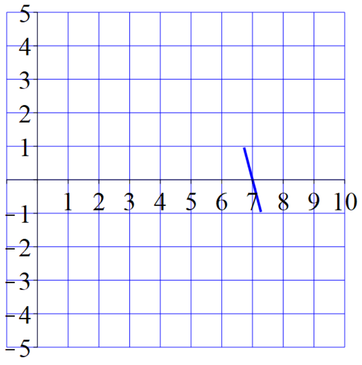
ISBN 9788770668781

c)

Vi viser én af udregningerne, ud fra punktet $(7, 0)$:

Hældningen findes ved ar indsætte i: $y'(x) = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x$: $y'(x) = 0.5 \cdot 0 - 0.5 \cdot 7 = -3.5$

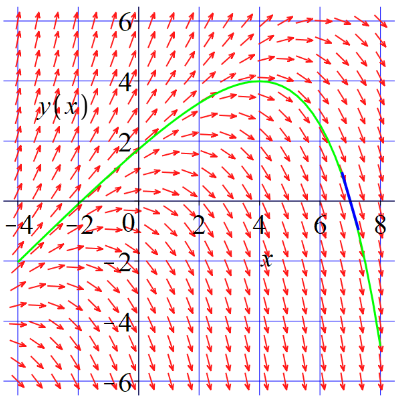
Retningsvektor: $\langle 1, -3.5 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \end{bmatrix}$



d)

Kontrol af at løsningskurve og linjeelement passer sammen.

$display(DEplot([y'(x) = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x], [y(x)], x = -4..8, y = -6..6, [y(7) = 0], arrows = smalltwo, linecolor = green, size = [600, 600]), plot([7 + 0.275 \cdot t, -0.962 \cdot t, t = -1..1], view = [-4..8, -6..6], axis = [gridlines = [10, color = blue]], color = blue, thickness = 4, size = [600, 600]))$

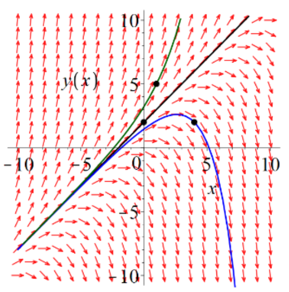


Øvelse 3.9

Samme differentialligning: $y'(x) = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x$

a) og b) Vi tegner hældningsfelt og de tre kurver:

$display(DEplot(y'(x) = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x, y(x), x = -10..10, y = -10..10, [y(0) = 2, y(4) = 2, y(1) = 5], arrows = smalltwo, linecolor = [black, blue, DarkGreen], size = [600, 600]), pointplot([[0, 2], [4, 2], [1, 5]], symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = black))$



c)

$y = x + 2$ indsættes i differentioallignignen $y'(x) = 0.5 \cdot y(x) - 0.5\,x$:

Venstre side: $(x + 2)' = 1$

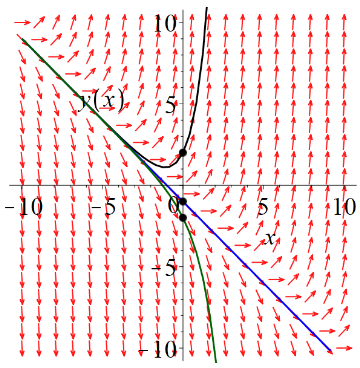
Højre side: $(0.5 \cdot (x + 2) - 0.5\,x) = 1.0$

Da Vensre side = Højre side er $y = x + 2$. Det er funktionen med den rette linje som graf.

ISBN 9788770668781

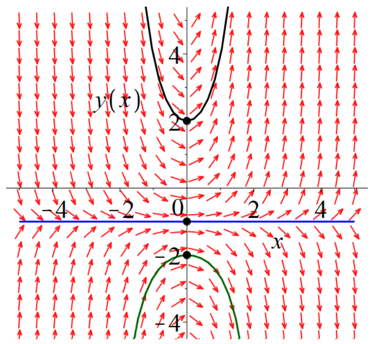
Øvelse 3.10

a) Vi tegner først uden kurver og vælger så punkterne [[0, 2], [0, -1], [0, -2]]



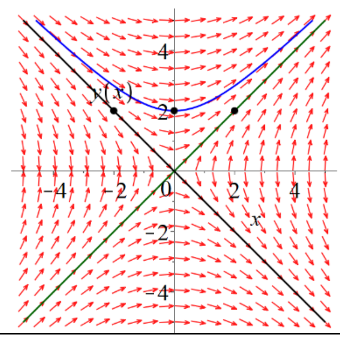
Opdeling af planen i områder: Ved at gøre prøve ses, at den lineære funktion $y=-x-1$ er en løsning.
Mulige ekstrema: $y'=0$ giver $y=-x$. Dvs evt. ekstrema for løsningskurver optræder på linjen $y=-x$.
Monotoniforhold:
1. I området *under* linjen $y=-x-1$ ser vi: Hvis $y<-x-1$ er $y'=y+x<-x-1+x=-1$, så funktionerne her er aftagende og graferne *bliver* i området under linjen, da hældningen i ethvert punkt er mindre end linjens hældning.
2. I området *over* linjen $y=-x$ ser vi: Når $y>-x$ er $y'=y+x>-x+x=0$, altså $y'>0$ dvs alle løsningskurver er voksende
3. I området *over* linjen $y=-x-1$ ser vi: $y'=y+x>-x-1+x=-1$, og: I området *under* linjen $y=-x$ ser vi: $y<-x$ giver $y'=y+x<-x+x=0$. Så i området *mellem* de to linjer ligger y' mellem -1 og 0. løsningskurverne er i denne strimmel aftagende.
4. **Konklusion:** Derfor er ethvert ekstremum et minimum

b) Vi tegner først uden kurver og vælger så punkterne [0, 2], [0, -1], [0, -2]



Opdeling af planen i områder: Ved at gøre prøve ses, at den lineære funktion $y=-1$ er en løsning.
Mulige ekstrema: $y'=0$ giver $x=0$ eller $y+1=0$ dvs $y=-1$.
Tilfældet $y=-1$ kan vi se bort fra, da funktionen her er konstant
Mulige ekstrema er på linjen $x=0$
Monotoniforhold:
Opdel i de 4 områder bestemt af linjerne: $x=0$, og $y=-1$.
Følg metoden i a) og nå frem til
Løsningskurverne *over* linjen $y=-1$ er aftagende frem til $x=0$ derefter voksende, Så de mulige ekstrema er minima
Løsningskurverne *under* linjen $y=-1$ er voksende frem til $x=0$ derefter aftagende, Så de mulige ekstrema er maksima

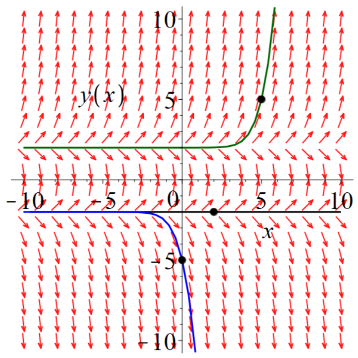
c) Vi tegner først uden kurver og vælger så punkterne [-2, 2], [0, 2], [2, 2]



L&R Uddannelse
EGMONT

Opdeling af planen i områder: Ved at gøre prøve ses, at de lineære funktioner $y = x$ og $y = -x$ er løsninger. Ved at se på ligningen ses, at $y = 0$ er forbudt område. Disse linjer opdeler planen i 6 områder
Mulige ekstrema: $y' = 0$ giver $x = 0$. De mulige ekstrema må derfor ligger der på linjen $x = 0$
Monotoniforhold: Se på de 6 områder med samme metode som ovenfor
Løsningskurverne *over* begge de skrå linjer er aftagende frem til $x = 0$ derefter voksende, Så de mulige ekstrema er minima
Løsningskurverne *under* begge de skrå linjer er voksende frem til $x = 0$ derefter aftagende, Så de mulige ekstrema er maksima
Løsningskurverne *under* $y = -x$ og *over* $y = 0$ er aftagende.
Løsningskurverne *over* $y = x$ og *under* $y = 0$ er voksende.
Løsningskurverne *under* $y = -x$ og *over* $y = 0$ er aftagende.
Løsningskurverne *over* $y = x$ og *under* $y = 0$ er voksende.

d) Vi tegner først uden kurver og vælger så punkterne [2, -2], [0, -5], [5, 5]



Opdeling af planen i områder: Ved at gøre prøve ses, at de konstante funktioner $y = 2$ og $y = -2$ er løsninger. Ved at se på ligningen ses, at $y = 0$ er forbudt område. Disse linjer opdeler planen i 4 områder
Mulige ekstrema: $y' = 0$ giver $y = 2$ eller $y = -2$. Dette er konstante funktioner så ingen ekstrema
Monotoniforhold: Se på de 4 områder med samme metode som ovenfor
Løsningskurverne *under* $y = -2$ er aftagende
Løsningskurverne *under* $y = 0$ og *over* $y = -2$ er voksendea
Løsningskurverne *under* $y = 2$ og *over* $y = 0$ er aftagende.
Løsningskurverne *over* $y = 2$ er voksende.

Øvelse 3.11

1. *Væksthastigheden* oversættes til $\dfrac{dy}{dt}$

2. *Accelerationen* ($v = \dfrac{dy}{dt}$) oversættes til $\dfrac{dv}{dt}$ eller $\dfrac{d^2y}{dt^2}$

3. Den *relative væktshastighed* oversættes til $\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

Øvelse 3.12

SD-diagrammet angiver *ændring* i temperaturen *T*, og oversættes til:

$$T' = ind - ud$$
$$T' = k \cdot S - k \cdot T$$
$$T' = k \cdot (S - T)$$
$$T' = -k \cdot (T - S)$$

som er Newtons afkølingslov: *ændring i temperatur er proportional med forskellen aktuelle temperatur og omgivelsernes temperatur*
Bemærk: Negativ konstant, svarer til normale situation: Temperaturen aftager

ISBN 9788770668781

Øvelse 3.13	a) Tegn som i 3.12, hvor $k=0{,}001$ kun peger på udgangshanen, og *stuetemperatur S* erstattes af *indløb 0,4*. b) Mængden af vand betegnes *V*. $V'=ind-ud$ $V'=0{,}4-0{,}001\cdot V$, hvor enheden er liter/sek
Øvelse 3.14	a) Antal individer betegnes med *y*. Tegningen kan udføres flere måder, men tager vi ordret beskrivelsen, så introduceres *forskellen mellem 2600 og antallet af individer* med en hjælpevariabel $R(y)=2600-y$, se praxisboksen s 148. Denne er placeret i venstre del af SD-diagrammet, og der går en pil fra den tilstandsvariable (kassen) ned til hjælpevariablen, og en pil fra hjælpevariablen hen til indgangshanen. Der går yderligere ven pil fra den tilstandsvariable hen til indgangshanen. Og der indføres en konstant *k*, med en pil op til indgangshanen. b) Diagrammet (eller teksten direkte) giver: $y'=ind-ud$, hvor beskrivelsen i a) kan giver et *ind*-led: $y'=k\cdot y\cdot(2600-y)$
Øvelse 3.15	a) $L1 := [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:$ $L2 := [0.23, 0.21, 0.203, 0.191, 0.171, 0.167, 0.152]:$ $LinReg(L1, L2, t) = -0.0125714285714286\,t + 0.277142857142857$ b) $\frac{dN}{dt} = N(t)\cdot(-0.01257\,t+0.2771)$ c) $simplify\left(expand\left(evalf\left(dsolve\left(\left\{N(7)=80, \frac{dN}{dt}=N(t)\cdot(-0.01257\,t+0.2771)\right\}, N(t)\right), 3\right)\right)\right)$ $N(t) = 15.7\,e^{-0.0063\,t^2+0.2770\,t}$ **(9.1)**
Øvelse 3.16	a) $dsolve(f'(t)=0.036\cdot f(t), f(t)) =$ $f(t) = \_C1\,e^{\frac{9t}{250}}$ $dsolve(y'(t)=60-0.002\cdot y(t), y(t))$ $y(t) = 30000 + e^{-\frac{t}{500}}\,\_C1$ b) $evalf\left(dsolve\left(\left\{v'(t)=9.8-0.08\cdot\frac{v(t)}{t+1}, v(0)=0\right\}, v(t)\right), 3\right)$ $v(t) = 9.07\,t + 9.07 - \frac{9.07}{(t+1.)^{2/25}}$ c) $evalf\left(dsolve\left(\left\{\frac{dB}{dt}=0.000155\cdot B(t)\cdot(2000-B(t)), B(0)=50\right\}, B(t)\right), 3\right)$ $B(t) = \frac{2000.}{1.+39.\,e^{-0.310\,t}}$
Øvelse 3.17	Differentialligningen er: $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}+y$. Vi undersøger om funktionen $f(x)=x^2\cdot e^x$ er en løsning ved at udregne venstre og højre side: *venstre side*: $(f(x))'=\left(x^2\cdot e^x\right)'=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$ *højre side*: $\frac{2y}{x}+y=\frac{2\cdot x^2\cdot e^x}{x}+x^2\cdot e^x=2\cdot x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$ Højre og venstre side er ens, så *f* er en løsning
Øvelse 3.18	Differentialligningen er: $\frac{dy}{dx}=0{,}5\cdot y$. Vi undersøger om funktionen $f(x)=4\cdot e^{0{,}5x}$ er en løsning ved at udregne venstre og højre side:

L&R Uddannelse EGMONT

venstre side: $\left(f(x)\right)' = \left(4\cdot e^{0,5x}\right)' = 4\cdot 0,5\cdot e^{0,5\cdot x} = 2\cdot e^{0,5\cdot x}$

højre side: $0,5\cdot y = 0,5\cdot 4\cdot e^{0,5x} = 2\cdot e^{0,5x}$

Højre og venstre side er ens, så *f* er en løsning

Øvelse 3.19

Væksthastigheden er $\frac{dN}{dt}$, dvs $0,00013\cdot N(t)\cdot(1000-N(t))$

Indsæt $N(0)=50$: Væksthastigheden er: $0,00013\cdot 50\cdot(1000-50)=6,175$

Øvelse 3.20

(I bogen hedder øvelse 4.20, det skal være 3.20)

Differentialligningen er: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{y}$

Tangentligningen har formen $y = a\cdot x + b$, hvor a er hældningen i punktet $(2, 4)$

$$\frac{x^2+1}{y} = \frac{2^2+1}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

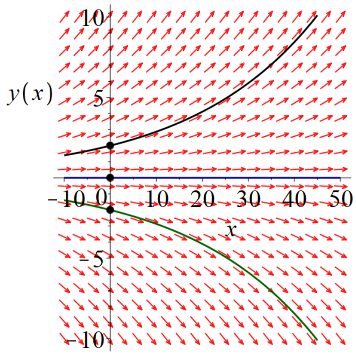
så ligningen er $y = 1.25\,x + b$

Indsæt $(2, 4)$: $4 = 1.25\cdot 2 + b$ der giver $b = 1.5$

Konklusion: Tangentligning er $y = 1.25\,x + 1.5$

Øvelse 3.21

a) og b): Grafvinduet: Da konstanten 0,036 er så lille vælges at lade *x* løbe fra -10 til 50.
Vi vælger tre punkter: (0,2), (0,0) og (0,-2), der giver de tre principielt forskellige løsningskurver.

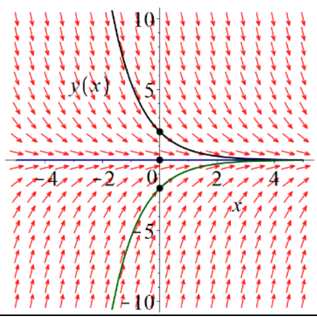


Kurven i den negative halvplan er ikke en mulighed for populationsmodeller.
Kurven der følger *x*-aksen svarer til at alle er døde.
c) Ifølge sætning 1 er den fuldstændige løsning:
$f(t) = c\cdot e^{0.036\cdot t}$.

Kurven svarende til $f(0)=17,4$ er: $f(t) = 17,4\cdot e^{0.036\cdot t}$

Øvelse 3.22

a) og b): Grafvinduet: Konstanten er -1, så vi lader *x* løbe fra -5 til 5.
Vi vælger tre punkter: (0,2), (0,0) og (0,-2), der giver de tre principielt forskellige løsningskurver.



c) Ifølge sætning 1 er den fuldstændige løsning: $f(t) = c\cdot e^{-t}$.

Kurven svarende til $f(1)=1$ er: $f(t) = e\cdot e^{-t} = e^{1-t}$

Øvelse 3.23

a) Differentialligningen skrives som i sætning 2: $y' = 50 - 0,2\cdot y$.

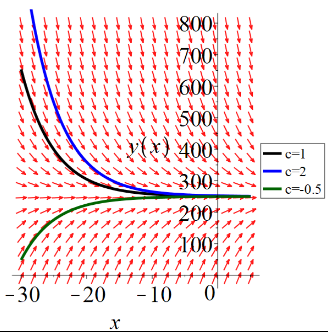
Indsæt i formlen: $y(t) = c\cdot e^{-0,2\cdot t} + \frac{50}{0.2} = c\cdot e^{-0,2\cdot t} + 250$

b) Maple giver samme løsning:

$evalf(dsolve(y' = -0.2\cdot y + 50, y), 2)$

$$y(x) = 250. + e^{-0.20\,x}\_C1$$

c) De tre grafer tegnes i samme billede som linjeelementerne. Vi ser de følger linjeelementerne fint.

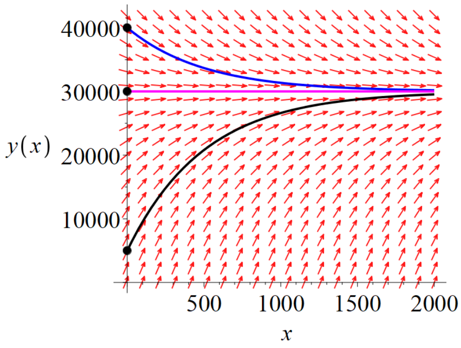


ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 3.24

a): Grafvinduet: Da konstanten 0,002 er så lille vælges at lade *x* løbe fra -10 til 2000. Da den vandrette asymptote er $y = \dfrac{60}{0{,}002} = 30000$,
vælges et y-interval fra 0 til 42000.
Af differentialligningen $y' = 60 - 0{,}002y$ ses, at:
$y' > 0$, når $y < 30000$, $y' = 0$ når $y = 30000$ og $y' < 0$, når $y > 30000$. Det giver tre principielt forskellige løsningskurver.
Vi vælger tre punkter: (0,5000),(0,30000) og (0,40000), der giver eksempler på de tre principielt forskellige løsningskurver.



b) Uanset udgangspuinkt opstår ligevægt mht forureningen: Tilføres mere foruering, fjernes der også mere og omvendt.

c) Vi indsætter i løsningsformlen: $y = c \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{b}{a}$: $M(t) = 30000 - 25000 \cdot e^{-0.002 \cdot t}$

Øvelse 3.25

Hvis $a > 0$ vil $y = c \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{b}{a} \to \dfrac{b}{a}$, når $t \to \infty$, og $y = c \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{b}{a} \to \pm\infty$, når $t \to \infty$, hvor plus eller minus afgøres af *c*.

så $y = \dfrac{b}{a}$ er en vandret asymptote (for $t \to \infty$)

Hvis $a < 0$ vil $y = c \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{b}{a} \to \dfrac{b}{a}$, når $t \to -\infty$, og $y = c \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{b}{a} \to \pm\infty$, når $t \to \infty$, , hvor plus eller minus afgøres af *c*.

så $y = \dfrac{b}{a}$ er en vandret asymptote (for $t \to -\infty$)

Fortegnet for *b* spiller ingen rolle for karakteren af asymptote, kun for hvor den ligger.

Øvelse 3.26

Løsningen til differentialligningen er $B(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$
Da der er tale om henfald, er *k* negativ.

a) Vi ved: $T_{½} = \dfrac{\ln(½)}{k} = -\dfrac{\ln(2)}{k}$. Indsæt $T_{½} = 3000$: $3000 = -\dfrac{\ln(2)}{k}$ giver $k = -0{,}000231$

b) $B(t) = 80 \cdot e^{-0.000231 \cdot t}$

c) $B(t) = 13$ giver $t = 7866$ døgn, eller ca 21,5 år

d) Tag SD-diagrammet s 158, og erstat *s=60* med s=0.020, og *k=0,02* med $k = 0{,}000231$ idet minustegnet er indeholdt i : Ind - Ud
Differentialligningen: $B'(t) = 0{,}02 - 0{,}000231 \cdot B(t)$

e) $B(t) = 86{,}6 - 6{,}58 e^{-0.000231 \cdot t}$

f) Når $t \to \infty$ vil $B(t) = 86{,}6 - 6{,}58 e^{-0.000231 \cdot t} \to 86{,}6$
Den konstante tilførsel af nyt bly og samtidig udskillelse fra kroppen, giver anledning til en ligevægtsværdi af bly i kroppen på 86,6 mg

Øvelse 3.27

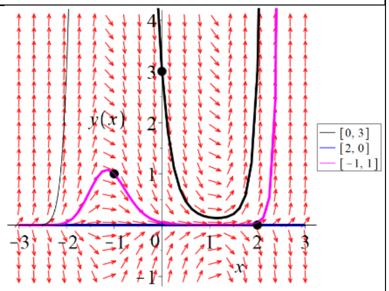
a) $y' - 2x \cdot y = 0$

b) Vi gangede med $e^{-k \cdot x}$ fordi ligningen indeholdt et $-k$ foran *y*, og fordi vi ved differentiation af $e^{-k \cdot x}$ som sammensat funktion, netop får et $-k$ ført ned ved differentiation af den indre funktion.
Her står der $-2x$ foran *y*. Hvis dette skal komme ved differentiation af en indre funktion, skal denne være $-x^2$, så vi skal gange med e^{-x^2} :

ISBN 9788770668781

	$y'\cdot e^{-x^2}-2x\cdot y\cdot e^{-x^2}=0\cdot e^{-x^2}$ $y'\cdot e^{-x^2}-y\cdot\left(2x\cdot e^{-x^2}\right)=0$ Vi ser parentesen er differentialkvotienten af e^{-x^2} $y'\cdot e^{-x^2}-y\cdot\left(e^{-x^2}\right)'=0$ d) Produktreglen med y som f og e^{-x^2} som g, giver så: $\left(y\cdot e^{-x^2}\right)'=0$ e) Monotonisætningen giver at funktionen i parentesen så er konstant: $y\cdot e^{-x^2}=\text{konstant, } c$ Gange med e^{x^2} på begge sider giver: $y\cdot e^{-x^2}\cdot e^{x^2}=c\cdot e^{x^2}$ $y\cdot e^{-x^2+x^2}=c\cdot e^{x^2}$ $y\cdot e^{0}=c\cdot e^{x^2}$ $y=c\cdot e^{x^2}$
Øvelse 3.28	a) $y'=\cos(x)\cdot y$ $y'-\cos(x)\cdot y=0$ b) Her står der $-\cos(x)$ foran *y*. Hvis dette skal komme ved differentiation af en indre funktion, skal denne være $-\sin(x)$, så vi skal gange med $e^{-\sin(x)}$: $y'\cdot e^{-\sin(x)}-\cos(x)\cdot y\cdot e^{-\sin(x)}=0\cdot e^{-\sin(x)}$ $y'\cdot e^{-\sin(x)}-y\cdot\left(\cos(x)\cdot e^{-\sin(x)}\right)=0$ $y'\cdot e^{-\sin(x)}-y\cdot\left(e^{-\sin(x)}\right)'=0$ d) Produktreglen med y som f og $e^{-\sin(x)}$ som g, giver så: $\left(y\cdot e^{-\sin(x)}\right)'=0$ e) Monotonisætningen giver at funktionen i parentesen så er konstant: $y\cdot e^{-\sin(x)}=\text{konstant, } c$ Gange med $e^{\sin(x)}$ på begge sider giver: $y\cdot e^{-\sin(x)}\cdot e^{\sin(x)}=c\cdot e^{\sin(x)}$ $y\cdot e^{-\sin(x)+\sin(x)}=c\cdot e^{\sin(x)}$ $y\cdot e^{0}=c\cdot e^{\sin(x)}$ $y=c\cdot e^{\sin(x)}$
Øvelse 3.29	Bevis for sætning 3: Løsning af $y'=f(x)\cdot y$ a) og b) $y'-f(x)\cdot y=0$ Her står der $-f(x)$ foran *y*. Hvis dette skal komme ved differentiation af en indre funktion, skal denne være $-F(x)$, så vi skal gange med $e^{-F(x)}$: $y'\cdot e^{-F(x)}-f(x)\cdot y\cdot e^{-F(x)}=0\cdot e^{-F(x)}$ $y'\cdot e^{-F(x)}-y\cdot\left(f(x)\cdot e^{-F(x)}\right)=0$ $y'\cdot e^{-F(x)}-y\cdot\left(e^{-F(x)}\right)'=0$ c) Produktreglen med y som f og $e^{-F(x)}$ som g, giver så: $\left(y\cdot e^{-F(x)}\right)'=0$

ISBN 9788770668781

	d) Monotonisætningen giver at funktionen i parentesen så er konstant: $y\cdot e^{-F(x)}=\text{konstant, } c$ Gange med $e^{\sin(x)}$ på begge sider giver: $y\cdot e^{-F(x)}\cdot e^{F(x)}=c\cdot e^{F(x)}$ $y\cdot e^{-F(x)+F(x)}=c\cdot e^{F(x)}$ $y\cdot e^{0}=c\cdot e^{F(x)}$ $y=c\cdot e^{F(x)}$
Øvelse 3.30	a) Grafvinduet: vi laver et lille grafvindue, da faktorerne hurtigt vokser: x løber fra -3 til 3, y fra -1 til 4. Punkterne giver tre meget forskellige løsningskurver.  b) En stamfunktion til $f(x)=3x^2-4$ er $F(x)=x^3-4x$ så den fuldstændige løsning er: $y=c\cdot e^{x^3-4x}$. c) De tre løsninger: $y=3\cdot e^{x^3-4x}$, $y=0$, $y=e^3\cdot e^{x^3-4x}$ d) Maple giver løsningen på formlen: $y=c\cdot e^{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$. ved kontrol: $x\cdot(x-2)\cdot(x+2)=x^3-4x$
Øvelse 3.31	Antag $h_1(x)$ og $h_2(x)$ er løsninger til $y'=f(x)\cdot y$, dvs: $h_1(x)'=f(x)\cdot h_1(x)$ og $h_2(x)'=f(x)\cdot h_2(x)$ Sæt $z=s_1\cdot h_1(x)+s_2\cdot h_2(x)$ Så er: $z'=\left(s_1\cdot h_1(x)+s_2\cdot h_2(x)\right)'$ $z'=s_1\cdot h_1'(x)+s_2\cdot h_2'(x)$ $z'=s_1\cdot f(x)\cdot h_1(x)+s_2\cdot f(x)\cdot h_2(x)$ $z'=f(x)\cdot\left(s_1\cdot h_1(x)+s_2\cdot h_2(x)\right)$ $z'=f(x)\cdot z$ Dvs $z=s_1\cdot h_1(x)+s_2\cdot h_2(x)$ er en løsning til differentialligningen.
Øvelse 3.32	a) Homogene: $y'=-2y$ $y'+2y=0$ $y'\cdot e^{2x}+2y\cdot e^{2x}=0\cdot e^{2x}$ (e^{2x} erpositiv, så vi må gange med det) $y'\cdot e^{2x}+y\cdot\left(2\cdot e^{2x}\right)=0$ (faktorernes orden er ligegyldig) $y'\cdot e^{2x}+y\cdot\left(e^{2x}\right)'=0$ (reglen for sammensat differentiation) $\left(y\cdot e^{2x}\right)'=0$ (produktregel) $y\cdot e^{2x}=\text{konstant, c}$ (monotonisætningen) $y\cdot e^{2x}\cdot e^{-2x}=c\cdot e^{-2x}$ e^{-2x} erpositiv, så vi må gange med det $y\cdot e^{2x-2x}=c\cdot e^{-2x}$ (potensregel) $y\cdot e^{0}=c\cdot e^{-2x}$ $y=c\cdot e^{-2x}$ (potensregel) b) Inhomogene $y'=-2y+e^x$ $y'+2y=e^x$

ISBN 9788770668781

	$y'\cdot e^{2x}+2y\cdot e^{2x}=e^{x}\cdot e^{2x}$ (e^{2x} er positiv, så vi må gange med det) $y'\cdot e^{2x}+y\cdot\left(2\cdot e^{2x}\right)=e^{3x}$ (faktorernes orden er ligegyldig - og potensregel) $y'\cdot e^{2x}+y\cdot\left(e^{2x}\right)'=e^{3x}$ (reglen for sammensat differentiation) $\left(y\cdot e^{2x}\right)'=e^{3x}$ (produktregel) c) Integration $y\cdot e^{2x}=\int e^{3x}dx$ sætningen om samtlige stamfunktioner $y\cdot e^{2x}=\frac{1}{3}e^{3x}+c$ d) Isolere y $y\cdot e^{2x}\cdot e^{-2x}=\left(\frac{1}{3}e^{3x}+c\right)\cdot e^{-2x}$ e^{-2x} er positiv, så vi må gange med det $y\cdot e^{2x}\cdot e^{-2x}=\frac{1}{3}e^{3x}\cdot e^{-2x}+c\cdot e^{-2x}$ $y\cdot e^{2x-2x}=\frac{1}{3}e^{3x-2x}+c\cdot e^{-2x}$ (potensregel) $y\cdot e^{0}=\frac{1}{3}e^{x}+c\cdot e^{-2x}$ $y=\frac{1}{3}e^{x}+c\cdot e^{-2x}$ (potensregel)
Øvelse 3.33	Beviset ligger på website
Øvelse 3.34	a) $y'=y+x\cdot e^{x}$, her er $f(x)=1$ og $g(x)=x\cdot e^{x}$, så $F(x)=x$ Indsæt i formlen i sætning 4: $y=c\cdot e^{x}+e^{x}\cdot\int x\cdot e^{x}\cdot e^{-x}dx$ $y=c\cdot e^{x}+e^{x}\cdot\int x\,dx$ $y=c\cdot e^{x}+e^{x}\cdot\frac{1}{2}x^{2}$, eller $y=\frac{1}{2}x^{2}\cdot e^{x}+c\cdot e^{x}$ b) $y'=2x\cdot y+x$, her er $f(x)=2x$ og $g(x)=x$, så $F(x)=x^{2}$ Indsæt i formlen i sætning 4: $y=c\cdot e^{x^2}+e^{x^2}\cdot\int x\cdot e^{-x^2}dx$ $y=c\cdot e^{x^2}+e^{x^2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\int -2x\cdot e^{-x^2}dx$ $y=c\cdot e^{x^2}+e^{x^2}\cdot(-)\cdot e^{-x^2}$, eller $y=c\cdot e^{x^2}-\frac{1}{2}$ $y(0)=1$ giver $c=\frac{3}{2}$, så $y=\frac{3}{2}\cdot e^{x^2}-\frac{1}{2}$ c) $y'=-\frac{1}{x}\cdot y+\frac{1}{1+x^2}$, her er $f(x)=-\frac{1}{x}$ og $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$, så $F(x)=-\ln(x)$ Indsæt i formlen i sætning 4: $y=c\cdot e^{-\ln(x)}+e^{-\ln(x)}\cdot\int\frac{1}{1+x^2}\cdot e^{\ln(x)}dx$ $y=c\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\int\frac{1}{1+x^2}\cdot x\,dx$ $y=c\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\,dx$, eller $y=\frac{c}{x}+\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ $y(1)=2$ giver $c=2-\frac{1}{2}\ln(2)$, så $y=\frac{2}{x}-\frac{\ln(2)}{2x}+\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$
Øvelse 3.35	Se bogens website
Øvelse 3.36	a) Se formlerne side 170: $F_{tyngde}=m\cdot g$ og $F=m\cdot v'(t)$ giver: $v'(t)=g$ Stamfunktion: $v(t)=g\cdot t+k$, og starthastighed = 0, dvs $v(0)=0$, der giver $k=0$, så $v(t)=g\cdot t$ b)

L&R Uddannelse EGMONT

	$v(t)=s'(t)$, så $s(t)$ er stamfunktion til $v(t)=g\cdot t$, dvs: $s(t)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+k$. $s(0)=0$ giver $k=0$, så $s(t)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$ c) $v(t)=343$ giver $g\cdot t=343$, dvs $t=\dfrac{343}{9,8}=35$ d) Indsæt 35 i $s(t)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$: $s(t)=\frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot 35^2=6002$ dvs 6 km, hvis der5 ingen luftmodstand var. e) Strækning = 36500 m, tiden: Løs $36500=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$, giver: $t=86,3\text{sek}$, hastigheden: indsæt tiden: $v=9,8\cdot 86,3=845,74$ m/s $=3044$ km/h
Øvelse 3.37	a) Vi udnytter formlen for sammenhæng mellem $T_{½}$ og henfaldskonstant, *k*: $T_{½}=\dfrac{\ln(½)}{k}$: $k=\dfrac{\ln(½)}{5000}=-0,0001386\approx-0,000139$, hvilket giver formlen. b) Vi regner i %, så lufttæthed = $100\cdot e^{-0,0001386\cdot x}$. Indsæt x=30000: Lufttæthed = 1.56%. Eller: 30 km er 6 halveringer: $\left(\frac{1}{2}\right)^6=1,56$ c) $100\cdot e^{-0,0001386\cdot x}=1$ giver x= 33226
Øvelse 3.38	Indsæt værdierne: $A=0,45$, $C=1,3$, $m=120$, $g=9,8$, $\rho(x)=1,2\cdot e^{-0.000139\cdot x}$ i $y'=\dfrac{A\cdot C}{m}\cdot\rho(x)\cdot y-2\cdot g$: $y'=\dfrac{0,45\cdot 1,3}{120}\cdot 1,2\cdot e^{-0.000139\cdot x}\cdot y-2\cdot 9,8=0.00585e^{-0.000139\cdot x}\cdot y-19,6$
Øvelse 3.39	a) De fire grafer har hver sin farve, der svarer hver sin linje af enheder markeret under 1. aksen. Graferne for tryk og tæthed har forløb der ligner eksponentielt aftagende funktioner. Graferne for temperatur og for lydens hastighed fortæller, at disse varierer betydeligt med en slags faseovergange når vi bevæger os op gennem de forskellige luftlag i atmosfæren. b) Lad $f(x)$ angive lydens hastighed som funktion af højden *x.* $[0;11]$: $f(0)=340$, $f(11)=295$, så $f(x)=-4,09x+340$ $[11;20]$: $f(11)=295$, $f(20)=295$,så $f(x)=295$ $[20;31]$: $f(20)=295$, $f(31)=302$,så $f(x)=0,636x+282,28$ $[31;40]$: $f(31)=302$, $f(40)=316$,så $f(x)=1,556x+253,76$
Øvelse 3.40	a), b), c) og d): Segrafen side 176 e) Løs $0.00585e^{-0.000139\cdot x}\cdot y-19,6=0$ mht. *y*: $y=3350,43\cdot 1,000139^x$ *y*=kvadratet på hastigheden vokser frem til vi møder ligevægtskurven, hvorefter den aftager. Det samme mønster følger derfor også hastigheden f) Alle løsningskurver, dvs spring fra enhver højde vil følge samme mønster, man vil ramme ligevægtskurven. Denne er eksponentielt voksende, så man vil ikke flytte punktet, dvs. den højde, hvor man rammer kurven, særlig meget ved at springe fra større

ISBN 9788770668781

	højder. Men man vil opnå en større hastighed, når det sker. De sidste 8-10 km af faldet er stort set identisk uanset højden.
Øvelse 3.41	a) Anvend den interaktive model på website til at give en anslået værdi af højden b) Leg selv med at skrue på parameterværdierne.