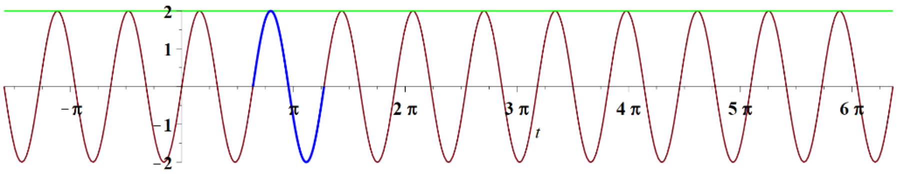
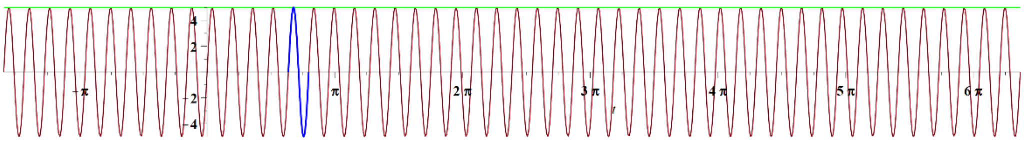
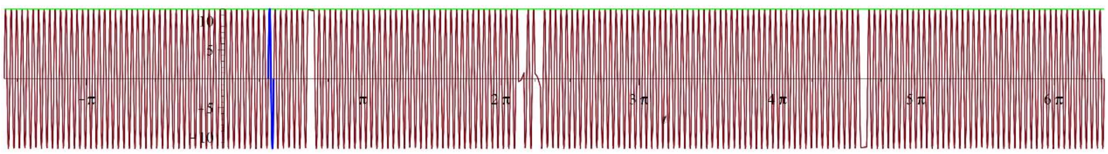
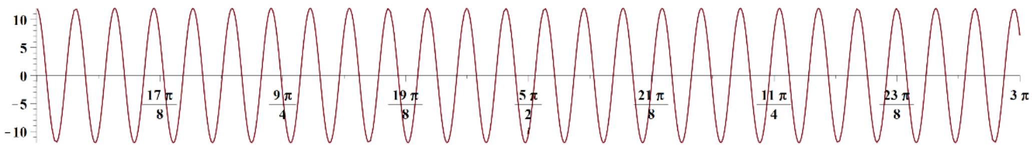
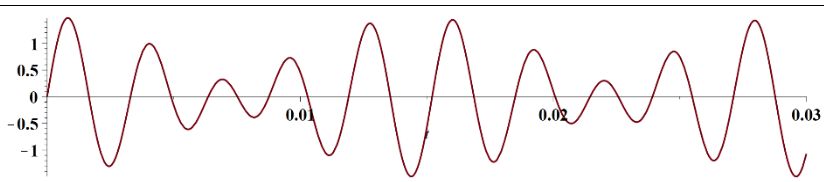
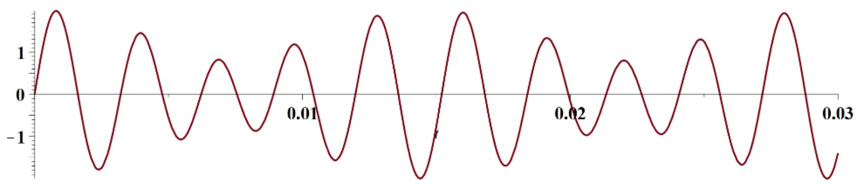
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 1

Øvelse 1.1	Afspil animationerne og forklar med dine egne ord, hvad du ser.
Øvelse 1.2	a) Afspil lydfilerne og forklar med dine egne ord, hvad du hører. b) Frekvenserne fordobles for hver oktav. c) Søg fx her: https://da.wikipedia.org/wiki/Kammertonen
Øvelse 1.3	Vi har tegnet graferne, indrettet x-aksen med π-inddelinger (det behøver man ikke), lagt grønne vandrette linjer ind med y-værdi =maks, og sværtet én periode til med blåt. Det giver følgende:
	a)  Amplitude = 2, periode = 2
	b)  Amplitude = 5, periode = 0.5
	c)  Amplitude = 12, periode = $\frac{1}{8}=0.125$
	Ekstra: Hvad sker der i de "hvide vinduer" i den sidste? Lad os zoome ind:  Det ser helt normalt ud. Så forklaringen har ikke noget med funktionen at gøre. Men det skyldes, at et værktøjsprogram som Maple udregner værdierne i et begrænset antal punkter, og forbinder disse med bløde kurver. For en sinuskurve som denne med mange svingninger kan der ske det, at karakteristiske værdier som maks og min og nulpunkter ikke alle er blandt de, der udregnes. Og så kan Maples kurve køre "hen over" et maksimumspunkt eller hen over et nulpunkt. Når vi zoomer ind og får flere beregninger, ser vi det normale billede.
Øvelse 1.4	**a)** Vi laver superposition af grundtonerne C (frekvens 261,6) og E (frekvens 329,6):  **b)** Vi kobler tonen G på (frekvens 392), med amplitude 0.5:  c) Eksperimenter selv videre. Gå ind på Gert Uttenthals hjemmeside, http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/stemning/index.htm og konstruer lyd, som du kan høre.

ISBN 9788770668781

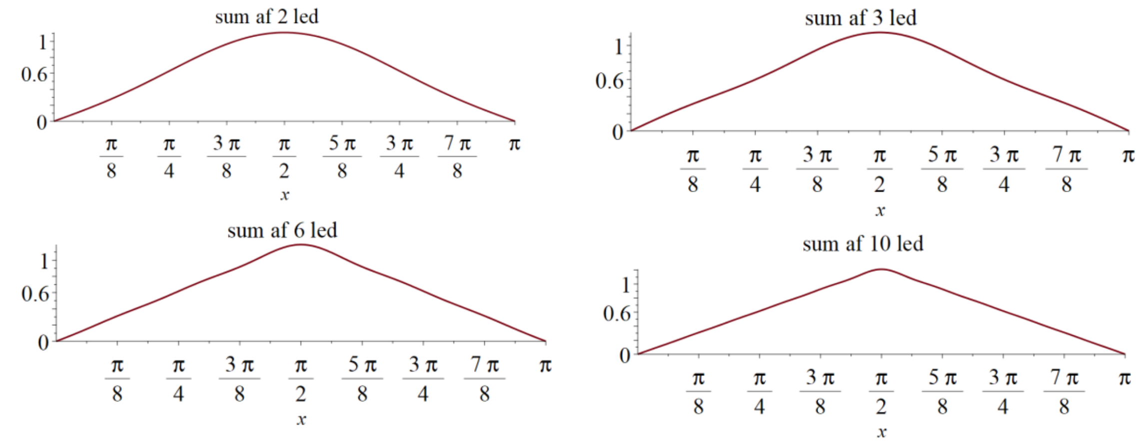
L&R Uddannelse
EGMONT

Øvelse 1.5

(Skriv funktionerne med brug af $\sum_{i=0}^{n}$, så er det lettest at lægge flere led til.

Vi plotter over intervallet $[0;\pi]$, man kan selv vælge et større interval for at se det periodiske.

a)



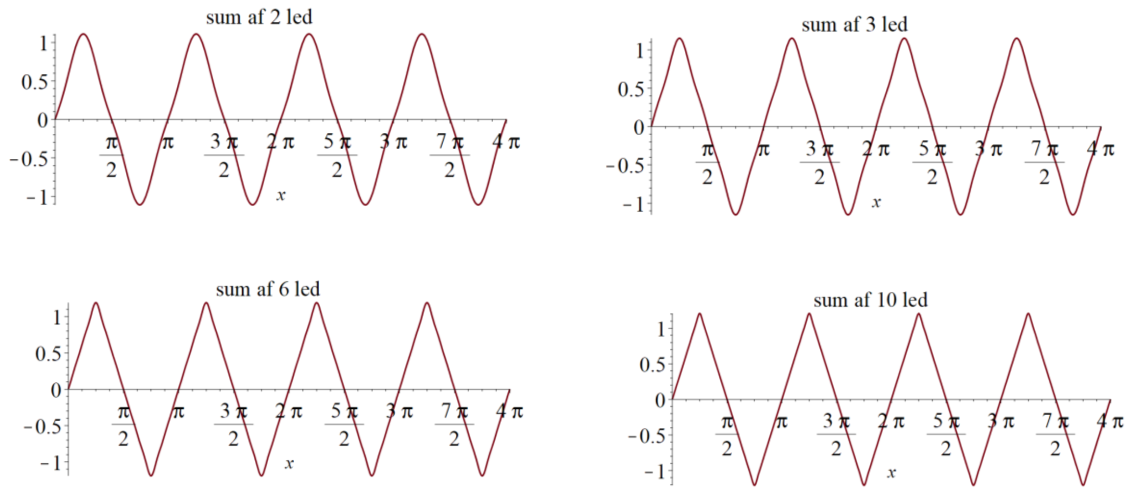
Graferne nærmer sig hurtigt en skaldt **trekantsgraf**, med bredde (grundlinje) π.

Højden: Læg mærke til, at værdien i 1 af den sidste er: $f9(1.0) = 0.7832326076$ og at $\frac{\pi}{4}$

$\xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.7853981635$

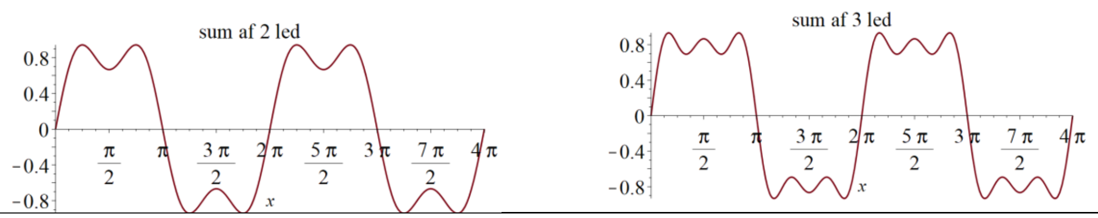
b)

Her plottes over et større interval for at vise periodiciteten



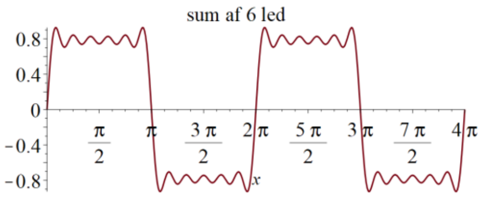
Graferne nærmer sig igen hurtigt en såkaldt **trekantsgraf**, med bredde (grundlinje) $\frac{\pi}{2}$. Vi har her valgt at medtage flere perioder. Læg mærke til, at eneste forskel til a) er halveringen af grundlinjerne.

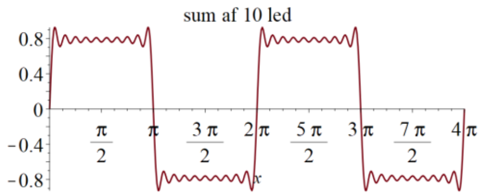
c)



ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT



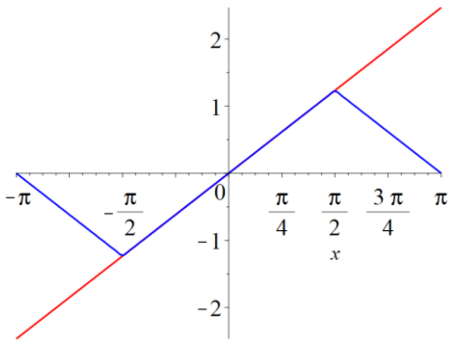


Graferne nærmer sig hurtigt en såkaldt **firkantsgraf**, med bredde lig med π.

En tilnærmelse til højden kan vi få af $h9\left(\frac{\pi}{2.0}\right) = 0.7604599046$, og at $\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{at 10 digits}}$ 0.7853981635

d1)

Vi vælger nu at tage 20 led med og fokusere på intervallet $[-\pi; \pi]$. Vi så ovenfor, at for a) er sum-funktionens **værdi i 1 tæt ved $\frac{\pi}{4}$**, dvs hældningen på trekantens skrå side er ca. $\frac{\pi}{4}$. Derfor afbilder vi sum-funktionen sammen med linjen med denne hældning:



Vi tillader os at konkludere, at i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ gælder:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2\cdot k+1)^2} \cdot \sin((2\cdot k+1)\cdot x) = \frac{\pi}{4}\cdot x$$

eller:

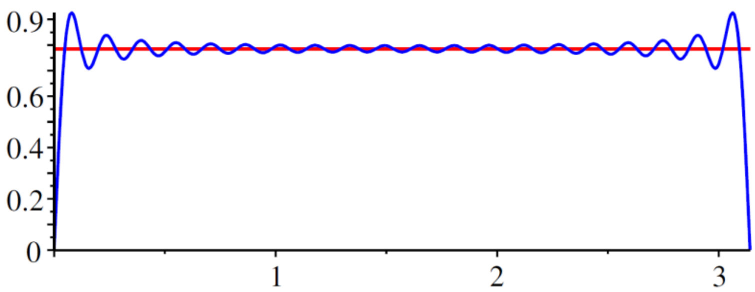
$$\frac{\pi}{4}\cdot x = \sin(x) - \frac{1}{9}\cdot\sin(3x) + \frac{1}{25}\cdot\sin(5x) - \frac{1}{49}\cdot\sin(7x) + \frac{1}{81}\cdot\sin(9x) - \ldots + (-1)^k \cdot \frac{1}{(2\cdot k+1)^2}\cdot\sin((2\cdot k+1)\cdot x) + \ldots$$

d2)

Vi vælger nu at tage 20 led med og fokusere på intervallet $[-\pi; \pi]$. Vi så ovenfor, at for c) er sum-funktionens **værdi i $\frac{\pi}{2}$ tæt ved $\frac{\pi}{4}$**. Derfor afbilder vi sum-funktionen sammen med den konstante funktion $y = \frac{\pi}{4}$:

$$h19(x) := \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{(2\cdot k+1)}\cdot\sin((2\cdot k+1)\cdot x):$$

$$plot\left(\left\{h19(x), \frac{\pi}{4}\right\}, x = 0..\pi,\ color = [red, blue], axesfont = [arial, 12], size = [400, 200]\right)$$



ISBN 9788770668781

Vi tillader os at konkludere, at i hvert fald midt i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ gælder:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\cdot k+1)} \cdot \sin((2\cdot k+1)\cdot x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{eller:}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sin(x) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3x) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5x) + \frac{1}{7}\cdot\sin(7x) + \frac{1}{9}\cdot\sin(9x) + \ldots + \frac{1}{(2\cdot k+1)}\cdot\sin((2\cdot k+1)\cdot x) + \ldots$$

(Det gælder faktisk i *hele* det åbne interval).

e)

Sinus-værdierne i $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$ skifter mellem +1 og -1. Overvej selv dette ud fra enhedscuirklen.

Indsættes $\frac{\pi}{2}$ i **d1)** får vi derfor:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \frac{1}{121} + \frac{1}{169} - \ldots, \text{ idet } \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Og indsættes $\frac{\pi}{2}$ i **d1)** får vi derfor:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$$

Øvelse 1.6	Eksperimenter selv
Øvelse 1.7	Grafen er tegnet i selve øvelsen

Øvelse 1.8

a)

$L18 := [15, 30, 45, 60, 90]:$

$M18 := \left[seq\left(\frac{a}{360}\cdot 2\cdot\pi, a = L18\right)\right] = \left[\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$

$\left[\frac{1}{12}\text{Pi}, \frac{1}{6}\text{Pi}, \frac{1}{4}\text{Pi}, \frac{1}{3}\text{Pi}, \frac{1}{2}\text{Pi}\right] \xrightarrow{\text{at 5 digits}} [0.26180, 0.52361, 0.78540, 1.0472, 1.5708]$

b)

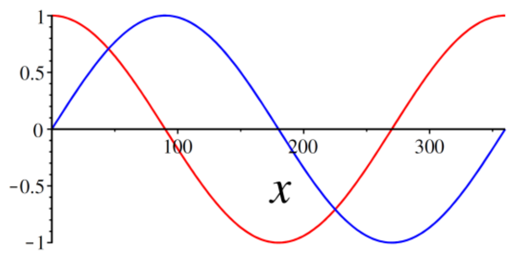
$L182 := \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]:$

$M182 := \left[seq\left(\frac{a}{2\pi}\cdot 360, a = L182\right)\right] = [30, 45, 60, 90, 150, 135]$

Øvelse 1.9

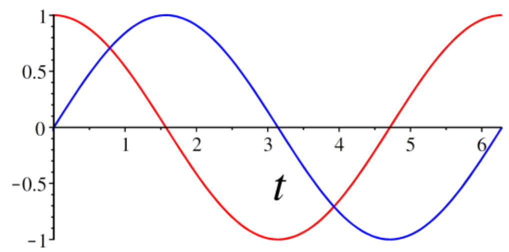
a)

$plot(\{Sin(x), Cos(x)\}, x = 0..360, color = [red, blue], font = [arial, 6], axesfont = [arial, 12], size = [400, 200])$



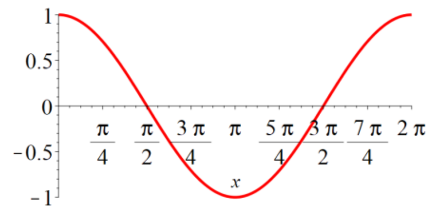
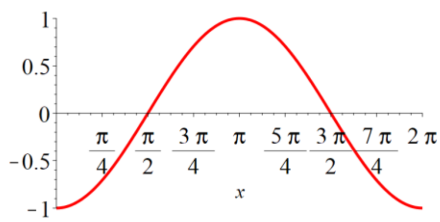
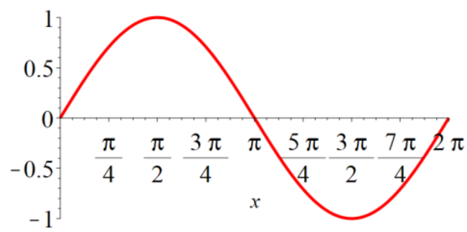
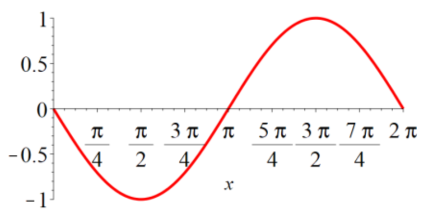
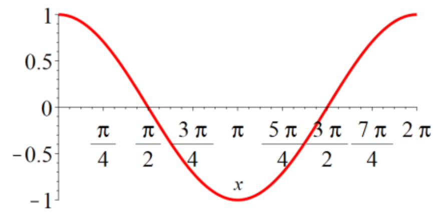
b)

$plot(\{\sin(t), \cos(t)\}, view = [0..2\pi, -1..1], color = [red, blue], font = [arial, 6], axesfont = [arial, 12], size = [400, 200])$



ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 1.10	Eksperimenter selv
Øvelse 1.11	Se på tegningen over enhedscirklen: 1) Trekanten i 1. kvadrant drejes over i trekanten i 2. kvadrant, når *t* erstattes med $t+\frac{\pi}{2}$ Ved drejningen bliver den vandrette katete, svarende til cos(*t*), drejet over i den lodrette katete, svarende til $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$, så de to er lige store og begge positive.'
	2) Trekanten i 1. kvadrant drejes over i trekanten i 4. kvadrant, når *t* erstattes med $t-\frac{\pi}{2}$ Ved drejningen bliver den lodrette katete, svarende til sin(*t*), drejet over i den vandrette katete, svarende til $\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$, så de to er lige store og begge positive.
	3) At *t* erstattes med $t+\frac{\pi}{2}$ betyder at nulpunktet flyttes hen i $-\frac{\pi}{2}$. Dvs grafen for sinus forskydes med $-\frac{\pi}{2}$.
	4) At *t* erstattes med $t-\frac{\pi}{2}$ betyder at nulpunktet flyttes hen i $+\frac{\pi}{2}$. Dvs grafen for cosinus forskydes med $+\frac{\pi}{2}$.
Øvelse 1.12	plot({cos(x), sin(x+π/2}, x = 0 .. 2π, color = [red, green], thickness = 5, size = [800, 400])  Graferne er sammenfaldende
Øvelse 1.13	Se på øvelse 1.11: 1) Hvad sker der med den lodrette katete ved drejningen med $+\frac{\pi}{2}$?
	2) Hvad sker der med den vandrette katete ved drejningen med $-\frac{\pi}{2}$?
	3) Hvad sker der med den vandrette katete, og hvad sker der med den lodrette katete ved drejningen med $+\pi$?
Øvelse 1.14	**a)** **1a:** plot({-cos(x), cos(π-x)},...  Graferne er sammenfaldende **1b:** plot({sin(x), sin(π -x)}, ...  Graferne er sammenfaldende
	2a: plot({-sin(x), sin(-x)}, ...  Graferne er sammenfaldende **2b:** plot({cos(x), cos(-x)},...  Graferne er sammenfaldende

b)
Lad x være en vinkel i 1. kvadrant. Tegn linjen til retningspunktet og marker $\sin(x)$ og $\cos(x)$.

- Spejl denne linje i y-aksen, indse at retningspunktet føres over i retningspunktet for $\pi - x$ og marker $\sin(\pi - x)$ og $\cos(\pi - x)$.
- Spejl denne linje i x-aksen, indse at retningspunktet føres over i retningspunktet for $-x$ og marker $\sin(-x)$ og $\cos(-x)$.

Se nu, at identiteterne holder.

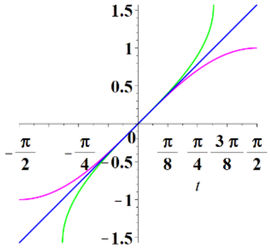
c)
Cos-grafen er symmetrisk om *y*-aksen: Ved spejling heri går grafen over i sig selv.
Sin-grafen er symmetrisk om $(0,0)$: Ved drejning på 180° herom går grafen over i sig selv.

d)
$2\pi - x$ på enhedscirklen fremkommer ved at gå *en hel omgang frem* fra $-x$. Men så er cos-. og sin-værdierne de samme

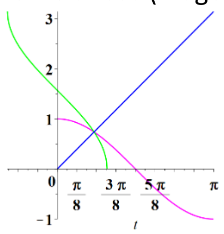
Øvelse 1.15

a)
Sinus er værdien af 2.- koordinaten til retningspunktet. I intervallet vil denne værdi vokse.
Cosinus er værdien af 1.- koordinaten til retningspunktet. I intervallet vil denne værdi aftage.

b)
Graferne af sin (magenta) og arcsin (grøn) er hinandens spejlbilleder i linjen y=x:



c)
Graferne af cos (magenta) og arccos (grøn) er hinandens spejlbilleder i linjen y=x:



d)
Vi argumenterer geometrisk:
Ved spejling i linjen y=x bliver (x,y) ført over i (y,x).
Givet to punkter på en graf, $P(x_1,y_1)$ og $Q(x_2,y_2)$, hvor $x_1 < x_2$.
De spejlede punkter er $P_s(y_1,x_1)$ og $Q_s(y_2,x_2)$
voksende betyder, at linjen fra *P* til *Q* vil have positiv hældning. Det vil den spejlede linje så også, og $y_1 < y_2$, så vi går fremad på aksen. Derfor er den spejlede funktion også voksende.
aftagende betyder, at linjen fra *P* til *Q* vil have negativ hældning. Det vil den spejlede linje så også have (prøv at tegne situationen). Men her er $y_2 < y_1$. Så går vi *frem* i *x*-aksens retning fra Q_s til P_s, dvs fra y_2 til y_1, så vil de *spejlede y*-værdier gå fra x_2 til x_1 og $x_2 > x_1$, dvs funktionen er aftagende.

Øvelse 1.16

Brug fx *intervalsolve* i Maple:
a) [.3682678934, 2.773324760]
b) [-3.021302771, -.1202898824]
c) [1.338718644, 4.944466663]
d) [-1.998308592, -1.143284062]

Øvelse 1.17

Det vandrette stykke i den lille gule trekant er: $\cos(t_0) - \cos(t_0 + h) = -(\cos(t_0 + h) - \cos(t_0))$.

sinus til vinkel u i den lille gule trekant er derfor: $\sin(u) \approx \frac{-(\cos(t_0+h)-\cos(t_0))}{h}$. u er med tilnærmelse lig med v, så denne størrelse er med tilnærmelse $\sin(v)$, eller $\sin(t_0)$: $\sin(t_0) \approx \frac{-(\cos(t_0+h)-\cos(t_0))}{h}$.

Når $h \to 0$ bliver tilnærmelsen bedre og bedre, brøken har grænseværdien $\sin(t_0)$:

$$\frac{-(\cos(t_0+h)-\cos(t_0))}{h} \to \sin(t_0)\text{, eller: } \frac{\cos(t_0+h)-\cos(t_0)}{h} \to -\sin(t_0)\text{, når } h \to 0.$$

Dvs: cosinus er differentiabel med $\cos'(t) = -\sin(t)$

Øvelse 1.18

Da $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2}-t)$ er :

$$\cos'(t) = \left(\sin(\tfrac{\pi}{2}-t)\right)' = \sin'(\tfrac{\pi}{2}-t)\cdot(\tfrac{\pi}{2}-t)' = \cos(\tfrac{\pi}{2}-t)\cdot(-1) = \sin(t)\cdot(-1) = -\sin(t)$$

Øvelse 1.19

$$\left(\sin(t)\right)'' = \left(\left(\sin(t)\right)'\right)' = \left(\cos(t)\right)' = -\sin(t)$$

$$\left(\cos(t)\right)'' = \left(\left(\cos(t)\right)'\right)' = \left(-\sin(t)\right)' = -\left(\sin(t)\right)' = -\cos(t)$$

Øvelse 1.20

$s(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t)$

$$\left(s(t)\right)'' = \left(A\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)'' = A\cdot\left(\sin(\omega\cdot t)\right)'' = A\cdot\left(\left(\sin(\omega\cdot t)\right)'\right)' = A\cdot\left(\sin'(\omega\cdot t)\cdot(\omega\cdot t)'\right)'$$

$$= A\cdot\left(\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega\right)' = A\cdot\left(\cos'(\omega\cdot t)\cdot(\omega\cdot t)'\cdot\omega\right) = A\cdot\left(-\sin(\omega\cdot t)\cdot\omega\cdot\omega\right) = -A\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\omega^2$$

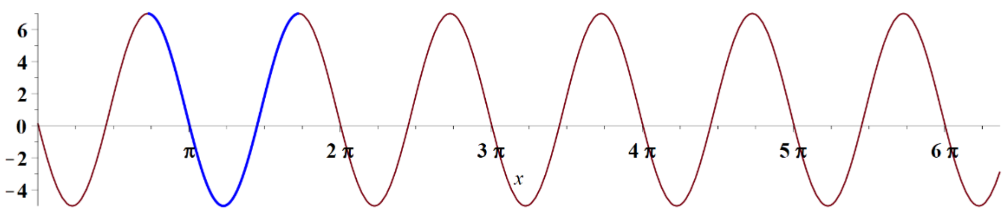
$$= -s(t)\cdot\omega^2 = -\omega^2\cdot s(t)$$

Øvelse 1.21

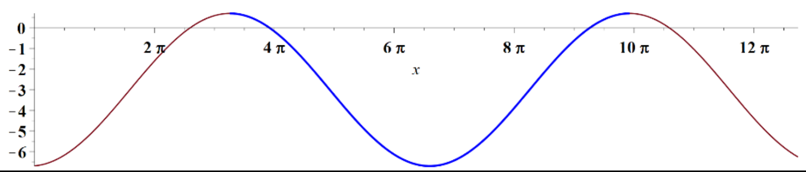
a)	A	ω	ϕ	B
$h_1(x)$	6	2	– 3	1
$h_2(x)$	3,7	0,3	– 1,5	-2
$h_3(x)$	5	1,1	– 4	6

b)
De blå dele repræsenterer en periode

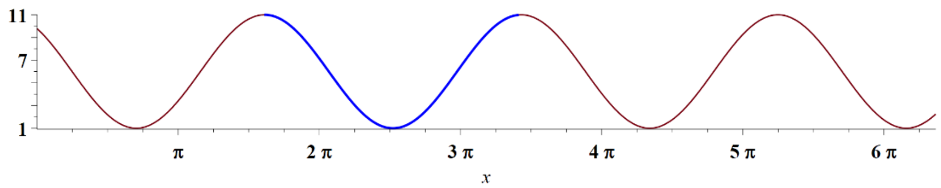
$h_1(x)$:



$h_2(x)$:



$h_3(x)$:



c)

Ved aflæsning og beregning med brug af $T = \frac{2\pi}{\omega}$ findes perioden T:

ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse EGMONT

1) $T = \pi$ 2) $T = \dfrac{20\pi}{3}$ 3) $T = 5.7$

Øvelse 1.22

a)
Eksperimenter selv
b)
$h_{\max} = B + A$ og $h_{\min} = B - A$ skyldes, at sinus-værdierne svinger mellem -1 ogh +1.

Læg de to ligninger i b) sammen: $h_{\max} + h_{\min} = B + A + B - A = 2B$, hvoraf formlen: $B = \dfrac{(h_{\max} + h_{\min})}{2}$

Subtraher dem: $h_{\max} - h_{\min} = B + A - B + A = 2A$, hvoraf formlen: $A = \dfrac{(h_{\max} - h_{\min})}{2}$

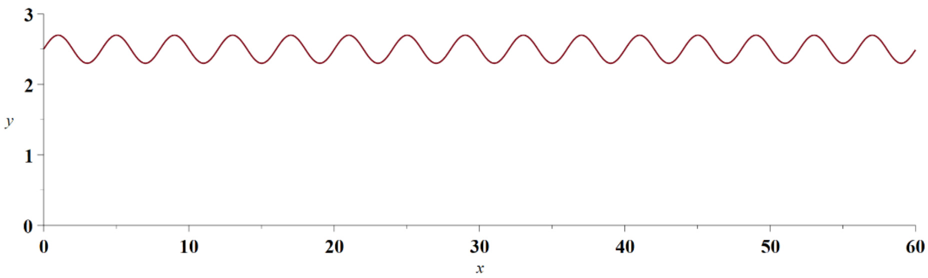
c)
Eksperimenter selv
d)
Eksperimenter selv

Øvelse 1.23

	A	ω	ϕ	B
venstre	4	0.898	– 0.673	1
højre	3	2.0944	– 3.665	2

Øvelse 1.24

a)



c) (burde stå før b):

$T = \dfrac{2\pi}{1.57} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T = 4.0020$

Antal indåndinger på et minut: $\dfrac{60}{4} = 15$

b)
Der indåndes per periode: $2 \cdot 0.2 = 0.4$ liter, dvs ialt: $15 \cdot 0.4 = 6.0$ liter
Udregnes integralet beregner vi summen af indånding og udånding, dvs det **dobbelte** :

$$\int_0^{60} 0.2 \cdot \sin(1.57 \cdot x) + 0.2 \, dx = 12.00014538$$

d)
Efter en udånding: $2.5 - 0.2 = 2.3$ liter